Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 27–32

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles/Problèmes mathématiques de la mécanique

Problèmes de vibro-impact : étude de la dépendance par rapport aux données

Laetitia Paoli

Université Jean Monnet- Saint-Etienne, 23, rue de Docteur Paul Michelon, 42023 Saint Etienne cedex 2, France

Reçu et accepté le 1er avril 2004

Disponible sur Internet le 28 mai 2004

Présenté par Haïm Brézis

Résumé

Nous considèrons un problème de vibro-impact, c'est-à-dire un système mécanique à nombre fini de degrés de liberté, soumis à des contraintes unilatérales parfaites. Nous supposons que la transmission des vitesses est décrite par une loi de Newton avec un coefficient de restitution $e \in [0,1]$. Motivé par des questions numériques, nous étudions la dépendance des solutions par rapport aux données. Pour une large classe de problèmes (systèmes soumis à une ou plusieurs contraintes, faible régularité des données), nous obtenons un critère de continuité par rapport aux données, relié à la géométrie des contraintes aux impacts. ***Pour citer cet article : L. Paoli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Vibro-impact problems: study of the dependence on data. We consider a vibro-impact problem i.e. a mechanical system with a finite number of degrees of freedom, subject to perfect unilateral constraints. We assume that the transmission of velocities at impacts is described by a Newton's law with a restitution coefficient $e \in [0,1]$. Motivated by the computation of approximate solutions, we study the dependence of the solutions on data. For a large class of problems (single or multi-constrained systems, weak regularity of data), we obtain a criterion, involving the geometry of the constraints at impacts, which ensures continuity with respect to the data. ***To cite this article: L. Paoli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

We consider a mechanical system with d degrees of freedom. We denote by $u \in \mathbb{R}^d$ its representative point in generalized coordinates. We assume that the system is subject to frictionless unilateral constraints described by the following inequalities

$$f_i(u) \geqslant 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, \nu\}, \ \nu \geqslant 1,$$

Adresse e-mail : laetitia.paoli@univ-st-etienne.fr (L. Paoli).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.04.018

with $f_i \in C^1(\mathbb{R}^d)$ such that ∇f_i is locally Lipschitz continuous and does not vanish in a neighbourhood of $\{u \in \mathbb{R}^d;\ f_i(u) = 0\}$. We denote by K the set of admissible positions i.e.

$$K = \bigl\{u \in \mathbb{R}^d;\ f_i(u) \geqslant 0\ \forall i \in \{1, \dots, \nu\}\bigr\},$$

and we define the set of active constraints at $u \in \mathbb{R}^d$ by

$$J(u) = \bigl\{i \in \{1, \dots, \nu\};\ f_i(u) \leqslant 0\bigr\}.$$

We assume that the active constraints are functionally independent, i.e.

$$\forall u \in K, \quad \bigl(\nabla f_i(u)\bigr)_{i \in J(u)} \text{ is linearly independent.}$$

Let us recall the definition of the tangent cone to K at u

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad T_K(u) = \bigl\{w \in \mathbb{R}^d;\ \bigl\langle \nabla f_i(u), w\bigr\rangle \geqslant 0\ \forall i \in J(u)\bigr\},$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the scalar Euclidean product of $\mathbb{R}^d$, and the definition of the normal cone to K at u with respect to the Euclidean metric, $N_K(u)$, or with respect to the kinetic metric, $N_K^*(u)$

$$N_K(u) = \bigl\{w \in \mathbb{R}^d;\ \langle w, v\rangle \leqslant 0\ \forall v \in T_K(u)\bigr\},$$

$$N_K^*(u) = \bigl\{w \in \mathbb{R}^d;\ \bigl\langle w, M(u)v\bigr\rangle \leqslant 0\ \forall v \in T_K(u)\bigr\},$$

where $M(u)$ is the mass matrix of the system at u.

The motion of the system is described by the following Measure Differential Inclusion (MDI)

$$M(u)\ddot{u} - f(t, u, \dot{u}) \in -N_K(u). \tag{1}$$

More precisely, there exist ν scalar measures λ_i such that

$$\begin{cases} M(u)\ddot{u} - f(t, u, \dot{u}) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \nabla f_i(u), \\ \lambda_i \leqslant 0, \quad \operatorname{Supp}(\lambda_i) \subset \bigl\{t;\ f_i(u(t)) = 0\bigr\}. \end{cases}$$

These equations do not describe completely the motion since the right velocities at impacts, i.e. $\dot{u}(t+0)$ when $u(t) \in \partial K$, are not uniquely defined by the MDI. Hence we should add a constitutive law of impact. Following Moreau [2], we assume that the transmission of velocities at impacts is given by

$$\dot{u}(t+0) = \operatorname{Proj}_{u(t)}\bigl(T_K\bigl(u(t)\bigr), \dot{u}(t-0)\bigr) - e\operatorname{Proj}_{u(t)}\bigl(N_K^*\bigl(u(t)\bigr), \dot{u}(t-0)\bigr) \tag{2}$$

if $u(t) \in \partial K$, where $\operatorname{Proj}_u(T_K(u), v)$ and $\operatorname{Proj}_u(N_K^*(u), v)$ are the projections of v on $T_K(u)$ and $N_K^*(u)$ with respect to the kinetic metric and e is a restitution coefficient belonging to $[0, 1]$.

Motivated by the computation of approximate solutions [3], we focus on the dependence of solutions on data. A first result has been obtained by Schatzman [6] in the one-dimensional case and a more general result is given by Ballard in [1]. But, in both cases, the authors considered only the dependence on initial data (u_0, v_0) when the other data are analytical. Here we drop the analyticity assumption and we study the behaviour of the solution u_p of the Cauchy problem associated to a set of data $\mathcal{D}_p = \{u_{0p}, v_{0p}, M_p, f_p, f_{ip},\ 1 \leqslant i \leqslant \nu\}$. When $\mathcal{D}_p$ converges to $\mathcal{D}_\infty$ (in the sense of Theorem 2.1), we prove that $(u_p)_{p\geqslant 0}$ converges to a solution u_∞ of the limit MDI. Moreover, u_∞ satisfies also the impact law if

$$\bigl\langle \nabla f_{i\infty}(u_\infty), M_\infty^{-1}(u_\infty)\nabla f_{j\infty}(u_\infty)\bigr\rangle \leqslant 0 \quad \text{if } e = 0,$$

$$\bigl\langle \nabla f_{i\infty}(u_\infty), M_\infty^{-1}(u_\infty)\nabla f_{j\infty}(u_\infty)\bigr\rangle = 0 \quad \text{if } e \neq 0$$

holds for all $(i, j) \in J_\infty(u_\infty)^2$, $i \neq j$. These conditions can be interpreted geometrically as follows: the active constraints along the limit motion create right or acute angles when $e = 0$, or remain orthogonal when $e \neq 0$.

1. Présentation du problème

Soit $\mathcal{D} = \{u_0, v_0, M, f, f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \nu\}$ un ensemble de données satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H1) M est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans l'ensemble des matrices $d \times d$ symétriques définies, positives ;
(H2) f est une application continue de $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ $(\tau > 0)$ dans $\mathbb{R}^d$;
(H3) $f_i \in C^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $i \in \{1,\dots,\nu\}$, ∇f_i est localement lipschitzien et ne s'annule pas au voisinage de l'hypersurface $\{u \in \mathbb{R}^d;\ f_i(u) = 0\}$;
(H4) les contraintes actives sont fonctionnellement indépendantes c'est-à-dire, pour tout $u \in K$ la famille $\big(\nabla f_i(u)\big)_{i \in J(u)}$ est libre, avec

$$K = \big\{u \in \mathbb{R}^d;\ f_i(u) \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant \nu\big\}, \qquad J(u) = \big\{i \in \{1,\dots,\nu\};\ f_i(u) \leqslant 0\big\};$$

(H5) $u_0 \in K$ et $v_0 \in T_K(u_0) = \{w \in \mathbb{R}^d;\ \langle \nabla f_i(u_0), w\rangle \geqslant 0\ \forall i \in J(u_0)\}$.

On considère le problème de vibro-impact décrit par les Éqs. (1), (2) et la condition initiale (u_0, v_0). Plus précisément, le problème de Cauchy associé à $\mathcal{D}$ est défini par

Problème (P). Trouver $\delta > 0$ et une fonction $u : [0,\delta] \to \mathbb{R}^d$ tels que

(i) u est continue à valeurs dans K, $\dot u$ est à variation bornée,
(ii) la mesure $\mu = M(u)\ddot u - f(\cdot, u, \dot u)$ satisfait l'inclusion différentielle (1) au sens suivant : il existe ν mesures scalaires λ_i telles que

$$\begin{cases} -\mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \nabla f_i(u), \\ \lambda_i \leqslant 0, \quad \operatorname{Supp}(\lambda_i) \subset \big\{t \in [0,\delta];\ f_i\big(u(t)\big) = 0\big\}, \end{cases}$$

(iii) la loi d'impact est donnée par (2) pour tout $t \in\,]0,\delta[$,
(iv) la condition initiale (u_0, v_0) est satisfaite c'est-à-dire

$$u(0) = u_0, \qquad \dot u(0+0) = v_0.$$

Pour ce type de problèmes, un résultat d'existence et d'unicité a été récemment établi par Ballard [1] quand les données sont analytiques. Pour des données moins régulières des accumulations d'impacts à droite d'un instant t donné peuvent apparaitre, conduisant à des cas de non-unicité (cf. [5]). Même en l'absence de tels phénomènes, l'unicité n'implique pas que le problème soit bien posé et il est facile d'exhiber des cas où il n'y a pas continuité par rapport aux données. Considérons par exemple le problème modèle d'un point matériel libre dans un domaine angulaire de $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire :

$$f \equiv 0,\ M \equiv \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f_1(x,y) = y, \quad f_2(x,y) = -x\sin\theta - y\cos\theta \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour $\theta \in\,]\pi/2, \pi[$, $e = 0$ et $u_{0p} = (x_{0p}, 1)$, $x_{0p} > 0$, $v_{0p} = (0,-1)$, avec $\lim_{p \to +\infty} x_{0p} = 0$, un calcul direct montre que la solution u_p du problème de Cauchy associé aux conditions initiales (u_{0p}, v_{0p}) ne converge pas vers la solution u_∞ du problème de Cauchy associé à la condition initiale limite $(u_{0\infty}, v_{0\infty}) = ((0,1),(0,-1))$, pour laquelle la vitesse du point matériel s'annule lorsqu'il atteint le sommet de K (cf. Fig. 1).

Dans une telle situation, la résolution approchée effective du problème semble impossible : même si on dispose d'une méthode dont la convergence est démontrée, les erreurs d'arrondis conduisent à une sorte d'imprédictibilité liée à l'incertitude sur le point exact d'impact par rapport à l'angle (cf. Fig. 2 pour une autre illustration de ce problème quand $e = 1$).

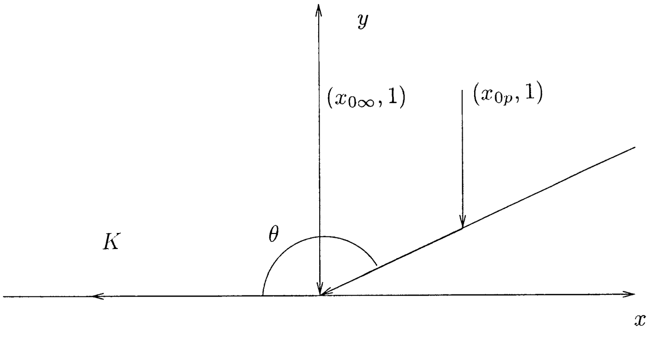

Fig. 1. Le problème modèle pour $\theta \in]\pi/2, \pi[$ et $e = 0$.
Fig. 1. Model problem for $\theta \in]\pi/2, \pi[$ and $e = 0$.

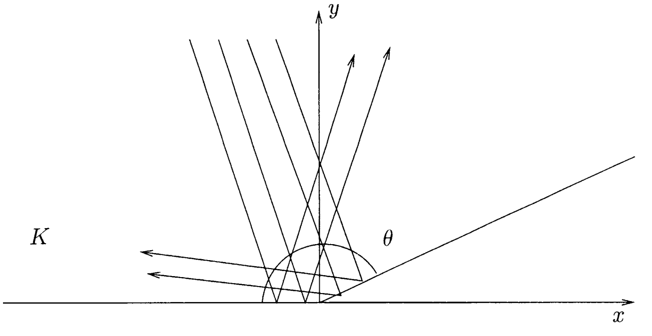

Fig. 2. Le problème modèle pour $\theta \in]\pi/2, \pi[$ et $e = 1$.
Fig. 2. Model problem for $\theta \in]\pi/2, \pi[$ and $e = 1$.

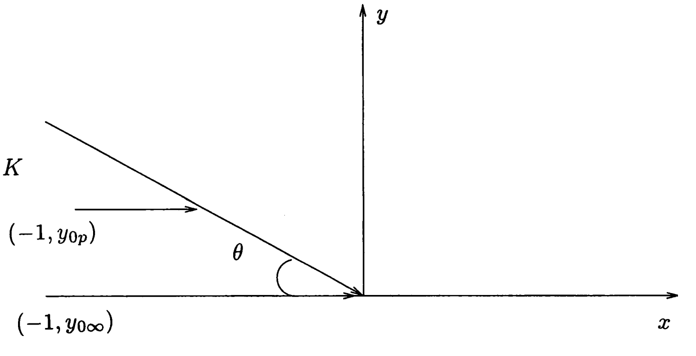

Fig. 3. Le problème modèle pour $\theta \in]0, \pi/2[$ et $e = 0$.
Fig. 3. Model problem for $\theta \in]0, \pi/2[$ and $e = 0$.

Il est donc important d'établir des critères garantissant la continuité par rapport aux données. Un premier résultat a été obtenu par P. Ballard dans [1] concernant la dépendance par rapport aux conditions initiales. Généralisant un résultat antérieur dû à M. Schatzman [6], il démontre, sous l'hypothèse d'analyticité des autres données, qu'il y a continuité si les contraintes actives le long du mouvement limite restent orthogonales.

L'analyse du problème modèle précédent permet cependant de penser que ce critère n'est pas optimal pour $e = 0$. En effet lorsque $\theta \in]0, \pi/2[$ et $u_{0p} = (-1, y_{0p})$, $y_{0p} > 0$, $v_{0p} = (1, 0)$, avec $\lim_{p\to+\infty} y_{0p} = 0$, la suite des solutions $(u_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers la solution u_∞ du problème de Cauchy limite (cf. Fig. 3).

2. Enoncé du résultat

Nous considérons ici le cas général où toutes les données dépendent d'un paramètre p, tendant vers $+\infty$.

Théorème 2.1. *Nous faisons les hypothèses suivantes* :

(i) *la suite* $(u_{0p}, v_{0p})_{p\geqslant 0}$ *converge vers* $(u_{0\infty}, v_{0\infty})$;
(ii) *les suites* $(M_p)_{p\geqslant 0}$, $(dM_p)_{p\geqslant 0}$, $(f_{ip})_{p\geqslant 0}$ *et* $(\nabla f_{ip})_{p\geqslant 0}$ $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$ *convergent uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}^d$ *vers* M_∞, dM_∞, $f_{i\infty}$ *et* $\nabla f_{i\infty}$ *respectivement*;
(iii) *la suite* $(f_p)_{p\geqslant 0}$ *converge uniformément sur tout compact de* $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *vers* f_∞ ;
(iv) *l'ensemble des données* $\mathcal{D}_\infty = \{u_{0\infty}, v_{0\infty}, M_\infty, f_\infty, f_{i\infty},\ 1 \leqslant i \leqslant \nu\}$ *satisfait les hypothèses* (H1)–(H5);
(v) *il existe* $\delta \in (0, \tau]$ *tel que, pour tout* $p \geqslant 0$, *le problème de Cauchy associé aux données* $\mathcal{D}_p$ *admet une solution* u_p *definie sur* $[0, \delta]$.

Alors, il existe $\delta_\infty \in]0, \delta]$ *et une sous-suite de* $(u_p)_{p\geqslant 0}$ *qui converge uniformément sur* $[0, \delta_\infty]$ *vers une limite* $u_\infty \in C^0([0, \delta_\infty], K_\infty)$ *telle que* $\dot u_\infty$ *est une fonction à variation bornée, il existe* ν *mesures scalaires* $\lambda_{i\infty}$ *telles que*

$$\begin{cases} f_\infty(\cdot, u_\infty, \dot u_\infty) - M_\infty(u_\infty)\ddot u_\infty = -\mu_\infty = \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{i\infty} \nabla f_{i\infty}(u_\infty), \\ \lambda_{i\infty} \leqslant 0, \quad \operatorname{Supp}(\lambda_{i\infty}) \subset \{t \in [0, \delta_\infty];\ f_{i\infty}(u_\infty(t)) = 0\}, \end{cases} \tag{3}$$

et

$$u_\infty(0) = u_{0\infty}, \qquad \dot u_\infty(0+0) = v_{0\infty}. \tag{4}$$

De plus, si la condition

$$\begin{aligned} &\langle \nabla f_{i\infty}(u_\infty(t)), M_\infty^{-1}(u_\infty(t)) \nabla f_{j\infty}(u_\infty(t)) \rangle \leqslant 0 \quad \text{si } e = 0, \\ &\langle \nabla f_{i\infty}(u_\infty(t)), M_\infty^{-1}(u_\infty(t)) \nabla f_{j\infty}(u_\infty(t)) \rangle = 0 \quad \text{si } e \neq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

est vérifiée pour tout $(i, j) \in J_\infty(u_\infty(t))^2$, $i \neq j$, *et pour tout* $t \in (0, \delta_\infty)$, *alors* u_∞ *satisfait aussi la loi d'impact*

$$\dot u_\infty(t+0) = \operatorname{Proj}_{u_\infty(t)}(T_{K_\infty}(u_\infty(t)), \dot u_\infty(t-0)) - e \operatorname{Proj}_{u_\infty(t)}(N^*_{K_\infty}(u_\infty(t)), \dot u_\infty(t-0)) \quad \forall t \in]0, \delta_\infty[$$

et u_∞ *est une solution du problème de Cauchy associé à l'ensemble des données* $\mathcal{D}_\infty$.

La preuve se divise en trois grandes étapes. Nous commençons par établir des estimations a priori pour $(\dot u_p)_{p\geqslant 0}$ dans $L^\infty(0, \delta_\infty; \mathbb{R}^d)$ et $BV(0, \delta_\infty; \mathbb{R}^d)$ avec $\delta_\infty \in]0, \delta]$, en utilisant des techniques inspirées de [4] et [1]. Les théorèmes d'Ascoli et de Helly permettent alors d'en déduire qu'il existe une sous-suite de $(u_p)_{p\geqslant 0}$, encore notée $(u_p)_{p\geqslant 0}$, telle que

$$u_p \to u_\infty \quad \text{dans } C^0([0, \delta_\infty]; \mathbb{R}^d),$$

$$\dot u_p(t+0) \to \dot u_\infty(t+0) \quad \text{sauf peut-être sur un ensemble dénombrable de points dans } (0, \delta_\infty),$$

$$\ddot u_p \rightharpoonup \ddot u_\infty \quad \text{dans } M^1(0, \delta_\infty; \mathbb{R}^d) \text{ faible*}$$

et nous démontrons que u_∞ est à valeurs dans K_∞ et satisfait (3) et (4). Finalement, nous considérons un instant d'impact du mouvement limite c'est-à-dire $t_1 \in]0, \delta_\infty[$ tel que $u_\infty(t_1) \in \partial K_\infty$. Au voisinage de $u_\infty(t_1)$, K_∞ et T_{K_∞} sont très proches et l'hypothèse (5) implique que les angles au sommet du cône sont droits ou aigus (si $e = 0$). Le comportement de la suite $(u_p)_{p \geqslant 0}$ est donc qualitativement le même que dans le problème modèle précédent. Bien entendu, cette intuition géométrique est étayée par des estimations précises, au voisinage de t_1, de $(\langle \nabla f_{ip}(u_p), \dot{u}_p \rangle)_{p \geqslant 0}$, pour tout $i \in J_\infty(u_\infty(t_1))$.

De plus, si le problème de Cauchy limite admet une unique solution, nous pouvons démontrer un résultat de convergence global.

Théorème 2.2. *Nous supposons que les hypothèses du Théorème* 2.1 *sont satisfaites. Nous supposons de plus que le problème de Cauchy associé aux données $\mathcal{D}_\infty$ admet une unique solution u_∞^* sur $[0, \delta_\infty^*]$ avec $\delta_\infty^* \in]0, \tau]$ et*

$$\begin{aligned} &\left\langle \nabla f_{i\infty}(u), M_\infty^{-1}(u) \nabla f_{j\infty}(u) \right\rangle \leqslant 0 \quad \text{si } e = 0, \\ &\left\langle \nabla f_{i\infty}(u), M_\infty^{-1}(u) \nabla f_{j\infty}(u) \right\rangle = 0 \quad \text{si } e \neq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

pour tout $u \in K_\infty$, et pour tout $(i, j) \in J_\infty(u)^2$, $i \neq j$.

Alors, la suite $(u_p)_{p \geqslant 0}$ converge vers u_∞^* dans $W^{1,k}(0, \min(\delta, \delta_\infty); \mathbb{R}^d)$ fort pour tout $k \in [1, +\infty[$ et dans $W^{1,\infty}(0, \min(\delta, \delta_\infty); \mathbb{R}^d)$ faible.*

Références

[1] P. Ballard, The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints, Arch. Rational Mech. Anal. 154 (2000) 199–274.

[2] J.J. Moreau, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, in: J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos (Eds.), Nonsmooth Mechanics and Applications, in: CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, 1988, pp. 1–82.

[3] L. Paoli, Time-discretization of vibro-impact, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 359 (2001) 2405–2428.

[4] L. Paoli, M. Schatzman, Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales : cas avec perte d'énergie, Modél. Math. Anal. Numér. (M^2AN) 27 (6) (1993) 673–717.

[5] M. Schatzman, A class of nonlinear differential equations of second order in time, Nonlinear Anal. 2 (1978) 355–373.

[6] M. Schatzman, Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensio nal impact problems, Math. Comput. Modelling 28 (4–8) (1998) 1–18.