

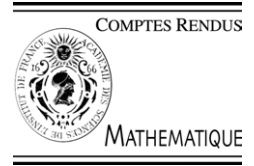


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 313–316



Problèmes mathématiques de la mécanique

## Un modèle mathématique de cyclone

Alain-Yves LeRoux<sup>a</sup>, Marie-Noëlle LeRoux<sup>a</sup>, Jean-André Marti<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *LaBAG(UMR5467), institut de mathématiques (Fed. 2254), université Bordeaux I, 33405 Talence, France*

<sup>b</sup> *Équipe d'analyse algébrique non linéaire, laboratoire AOC-EA3591, faculté des sciences, université Antilles Guyane, 97159 Pointe-à-Pitre, Guadeloupe*

Reçu le 7 avril 2004 ; accepté le 23 avril 2004

Disponible sur Internet le 29 juillet 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

---

### Résumé

Les ondes sources sont des solutions particulières de systèmes hyperboliques vraiment non linéaires, avec terme source, et dont la vitesse de propagation reste cependant constante et déterminée par une racine du terme source. Nous proposons ici un système de deux équations, en dimension deux d'espace, modélisant un champ de vitesse en basse atmosphère. Le terme source correspond à la prise en compte d'un gradient de pression, d'un effet de friction ou d'aspiration, et de la force de Coriolis. Dans le cas particulier où les paramètres du terme source sont des constantes, nous construisons une solution qui est constante en dehors d'une couronne circulaire représentant le cyclone. Le disque intérieur représente le mur de l'oeil du cyclone et correspond à un choc de cisaillement. Le cercle extérieur est un lieu de départ de bifurcations modélisant effectivement le cyclone. *Pour citer cet article : A.-Y. LeRoux et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**A mathematical model for hurricanes.** The source waves are some particular solutions to genuinely non linear hyperbolic systems with a source term, whose propagation velocity is a constant determined by the roots of this source term. We propose a system of 2 equations on a 2 dimension space, which model the velocity field of the atmosphere near the ground. The source term is made of three parts: a given pressure gradient, a friction or aspiration effect and the Coriolis force. In the case where these parameters are constant, we build a solution which is a constant outside a circular crown. The internal circle represents the eye's wall of the hurricane and corresponds to a shear shock wave. The external circle is a set generating the bifurcation which actually models the hurricane. *To cite this article: A.-Y. LeRoux et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

*Adresses e-mail :* Alain-Yves.leroux@math.u-bordeaux1.fr (A.-Y. LeRoux), Marie-Noelle.leroux@math.u-bordeaux1.fr (M.-N. LeRoux), Jean-Andre.Marti@univ-ag.fr (J.-A. Marti).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crma.2004.04.028

## 1. Introduction

Une onde source est une onde dont la vitesse est complètement déterminée par une racine du terme source d'un système hyperbolique non linéaire. Le terme source est pris au sens large, en incluant également les termes de perte. Par exemple, pour tout  $R > 0$ ,  $u_* \in \mathbb{R}$  et  $k \geq 0$ , la fonction  $u(x, t) = u_* + k \frac{\partial}{\partial x} \chi_R(|x - u_* t|)$ , avec  $\chi_R(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - R)^2$ , est à la fois solution de l'équation de Burgers non homogène  $u_t + uu_x + k(u - u_*) = 0$  et de l'équation linéaire homogène  $u_t + u_* u_x = 0$ . On peut aussi construire une solution en forme de train d'ondes, en concaténant plusieurs solutions de ce type. Notons que cette solution présente une discontinuité compatible avec la condition de choc de Rankine Hugoniot et la condition d'entropie. On retrouve cette notion d'onde source dans de nombreuses applications, en hydraulique notamment, pour représenter les «roll waves» sur une pente, le mascaret dans un estuaire, ou les vagues qui arrivent sur une plage; voir [1–3,5,6]. Nous proposons ici une nouvelle application en dimension deux d'espace, concernant les cyclones, dont une description du phénomène est développée par exemple dans [7].

## 2. Le modèle de cyclone

On note  $u$  et  $v$  les composantes horizontales de la vitesse,  $\omega = \frac{\pi \sin \lambda}{21\,600}$  le coefficient de Coriolis, où  $\lambda$  est la latitude du lieu ( $\lambda > 0$  dans l'hémisphère nord),  $\mu \geq 0$  un coefficient de friction et  $k \geq 0$  un coefficient d'aspiration qui est sans effet à l'extérieur du phénomène cyclonique et qui simule ici l'action d'une composante verticale de vitesse. Le gradient de pression  $(p_x, p_y)$  est supposé être ici une donnée. Le modèle est le suivant

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + p_x + \mu u - \omega v &= k(u - u_*), \\ v_t + uv_x + vv_y + p_y + \mu v + \omega u &= k(v - v_*) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $u_* = -\frac{\mu p_x + \omega p_y}{\mu^2 + \omega^2}$  et  $v_* = \frac{\omega p_x - \mu p_y}{\mu^2 + \omega^2}$ .

En écrivant  $p_x = -\mu u_* + \omega v_*$  et  $p_y = -\omega u_* - \mu v_*$ , le système prend la forme

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= (k - \mu)(u - u_*) + \omega(v - v_*), \\ v_t + uv_x + vv_y &= (k - \mu)(v - v_*) - \omega(u - u_*) \end{aligned} \quad (2)$$

dont  $u_*$  et  $v_*$  forment la racine du terme source. Ainsi, une onde source est aussi solution du système linéaire associé :

$$u_t + u_* u_x + v_* u_y = 0, \quad v_t + u_* v_x + v_* v_y = 0. \quad (3)$$

Le champ de vitesse  $(u_*, v_*)$  correspond aux alizés.

Selon la relation de Rankine Hugoniot, qui s'obtient à partir d'un calcul de fonctions généralisées (voir [4]), une onde choc du système (1) correspond à une courbe de discontinuité de la forme  $S(x - \frac{u_1 + u_2}{2}t, y - \frac{v_1 + v_2}{2}t) = 0$  où  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont les valeurs de la solution de part et d'autre de cette discontinuité. Dans le cas où le support de la discontinuité est un cercle de rayon  $R$  et de centre  $(x_0 + u_* t, y_0 + v_* t)$  avec  $x_0, y_0$  donnés, et en prenant  $u_1 = u_*, v_1 = v_*$  puis  $u_2 = \gamma u, v_2 = \gamma v$  les traces de la solution de l'autre côté de la discontinuité, la relation de Rankine Hugoniot donne

$$(\gamma u - u_*)(x - u_* t - x_0) + (\gamma v - v_*)(y - v_* t - y_0) = 0 \quad (4)$$

ce qui exprime que le saut de discontinuité  $(\gamma u - u_*, \gamma v - v_*)$  doit être orthogonal à la direction radiale. La vitesse du choc est égale à  $(u_*, v_*)$  ce qui en fait une discontinuité de contact. Nous verrons dans la suite que l'extérieur du cyclone dans certains cas d'une part, le mur de l'oeil d'autre part correspondent à de tels chocs, et que le champ de vitesse entre ces deux cercles correspond à une bifurcation.

### 3. La résolution par les caractéristiques

En prenant le temps  $t$  comme paramètre, le système caractéristique associé à (1) est  $x'(t) = u(t)$ ,  $u'(t) = (k - \mu)(u(t) - u_*) + \omega(v(t) - v_*)$ ,  $y'(t) = v(t)$ ,  $v'(t) = -\omega(u(t) - u_*) + (k - \mu)(v(t) - v_*)$ . On prend comme trajectoire de référence celle issue de  $x = R$ ,  $y = 0$  où  $R$  est le rayon du cyclone. On remarque que l'intégration du système caractéristique donne explicitement

$$u = (k - \mu)(x - u_*t) + \omega(y - v_*t) + u_*, \quad v = -\omega(x - u_*t) + (k - \mu)(y - v_*t) + v_*$$

On introduit les variables Lagrangiennes  $X = x - u_*t$ ,  $Y = y - v_*t$ ,  $U = u - u_*$ ,  $V = v - v_*$  et on cherche une solution de la forme

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = a(\xi) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + b(\xi) \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} \tag{5}$$

où  $\xi = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Ainsi  $a(\xi)\xi$  est la composante radiale de la vitesse et  $b(\xi)\xi$  sa composante transverse. La relation de Rankine Hugoniot se réduit alors à imposer la continuité de la quantité  $a(\xi)\xi^2$  ce qui autorise toute discontinuité de la composante transverse, et une seule possibilité pour la composante radiale, lorsque  $a(\xi)\xi = 0$ . L'introduction de (5) dans (1) conduit au système différentiel

$$aa'\xi + a^2 - b^2 - (k - \mu)a + \omega b = 0, \quad ab'\xi + 2ab - (k - \mu)b - \omega a = 0.$$

Dans le cas particulier où  $\mu = 0$ ,  $\omega = 0$ , une solution non nulle est  $a(\xi) = k(1 - \frac{R}{\xi})$ ,  $b(\xi) = 0$ . On retrouve une généralisation immédiate du cas monodimensionnel, qu'on peut encore généraliser immédiatement en dimension

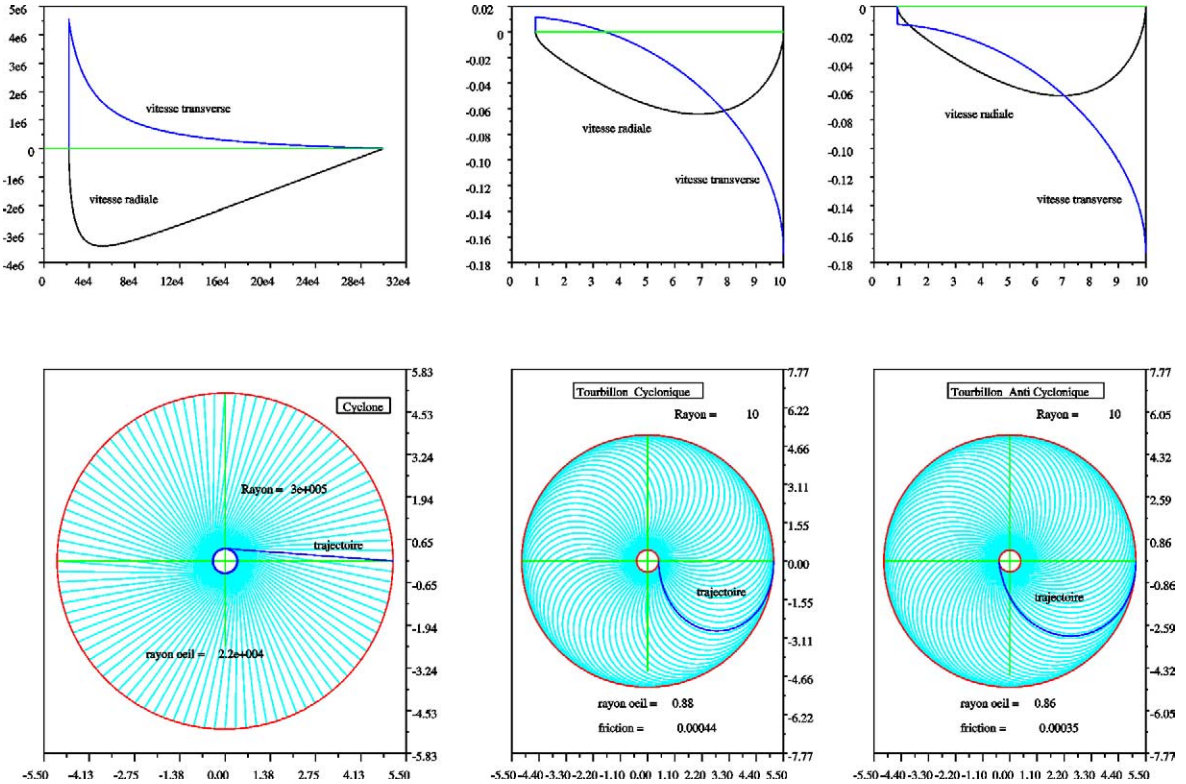


Fig. 1. Gauche : composants radiales et trasverses de la vitesse ; 2 autres colonnes : voir texte.

trois, et ainsi modéliser une sorte de « trou noir ». Dans le cas du cyclone, on recherche les solutions non nulles en posant  $z(\xi) = -\frac{b(\xi)}{a(\xi)}$  ce qui donne

$$\frac{d}{d\xi}(a(\xi)\xi) = z(\xi)^2 a(\xi) + (k - \mu) + \omega z(\xi), \quad \frac{d}{d\xi}(b(\xi)\xi) = -b(\xi) + \omega - (k - \mu)z(\xi)$$

que l'on intègre à partir de  $\xi = R$  en prenant  $a(R) = 0, b(R) = 0$  et  $z(R) = z_0$ , une petite incidence que l'on se donne.

#### 4. Tests de validation

Dans la Fig. 1, la première colonne représente les composantes radiales et transverses de la vitesse, puis la représentation d'une sélection de caractéristiques. On a pris  $z_0 = 0.075, k = 15, \mu = 0$  et résolu les équations numériquement par la méthode d'Euler. On peut remarquer l'apparition de l'oeil et une forte augmentation des vents au voisinage du mur. Les deux autres colonnes représentent de petits tourbillons obtenus à partir d'un choc sur le bord extérieur, et sans aspiration (en clair :  $b(R) \neq 0, k = 0$ ).

On observe encore l'apparition d'un oeil, et aussi que le sens d'enroulement des caractéristiques autour de l'oeil dépend complètement de la valeur du coefficient de friction ; on ne peut espérer dégénérer en cyclone que si la friction est suffisante. Ici, le calcul explicite est possible.

#### 5. Conclusion

Malgré sa relative simplicité, le modèle permet à la fois de reproduire l'apparition et la stabilité de l'oeil tout en décrivant la trajectoire du cyclone. Pour simplifier, les coefficients ont été traités ici comme des constantes, mais une réactualisation des champs de pression en fonction des données météo et du coefficient de Coriolis en fonction de la latitude, peut être effectuée à chaque instant, les différences d'échelle entre les deux phénomènes étant très importantes.

#### Références

- [1] R.F. Dressler, Mathematical solution of the problem of rollwaves in inclined open channel, *Comm. Pure Appl. Math.* II (2/3) (1949) 149–194.
- [2] J. Stokker, *Water Waves*, Interscience, 1957.
- [3] G. Godinand, A.Y. LeRoux, M.N. LeRoux, Generation of new solvers involving the source term for a class of nonhomogeneous hyperbolic system, available on <http://www.math.ntnu.no/conservation/2000/029.html>.
- [4] J.F. Colombeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North-Holland, 1985.
- [5] A.Y. LeRoux, Oriented characteristics methods for a class of non homogeneous hyperbolic systems, in: R. Herbin, D. Krönered (Eds.), *Finite Volume for Complex Applications III*, Hermes Penton, 2002, pp. 97–106.
- [6] A.Y. LeRoux, M.N. LeRoux, Source waves, à paraître.
- [7] M. Vial, L.J. Germain, travail d'études, <http://www.bioinformatics.org/tpe-lfb/html/cyclones-tropicaux.html>.