Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 209–214

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle

Feuilletages de type fini compact

Cédric Tarquini

U.M.P.A., E.N.S. Lyon, UMR 5669 CNRS, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Reçu le 14 janvier 2004 ; accepté après révision le 20 mai 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M. Pour tout entier $r \geqslant 1$, nous pouvons construire le fibré des jets d'ordre r transverses à $\mathcal{F}$ au-dessus de M et relever $\mathcal{F}$ pour obtenir un feuilletage $\mathcal{F}^r$. Si $\mathcal{F}^r$ est transversalement parallélisable pour un certain r et a toutes ses feuilles relativement compactes alors $\mathcal{F}$ est riemannien. ***Pour citer cet article : C. Tarquini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Compact finite type foliations. Let $\mathcal{F}$ be a foliation on a manifold M. For every integer $r \geqslant 1$, we can build the bundle of transverse r-jets for $\mathcal{F}$ over M and lift up $\mathcal{F}$ to get a foliation $\mathcal{F}^r$. If $\mathcal{F}^r$ is transversely parallelizable for some r and all its leaves are relatively compact then $\mathcal{F}$ is Riemannian. ***To cite this article: C. Tarquini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

All objects considered in this Note are supposed to be of class C^∞.

Let $\mathcal{F}$ be a codimension q foliation on a manifold M. For every integer r, we denote by D^r the group of r-jets of diffeomorphisms between open neighbourhoods of the origin in $\mathbb{R}^q$, fixing the origin. The bundle $\pi_r : J^r(M,\mathcal{F}) \to M$ of transverse r-jets to $\mathcal{F}^r$ is a D^r-principal fiber bundle (see [2,10]). We recall its construction: let x be a point of U_i. The set A_x will be the set of maps f defined on an open neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}^q$ with values in M satisfying $f(0) = x$ and such that the restriction of $f_i \circ f$ to an open neighbourhood of 0 is a diffeomorphism. The fiber over x of π_r is the quotient of A_x by the relation which identifies f with g if $f_i \circ f$ and $f_i \circ g$ have the same r-jet at 0. The foliation $\mathcal{F}$ can be lifted to $J^r(M,\mathcal{F})$ to get a foliation, $\mathcal{F}^r$, of dimension equal to the dimension of $\mathcal{F}$. See also [6,13] for another approach using transverse G-structures of finite type and their prolongations.

Adresse e-mail : Cedric.Tarquini@umpa.ens-lyon.fr (C. Tarquini).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.05.017

Definition 0.1. We will say that $\mathcal{F}$ is of finite type if there exists r such that $\mathcal{F}^r$ is transversely parallelizable. If moreover all the leaves of $\mathcal{F}^r$ are relatively compact, we will say that $\mathcal{F}$ is a compact finite type foliation.

We prove the following theorem:

Theorem 0.2. *A compact finite type foliation is Riemannian.*

The hypotheses of the last theorem have been inspired by a paper of Wolak [12]. The condition "of finite type" can be seen as a rigidity criterion since in this case the holonomy is uniquely determined by its r-jet. It is in particular the case when the foliation has transverse finite type G-structure (see [6,13] and for higher orders see [4] or [1], pp. 136). This definition is an example of a foliated adaptation of rigid geometric structures after Gromov (see [1], pp. 124). We can ask if Theorem 0.2 remains true replacing "of finite type" by "transverse rigid geometric structure".

Suppose that the manifold M is compact. For every holonomy pseudogroup (H, T) of $\mathcal{F}$ there exists a compact subset K of T intersecting each orbit of H. Then the foliation is of compact finite type if and only if on every point x of K, the set $\{j_x^r(h), h \in H$ defined at $x\}$ is bounded ($j_x^r(h)$ is the r-jet of h at x).

Example 1. If $\mathcal{F}$ is a conformal foliation of codimension at least three, then $\mathcal{F}^2$ is transversely parallelizable (see [2]). This comes from the fact that when $q \geqslant 3$ the C_q-structures are finite type structures ($C_q = \mathbb{R}^{\star +} \times O(q)$ is the conformal group in dimension q). In [11] we prove that if moreover $\mathcal{F}$ is equicontinuous (i.e. $\mathcal{F}$ has a uniformly equicontinuous holonomy pseudogroup), then it satisfies the hypotheses of the main theorem (for $r = 2$) and we show, by another argument, that it is Riemannian.

Example 2. If $\mathcal{F}$ preserves a transverse affine connection then $\mathcal{F}^1$ is transversely parallelizable (it is just a generalization of the Riemannian case). In [3], it is proved that such a foliation on a compact manifold either satisfies the hypotheses of the Theorem 0.2 or none of the leaves of $\mathcal{F}^1$ are relatively compact.

Let $\mathcal{F}$ be a foliation as in Theorem 0.2. We will prove this theorem in two steps. First we show that $\mathcal{F}^1$ is transversely parallelizable and secondly we prove the theorem for $r = 1$.

Proposition 0.3. *The foliation $\mathcal{F}^1$ is transversely parallelizable.*

The proof of this proposition uses the transverse parallelism of $\mathcal{F}^r$ to get for every leaf closure (which is compact) a saturated open neighbourhood. More precisely we prove the following lemma:

Lemma 0.4. *The leaf closures of $\mathcal{F}^r$ are the compact fibers of a locally trivial fibration $p_r : J^r(M, \mathcal{F}) \to W^r$ on a manifold W^r. On each fiber of p_r the foliation induced by $\mathcal{F}^r$ is a Lie foliation with dense leaves.*

The manifold $J^r(M, \mathcal{F})$ fibers over $J^1(M, \mathcal{F})$ with fiber a simply connected nilpotent Lie group N_1^r. This group acts freely on W^r since the only compact subgroup of N_1^r is the identity. It acts properly too since the fibers of p_r are compact. Therefore the quotient space $W^1 = W^r/N_1^r$ is a manifold and $\pi_W : W^r \to W^1$ is a N_1^r-principal bundle. The group N_1^r is contractible thus the bundle π_W has a section, say $s_W : W^1 \to W^r$. It gives us a basic section of $J^r(M, \mathcal{F}) \to J^1(M, \mathcal{F})$, and in particular of $J^2(M, \mathcal{F}) \to J^1(M, \mathcal{F})$. According to Blumenthal (see [2]) the bundle $J^2(M, \mathcal{F})$ is a foliated reduction of the transverse frames bundle of $J^1(M, \mathcal{F})$. Therefore $\mathcal{F}^1$ is transversely parallelizable.

Remark 1. The proof of the last proposition shows that the compact finite type foliations are complete in the following sense: if $(X_1, \cdots, X_{q(r)})$ is a transverse parallelism for $\mathcal{F}^r$ then for every point x in $J^r(M, \mathcal{F})$ there exists $q(r)$ complete basic vector fields $(Y_1, \cdots, Y_{q(r)})$ (whose support are for instance compact and of course saturated) such that $X_i(x)$ equal $Y_i(x)$ modulo $T\mathcal{F}^r$ (for all i). In particular the group of diffeomorphisms of $J^r(M, \mathcal{F})$ preserving $\mathcal{F}^r$ acts transitively.

Proposition 0.5. *If every leaf of $\mathcal{F}^1$ is relatively compact and if the foliation $\mathcal{F}^1$ is transversely parallelizable then $\mathcal{F}$ is Riemannian.*

It generalizes a proof of Wolak (see [12]), based on the fact that a compact finite type foliation preserving a complete transverse connection is Riemannian. We use this technique in the article [3].

As before we get a basic fibration $p_1 : J^1(M, \mathcal{F}) \to W^1$. We construct a vector bundle $p : E \to W^1$ as follows. The fiber over $w \in W^1$ is the space of transverse basic vector fields for $\mathcal{F}^1$ along $p_1^{-1}(w)$. Using Lemma 0.4 and Remark 1, we see that E is a finite dimension vector bundle. Moreover the natural action of D^1 on it is p-equivariant. Since the group D^1 acts properly on W^1, we can apply an adaptation of a theorem of Palais (see [9,12]). It proves that E has a Riemannian D^1-invariant tensor field, say g_E. The transverse parallelism allows us to lift g_E to $\nu(\mathcal{F}^1) = TJ^1(M, \mathcal{F})/T\mathcal{F}^1$. This builds a Riemannian tensor field g which is D^1-invariant and basic for $\mathcal{F}^1$. If we take the orthogonal plane field for g of the projection on $\nu(\mathcal{F}^1)$ of the tangent space of fibers of $\pi_1 : J^1(M, \mathcal{F}) \to M$, we have a basic connection. The restriction of g to this connection can be pushed down to $\nu(\mathcal{F}) = TM/T\mathcal{F}$ to get a Riemannian bundle like metric for $\mathcal{F}$.

1. Introduction

Tous les objets de cette Note sont supposés de classe C^∞.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q sur une variété M. Il est défini par un recouvrement de M par des ouverts $\{U_i\}$, des submersions $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ et des applications de recollement $\gamma_{i,j}$ satisfaisant la condition $f_i = \gamma_{i,j} \circ f_j$ sur $U_i \cap U_j$. Le groupe D^r désignera le groupe des jets à l'ordre r des germes de difféomorphismes entre voisinages ouverts de l'origine de $\mathbb{R}^q$, fixant l'origine. Nous noterons $\pi_r : J^r(M, \mathcal{F}) \to M$ le fibré des jets d'ordre r transverses à $\mathcal{F}$ (voir [2,10]). Il est construit ainsi : à tout point x de U_i on associe l'ensemble A_x des applications f de domaine un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^q$, à valeurs dans M avec $f(0) = x$ et telles que $f_i \circ f$ soit un difféomorphisme au voisinage de l'origine. La fibre de π_r au-dessus de $x \in U_i$ est le quotient de A_x par la relation d'équivalence qui identifie f à g si $f_i \circ f$ et $f_i \circ g$ ont même jet à l'ordre r en l'origine.

Le fibré $\pi_r : J^r(M, \mathcal{F}) \to M$ est un D^r-fibré principal feuilleté et donc le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève naturellement en un feuilletage $\mathcal{F}^r$ sur $J^r(M, \mathcal{F})$ de dimension égale à celle de $\mathcal{F}$. Si F^r est une feuille de $\mathcal{F}^r$, alors $\pi_r(F^r) = F$ est une feuille de $\mathcal{F}$ et la restriction de π_r à F^r est un revêtement de F^r sur F. Le lecteur pourra aussi consulter les articles [6,13] pour une approche différente utilisant les G-structures transverses de type fini et leurs prolongements.

Définition 1.1. Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est de type fini s'il existe un entier r tel que $\mathcal{F}^r$ est transversalement parallélisable. Si de plus, toutes les feuilles de $\mathcal{F}^r$ sont relativement compactes alors nous dirons que $\mathcal{F}$ est de type fini compact.

Nous nous proposons de montrer le :

Théorème 1.2. *Un feuilletage de type fini compact est riemannien.*

Les hypothèses du théorème précédent sont inspirées de l'article de Wolak [12]. Être de type fini pour un feuilletage est une condition de rigidité puisque dans ce cas l'holonomie est déterminée par son jet à l'ordre r. Les feuilletages possédant une G-structure transverse de type fini en sont des exemples (voir [6,13] et pour les ordres supérieurs voir [4] ou [1], page 136). Cette définition est une adaptation transversalement à un feuilletage d'un cas particulier de structures géométriques rigides introduites par Gromov dans [7] (ceci est expliqué dans [1], page 124). On pourrait se demander si le résultat du théorème précédent reste vrai en remplaçant l'hypothèse de type fini par « structure géométrique rigide transverse au feuilletage ».

Supposons la variété M compacte. Si (H, T) est un pseudogroupe d'holonomie du feuilletage alors il existe un compact K inclus dans T intersectant toutes les orbites de H. Dans ce cas $\mathcal{F}$ est de type fini compact si et seulement si en tout point x de K, l'ensemble $\{j_x^r(h),\ h \in H$ défini en $x\}$ est borné — propriété indépendante de la métrique choisie sur T — ($j_x^r(h)$ désigne le jet à l'ordre r de h en x).

Exemple 1. Si $\mathcal{F}$ est conforme et de codimension supérieure à 3 alors $\mathcal{F}^2$ est transversalement parallélisable (voir par exemple [2]). Cela vient du fait que lorsque $q \geqslant 3$, une C_q-structure est une structure de type fini ($C_q = \mathbb{R}^{\star +} \times O(q)$ est le groupe conforme en dimension q). Dans [11], nous montrons que les feuilletages conformes équicontinus (i.e. admettant un pseudogroupe d'holonomie uniformément équicontinu) de codimension au moins 3 sur une variété compacte satisfont les hypothèses du théorème (pour $r = 2$) et qu'ils sont riemanniens par une approche différente de cette Note.

Exemple 2. Si $\mathcal{F}$ préserve une connexion affine transverse alors $\mathcal{F}^1$ préserve un parallélisme (c'est une généralisation du cas riemannien). Dans [3] il est montré qu'un tel feuilletage sur une variété compacte soit vérifie les hypothèses du Théorème 1.2 (et alors il est riemannien) soit toutes les feuilles de $\mathcal{F}^1$ sont non relativement compactes.

2. Démonstration du Théorème 1.2

Fixons un feuilletage $\mathcal{F}$ vérifiant les hypothèses du Théorème 1.2. La démonstration se déroule en deux étapes. La première montre que $\mathcal{F}^1$ est transversalement parallélisable et la seconde montre le théorème principal pour $r = 1$.

Proposition 2.1. *Le feuilletage $\mathcal{F}^1$ est transversalement parallélisable.*

La preuve de cette proposition utilise les arguments de Molino sur les feuilletages riemanniens en se servant du parallélisme transverse de $\mathcal{F}^r$. La difficulté est qu'a priori ce parallélisme n'est pas complet. Mais la relative compacité des feuilles nous permet de pallier à ce problème.

Démonstration. Soit $(X_1, \ldots, X_{q(r)})$ un parallélisme transverse du feuilletage relevé $\mathcal{F}^r$ (où $q(r) = \dim J^r(M, \mathcal{F}) - (\dim M - q) = q(1 + q + \cdots + \frac{(q+r-1)!}{(q-1)!r!})$). Pour tout i, nous noterons $\varphi_{X_i}^t$ le flot local du champ X_i au temps t. Comme X_i est basique, $\varphi_{X_i}^t$ préserve le feuilletage (i.e. envoie ouvert de feuille sur ouvert de feuille). □

Lemme 2.2. *Les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}^r$ sont les fibres d'une fibration localement triviale basique $p_r : J^r(M, \mathcal{F}) \to W^r$ sur une variété W^r. Sur chaque fibre de p_r le feuilletage induit par $\mathcal{F}^r$ est un feuilletage de Lie à feuilles denses.*

Démonstration. Fixons une feuille F de $\mathcal{F}^r$. L'application $\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[^{q(r)} \times \overline{F} \to J^r(M, \mathcal{F})$, $\phi(t_1, \ldots, t_{q(r)}, x) = \varphi_{X_1}^{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_{X_{q(r)}}^{t_{q(r)}}(x)$ est bien définie pour ε assez petit. Son image est un voisinage ouvert saturé du compact $\overline{F}$. En effet, pour $t = (t_1, \ldots, t_{q(r)})$ assez petit, l'image de F est incluse dans une feuille F'. L'intersection de F' et de l'image de $\overline{F}$ est un ensemble ouvert et fermé de F'. Cela montre l'inclusion $\phi(t, \overline{F}) \supset F'$ et l'égalité $\phi(t, \overline{F}) = \overline{F'}$.

On peut ensuite raisonner comme dans la démonstration du théorème de structure de Molino pour les feuilletages transversalement parallélisables. On applique la proposition 4.1. de [8] au feuilletage basique associé à $\mathcal{F}$ dans l'ouvert $\phi(] - \varepsilon, \varepsilon[^{q(r)} \times \overline{F})$. On montre de même que ce feuilletage est donné par les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}^r$. □

Soit N_1^r le noyau du morphisme de troncature de D^r dans D^1 qui à $j_0^r(f)$ associe $j_0^1(f)$. La variété $J^r(M,\mathcal{F})$ est naturellement un fibré principal au-dessus de $J^1(M,\mathcal{F})$ de groupe structural N_1^r. Le groupe N_1^r est nilpotent ([10], page 52). De manière évidente il est difféomorphe à l'espace vectoriel des applications polynômiales de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ de valuation strictement supérieure à 1 et de degré inférieur à r.

Notons π_1^r la projection de $J^r(M,\mathcal{F})$ sur $J^1(M,\mathcal{F})$. Pour toute feuille F^r du feuilletage $\mathcal{F}^r$, l'ensemble $\{n \in N_1^r, \overline{F^r}n \cap \overline{F^r} \neq \emptyset\} = \{n \in N_1^r, \overline{F^r}n = \overline{F^r}\}$ est un sous-groupe compact de N_1^r (la dernière égalité est donnée par la minimalité de $\overline{F^r}$ et la notation $\overline{F^r}n$ désigne le transformé de $\overline{F^r}$ par l'action de l'élément $n \in N_1^r$). Il est donc réduit à l'identité. Ainsi le groupe N_1^r agit librement sur W^r. Il agit aussi proprement : comme les fibres de p_r sont compactes et que N_1^r agit proprement sur $J^r(M,\mathcal{F})$, pour tout compact K de W^r l'ensemble $\{n \in N_1^r, Kn \cap K \neq \emptyset\} = \{n \in N_1^r, p_r^{-1}(K)n \cap p_r^{-1}(K) \neq \emptyset\}$ est compact.

L'espace des orbites $W^1 = W^r/N_1^r$ est donc une variété et l'application quotient $\pi_W : W^r \to W^1$ est un N_1^r-fibré principal à fibres contractibles. Il admet donc une section $s_W : W^1 \to W^r$.

Le quotient de p_r par N_1^r donne une fibration $p_1 : J^1(M,\mathcal{F}) \to W^1$ et l'ensemble défini par $S = p_r^{-1}(s_W(W^1))$ donne une section basique de $J^1(M,\mathcal{F})$ vers $J^r(M,\mathcal{F})$. Pour le vérifier il suffit de montrer que la restriction de π_1^r à S est une immersion.

Supposons qu'il existe un vecteur X non nul, tangent à S en x et annulant la différentielle de π_1^r. La feuille de $\mathcal{F}^r$ passant par x, notée F_x^r, est contenue dans S. L'égalité $\mathrm{d}_x\, p_r(X) = \mathrm{d}_x(s_W \circ p_1 \circ \pi_1^r)(X) = 0$ implique que X est tangent à $\overline{F_x^r}$. Ainsi le parallélisme des fibres de π_1^r prolonge X en un champ de vecteurs basique tangent à $\overline{F_x^r}$. Celui-ci s'intègre en une translation à droite sur $J^r(M,\mathcal{F})$ par un élément non trivial de N_1^r. Cette translation stabilise $\overline{F_x^r}$. Ce qui contredit le fait que l'action de N_1^r est libre.

En particulier il existe une section basique de $\pi_1^2 : J^2(M,\mathcal{F}) \to J^1(M,\mathcal{F})$ (quitte à projeter $J^r(M,\mathcal{F})$ sur $J^2(M,\mathcal{F})$). Or d'après le Lemme 3.1 de [2], le fibré $J^2(M,\mathcal{F})$ est une réduction feuilletée du fibré des repères transverses de $(J^1(M,\mathcal{F}),\mathcal{F}^1)$. Cela montre que $\mathcal{F}^1$ est transversalement parallélisable.

Remarque 1. Étant donné $(X_1,\ldots,X_{q(r)})$ un parallélisme transverse de $\mathcal{F}^r$, nous n'avons pas supposé que chaque X_i était un champ de vecteurs complet sur $J^r(M,\mathcal{F})$. Cependant une conséquence de la démonstration précédente est que le feuilletage $\mathcal{F}^r$ est complètement transversalement parallélisable dans le sens plus faible suivant : si $(X_1,\ldots,X_{q(r)})$ est un parallélisme transverse de $\mathcal{F}^r$ alors pour tout point x de $J^r(M,\mathcal{F})$ il existe $q(r)$ champs de vecteurs complets basiques $(Y_1,\ldots,Y_{q(r)})$ (par exemple dont le support est un compact saturé par le feuilletage) tels que $X_i(x)$ et $Y_i(x)$ soient égaux modulo $T\mathcal{F}^r$ (pour tout i). En particulier le groupe des difféomorphismes de $J^r(M,\mathcal{F})$ préservant $\mathcal{F}^r$ agit transitivement.

Proposition 2.3. *Si $\mathcal{F}^1$ est transversalement parallélisable et a toutes ses feuilles relativement compactes alors $\mathcal{F}$ est riemannien.*

Sa démonstration s'inspire de la preuve de Wolak (voir [12]) montrant qu'un feuilletage préservant une connexion transverse complète (en particulier $\mathcal{F}^1$ est transversalement parallélisable) et de type fini compact est riemannien. Cette technique a été utilisée dans l'article [3].

Démonstration. Le Lemme 2.2 dit que les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}^1$ sont les fibres compactes d'une fibration basique $p_1 : J^1(M,\mathcal{F}) \to W^1$. De plus en restriction aux fibres, le feuilletage $\mathcal{F}^1$ est un feuilletage de Lie à feuilles denses.

Nous allons construire un fibré vectoriel $p : E \to W^1$ en nous inspirant des fibrés utiles de [5] (page 72). Soient u un point de W^1 et $\overline{F}_u$ la fibre $p_1^{-1}(u)$, on définit E_u comme l'ensemble des sections basiques en restriction à $\overline{F}_u$ du fibré normal $\nu(\mathcal{F}^1) = TJ^1(M,\mathcal{F})/T\mathcal{F}^1$. On pose alors $E = \bigcup_{u\in W^1} E_u$ et $p : E \to W^1$ la projection qui à $X \in E_u$ associe u. Il suit, de même que dans [5] et à l'aide de la remarque 1, que E est un fibré vectoriel de dimension finie au-dessus de W^1 (nous pouvons remarquer que l'existence d'un parallélisme transverse implique que E est trivial).

De plus par définition de E si x est un point de $J^1(M,\mathcal{F})$ au-dessus de $u \in W^1$ et si X est un vecteur transverse à $\mathcal{F}^1$ en x (i.e. $X \in \nu_x(\mathcal{F}^1)$) alors il existe une unique section basique X_E dans E_u telle que $X_E(x) = X$.

Le groupe D^1 agit sur E par $X_E h = (Xh)_E$ (pour $h \in D^1$) et l'application p est équivariante pour cette action. De plus le groupe D^1 agit proprement sur W^1 (nous avons vu dans la démonstration de la Proposition 2.1 que c'était une conséquence des deux faits suivants : les feuilles de $\mathcal{F}^1$ sont relativement compactes et D^1 agit proprement sur $J^1(M,\mathcal{F})$). Lorsqu'un groupe de difféomorphismes agit proprement sur une variété, il laisse invariante une métrique riemannienne. Cela a été démontré par Palais dans [9] en construisant la métrique invariante sur des voisinages tubulaires des adhérences des orbites du groupe. Cette construction s'adapte aux fibrés vectoriels de dimension finie sous la forme de la :

Proposition 2.4 [9,12]. *Soient W une variété et G un groupe de difféomorphismes agissant proprement sur W. Soit $p : E \to W$ un fibré vectoriel de dimension finie muni d'une action de G rendant p équivariante. Alors il existe un tenseur riemannien sur E (i.e. une section à valeurs définies positives du fibré $S^2(E^*) \to W$) invariant par G.*

Prenons donc un tenseur riemannien g_E sur E invariant par D^1. Nous pouvons définir un tenseur riemannien sur le fibré $\nu(\mathcal{F}^1) \to J^1(M,\mathcal{F})$ en posant $g_x(X,Y) = g_E|_{p_1(x)}(X_E, Y_E)$ (pour $x \in J^1(M,\mathcal{F})$ et $X, Y \in \nu_x(\mathcal{F}^1)$). Ce dernier est quasi-fibré pour $\mathcal{F}^1$ et D^1-invariant par construction.

La projection de $TJ^1(M,\mathcal{F})$ sur $\nu(\mathcal{F}^1)$ envoie l'espace tangent aux fibres de $\pi_1 : J^1(M,\mathcal{F}) \to M$ sur un champ de plans. Son orthogonal pour g, notée H, est une connexion basique pour $\mathcal{F}^1$ (à cause des propriétés d'invariance de g). Par construction la restriction de g à H est D^1-invariante, elle passe au quotient en une métrique sur $\nu(\mathcal{F})$ quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$. Cela conclut la démonstration de la proposition. □

Remerciements

Je voudrais remercier A. Zeghib pour son aide inestimable, S. Matsumoto pour les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble ainsi qu' É. Ghys pour l'attention qu'il a portée à cette Note.

Références

[1] M. Babillot, R. Feres, A. Zeghib, in : Rigidité, groupe fondamental et dynamique, in : Panoramas et synthèses, vol. 13, Société mathématique de France, 2002, pp. 1272–3835.
[2] R.A. Blumenthal, Stability theorems for conformal foliation, Proc. Amer. Math. Soc. 91 (3) (1984) 485–491.
[3] C. Boubel, P. Mounoud, C. Tarquini, The foliations admitting a transverse connection; applications to flows, prépublication U.M.P.A., E.N.S.L., n° 319, 2003.
[4] A. Candel, R. Quiroga-Barranco, Rigid and finite type geometric structures, prépublication disponible sur le site http://www.csun.edu/ac53971/research/index.html#preprints.
[5] A. El Kacimi Alaoui, Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications, Compos. Math. 73 (1990) 57–106.
[6] A. El Kacimi Alaoui, M. Nicolau, G-feuilletages de type fini, Publ. IRMA Lille 9 (X) (1987).
[7] M. Gromov, Rigid transformation groups, in : Géométrie différentielle (Paris, 1986), in : Travaux en Cours, vol. 33, Hermann, Paris, 1988, pp. 65–139.
[8] P. Molino, Riemannian Foliations, Progr. Math., 1988.
[9] R. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Ann. Math. 73 (2) (1961) 295–323.
[10] B.L. Reinhart, Differential Geometry of Foliation, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 99, Springer-Verlag, 1983.
[11] C. Tarquini, Feuilletages conformes, Ann. Inst. Fourier, à paraître.
[12] R.A. Wolak, Some remarks on equicontinuous foliations, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 41 (1999) 13–21.
[13] R.A. Wolak, Foliated G-structures and Riemannian foliations, Manuscripta Math. 66 (1989) 45–59.