Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 819–824
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Problèmes mathématiques de la mécanique

Existence et stabilité de roll-waves pour les équations de Saint Venant

Pascal Noble

UMR CNRS 5640 (MIP), Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 18 février 2004 ; accepté le 1er mars 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Les roll-waves sont des ondes progressives entropiques des équations de Saint Venant avec terme source. Elles sont C^1 par morceaux et périodiques en espace. On s'intéresse dans cette note à deux problèmes reliés : d'une part l'existence de roll-waves dans un canal à fond périodique et d'autre part la stabilité linéaire des roll-waves dans un canal à fond plat. Ces deux problèmes ont une difficulté commune : la présence d'une infinité de chocs. Par un changement de variable, on fixe ces chocs : on se restreint alors à des fonctions C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{iL,\ i \in \mathbb{Z}\}$ pour un L donné. Dans un canal à fond périodique, on montre ainsi l'existence de roll-waves de petite amplitude dont la vitesse d'onde oscille autour d'une vitesse moyenne. Dans un canal à fond plat dont la pente est proche de 0, on peut montrer que les roll-waves sont linéairement stables. ***Pour citer cet article : P. Noble, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Existance and stability of roll-waves for the Saint Venant equations. Roll-waves are entropic travelling waves of the Saint Venant system with a source term. In this Note, we study two connected problems: on the one hand the existence of roll-waves in a channel with a periodic bottom, on the other hand the linear stability of roll-waves over a flat bottom. The main issue is due to the presence of an infinite number of shocks. With the help of a suitable change of variables, we can restrict our attention to C^1 functions on $\mathbb{R} \setminus \{iL,\ i \in \mathbb{Z}\}$. Then we prove the existence of small amplitude roll-waves with wavespeeds oscillating around an average velocity in a channel with a periodic bottom. For channels with a flat bottom, we show the linear stability of roll-waves when the slope is small enough. ***To cite this article: P. Noble, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Consider the Saint Venant equations augmented with a friction term

$$h_t + v_x = 0, \quad v_t + \left(G\frac{h^2}{2} + \frac{v^2}{h}\right)_x = Gh\big(\tan\theta + \epsilon b'(x)\big) - c_f\frac{v^2}{h^2}, \quad 0 \leqslant \epsilon \ll 1,$$

Adresse e-mail : noble@mip.ups-tlse.fr (P. Noble).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.03.019

where $G = g\cos(\theta)$, g is the gravity constant and b is a smooth, 1-periodic function. They describe a shallow water flow down an open inclined channel (with an average slope θ). The resistence effects due to the bottom are represented by c_f. This system can be derived from the Navier Stokes equations with a free surface in the long wavelength approximation [10,12]. When $\epsilon = 0$ and the uniform flow is unstable ($\sin\theta > 4c_f$), the system has roll-wave solutions (a travelling wave which is spatially periodic and piecewise regular) for any wavespeed $c > 0$ and wavelength $L > 0$ [4]. The discontinuities are entropic shocks which satisfy the Rankine Hugoniot relations and a Lax shock condition.

We first consider the existence of roll-wave in a channel with a nonflat bottom ($\epsilon \neq 0$). The Saint Venant system written with the Riemann invariants is equivalent to the p-system with a source term (4). System (4) is inhomogeneous: instead of roll-waves, we search for pulsating waves with shocks at position $c(t) + iL$, $i \in \mathbb{Z}$, where c satisfies $c(t+T) = c(t) + 1$ for a suitable T [2]. We write the system (4) with the Riemann invariants $r = v + \phi(u)$, $s = v - \phi(u)$ where $\phi'(x) = \sqrt{p'(x)}$ and search for small amplitude solutions around a steady state (r_0, s_0): $r(x,t) = r_0 + \epsilon R(\xi,\tau)$, $s(x,t) = r_0 + \epsilon S(\xi,\tau)$ [6]. Here $t = T\tau$, $\xi = \frac{x-c(t)}{\epsilon}$. The change of variable fixes the shocks and we search for solutions $R, S \in C^1((-1,1)\times\mathbb{T})$. The Rankine Hugoniot conditions either are integrated in the advection matrix or play the role of nonlinear boundary conditions. The system satisfied by R, S coupled with the boundary condition exhibits a fast/slow dynamic. We perform a Fenichel like analysis and prove the existence of an invariant graph $S = \mathcal{S}^\epsilon(R)$: given any $R \in C^1((-1,1)\times\mathbb{T})$, there exists a solution $\mathcal{S}^\epsilon(R)$ satisfying the equation on S and the boundary condition. Moreover, we can prove that $\mathcal{S}^\epsilon(R) = s(R)(\tau) + \mathrm{O}(\epsilon)$. The equation for R, at order 0 in ϵ is a Burgers equation of the form

$$R_\tau + \frac{p''(u_0)}{4p'(u_0)}\left(R - \frac{R(1,\tau)+R(-1,\tau)}{2}\right)R_\xi = \left(\frac{f'(u_0)}{\sqrt{p'(u_0)}} - 1\right)R + F(\tau),$$

where $u_0 = \phi^{-1}(\frac{r_0-s_0}{2})$ and F is 1-periodic. This equation has a particular roll-wave solution $R_0(\xi,\tau) = H(\xi) + G(\tau)$ with $H(\xi) = A\xi$ ($A > 0$ if $f'(u_0) > \sqrt{p'(u_0)}$) and G is periodic. The dissipativity in C^1 of the semi group generated by $\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$ allows us to find R by a Banach fixed point argument for $0 < \epsilon \ll 1$.

We then study the linear stability of a roll-wave over a flat bottom $(H, V, ct + iL)$ (H, V denotes the profile equation of the roll-wave in the area where it is smooth and $ct + iL$ are the positions of the shocks). One of the difficulties here is to give a rigorous notion of stability in the presence of an infinity of shocks. Following Majda's analysis of shock fronts linear stability in hyperbolic systems [7], we choose for the space of perturbations of the roll-wave the set of functions which decrease to 0 at infinity and piecewise C^1 on $\mathbb{R}\setminus\{X_i(t),\ i\in\mathbb{Z}\}$ for $X_i(t) = ct + iL + \epsilon_i(t)$ and $|\epsilon_i| \ll 1$. By mean of a continuous, piecewise affine change of variable $\xi = \xi(x,t)$ in Saint Venant equations, we fix *all* the shocks at points iL, $i \in \mathbb{Z}$. The roll-wave $(H, V, ct + iL)$ is now a steady solution of the (new) Saint Venant equations coupled with the Rankine Hugoniot conditions. Then we linearize the Saint Venant equations in the area where the perturbations are regular and the Rankine Hugoniot conditions around the roll-wave. We search for solutions with an exponential growth in time: $\delta h(\xi,t) = k(\xi)\exp(\lambda t)$, $\delta v(\xi,t) = w(\xi)\exp(\lambda t)$ et $\epsilon_i(t) = \varepsilon_i\exp(\lambda t)$. This yields the following spectral problem.

Find $\lambda \in \mathbb{C}$, $k, w \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{iL,\ i\in\mathbb{Z}\})$, $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$ *bounded, with* $\lim_{\xi\to\pm\infty}\|(k,w)(\xi)\| = 0$ *and*

$$(w - ck)' + \lambda k = \lambda\big(\varepsilon_i + F_{12}\big(H(\xi)\big)(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)\big)H',$$

$$\left(\left(GH - \frac{V^2}{H^2}\right)k + \left(\frac{2V}{H} - c\right)w\right)' + \lambda w = \left(G\tan\theta + \frac{2c_fV^2}{H^3}\right)k - \frac{2c_fV}{H^2}w + \frac{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i}{L}\left(\frac{GH^2}{2} + \frac{K^2}{H}\right)' + \lambda\big(\varepsilon_i + F_{12}\big(H(\xi)\big)(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)\big)V', \quad \forall\xi \in I_i = \big]iL, (i+1)L\big[, \tag{1}$$

$$[w - ck]_{iL} = \varepsilon_i\lambda[H]_{iL}, \qquad \left[\left(GH - \frac{V^2}{H^2}\right)k + \left(\frac{2V}{H} - c\right)w\right]_{iL} = \varepsilon_i\lambda c[H]_{iL}. \tag{2}$$

The differential system (1) is singular and possess an affine space of smooth functions on I_i which cannot be computed explicitely. For large wavelength, we can prove that (1), (2) has no unstable eigenvalues with large moduli. It is proved by computing asymptotic expansions with respect to $\frac{1}{|\lambda|}$ of the values of k, w at points iL. When $\theta \to 0$, we show that (1), (2) has no unstable eigenvalues. It is done by considering $\lambda = \mathrm{O}(\theta)$ and $\lambda = \mathrm{O}(1)$ unstable eigenvalues.

1. Roll-waves pour le système de Saint Venant : cas d'un canal à fond plat

Considérons le système de Saint Venant augmenté d'un terme de friction

$$h_t + v_x = 0, \quad v_t + \left(G\frac{h^2}{2} + \frac{v^2}{h}\right)_x = Gh\big(\tan\theta + \epsilon b'(x)\big) - c_f\frac{v^2}{h^2}, \quad 0 \leqslant \epsilon \ll 1, \tag{3}$$

où $G = g\cos(\theta)$, g étant la constante de gravité et b une fonction 1-périodique. Ces équations modélisent un écoulement de faible profondeur dans un canal incliné (de pente moyenne θ) rugueux (c_f représente la friction due aux parois et au fond). On peut dériver ce modèle à partir des équations de Navier Stokes à frontière libre dans la limite des grandes longueurs d'onde [10,12]. Pour $\epsilon = 0$ et lorsque le flot uniforme est instable ($F = \sin\theta c_f^{-1} > 4$), Dressler a montré l'existence d'une onde progressive entropique du système (3) appelée roll-wave de vitesse c, L-périodique en espace et C^1 par morceaux pour tout $c > 0$ et $L > 0$ [4]. Le profil continu $(h, v)(x,t) = (H, V)(\xi)$ où $\xi = x - ct$ vérifie

$$cH - V = K, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi} = \tan(\theta)\frac{H^2 + (H_0 - c^2/GF)H + H_0^2/F}{H^2 + H_0H + H_0^2} = P(H), \quad \forall\xi \in \left]iL, (i+1)L\right[.$$

La fonction H est définie implicitement par $H(\xi) = h \Leftrightarrow \xi = f(h)$ où f est une primitive de $\frac{1}{P}$. Les discontinuités sont des chocs entropiques vérifiant les conditions de Rankine Hugoniot $[V]_{iL} = c[H]_{iL}$, $[G\frac{H^2}{2} + \frac{V^2}{H}]_{iL} = c[V]_{iL}$ et une condition de choc de Lax $H^+ < H^-$ où H^- et H^+ désignent la valeur de H avant et après chaque discontinuité.

2. Roll waves de petite amplitude dans le p-système inhomogène

Pour simplifier l'étude, le système (3) est remplacé par le système suivant (p-système avec forçage périodique en espace) qui lui est équivalent quand il est écrit avec les invariants de Riemann [12]

$$u_t + v_x = 0, \quad v_t + \big(p(u)\big)_x = f(u) - v + \epsilon b'(x), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{4}$$

où p, f et b sont régulières, leurs premières dérivées sont globalement bornées et b est 1-périodique. Le milieu étant inhomogène, on cherche à la place des roll-waves, des ondes pulsatoires $(u, v)(x,t) = (\underline{u}, \underline{v})(x - c(t))$ où c vérifie la condition $c(t + T) = c(t) + 1$ pour un T à déterminer [2]. Les discontinuités vérifient les conditions de Rankine–Hugoniot

$$c'(t) = \frac{[p(u)]_-^+}{[v]_-^+} = \frac{[v]_-^+}{[u]_-^+}, \tag{5}$$

et une condition de choc de Lax $\sqrt{p'(u^+)} < c' < \sqrt{p'(u^-)}$.

Théorème 2.1. *Le système* (4) *écrit avec les invariants de Riemann* $r = v + \phi(u)$, $s = v - \phi(u)$ *(où* $\phi'(x) = \sqrt{p'(x)}$*) possède une solution entropique de type roll-wave sous la forme* $s(x,t) = s_0 + \epsilon S(t) + \mathrm{O}(\epsilon^2)$ *et* $r(x,t) = r_0 + \epsilon R(\xi, t, \epsilon)$, $\xi = \frac{x - c(t)}{\epsilon}$ *où* $R(\cdot,\cdot,\epsilon) \in C^1((-1,1) \times \mathbb{T})$*. De plus* $c(t) = c_\epsilon t + \epsilon c_1(T_\epsilon^{-1}t, \epsilon)$ *et* $R(\xi, t, 0) = A\xi + G(t)$, $\forall\xi \in]-1,1[$*, les fonctions* c_1, G *étant périodiques,* $A > 0$, $c_\epsilon = \sqrt{p'(u_0)} + \mathrm{O}(\epsilon)$ *et* $T_\epsilon^{-1} = \sqrt{p'(u_0)} + \mathrm{O}(\epsilon)$.

La preuve se décompose en trois étapes

1. *Réécriture* : Le système (4) avec les invariants de Riemann r, s s'écrit

$$r_t + \lambda(r,s)r_x = \epsilon b'(x) + Q(r,s), \qquad s_t - \lambda(r,s)s_x = \epsilon b'(x) + Q(r,s), \tag{6}$$

où $\lambda(r,s) = \sqrt{p' \circ \phi^{-1}(\frac{r-s}{2})}$ et $Q(r,s) = f \circ \phi^{-1}(\frac{r-s}{2}) - \frac{r+s}{2}$. On cherche des solutions de (6) de petite amplitude autour d'un état stationnaire (r_0, s_0) sous la forme $r(x,t) = r_0 + \epsilon R(\xi,\tau)$, $s(x,t) = s_0 + \epsilon S(\xi,\tau)$ où $t = T\tau$ et $\xi = \frac{x-c(t)}{\epsilon}$ [6]. Le changement de variable spatial fixe les chocs et on cherche $R, S \in C^1((-1,1)\times\mathbb{T})$ et prolongées périodiquement en espace. Les relations (5) sont intégrées dans la matrice d'advection ou bien jouent le rôle d'une condition aux bords. Le problème se formule uniquement avec les inconnues R et S. En choisissant $\sqrt{p'(u_0)} = 1$, le système final s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} &R_\tau + P_1(R,S,\epsilon)R_\xi = Q_0(R,S,\epsilon) + \epsilon Q_1(R,S,\epsilon),\\ &S_\tau - \frac{2}{\epsilon}\big(1 + \epsilon P_2(R,S,\tau,\epsilon)\big)S_\xi = Q_0(R,S,\epsilon) + \epsilon Q_2(R,S,\epsilon), \end{aligned}\right. \quad \forall(\xi,\tau) \in (-1,1)\times\mathbb{T}. \tag{7}$$

$$S(1,\tau) = S(-1,\tau) + \mathrm{O}(\epsilon), \quad \forall \tau \in \mathbb{T}, \tag{8}$$

où $Q_0(R,S,\epsilon)(\xi,\tau) = AR(\xi,\tau) - (A+1)S(\xi,\tau) + b'(\epsilon\xi + \tau + \epsilon h(\tau,\epsilon))$, $A = \frac{1}{2}(f'(u_0)/\sqrt{p'(u_0)} - 1)$ et

$$P_1(R,S,\epsilon) = \frac{p''(u_0)}{4}\left(\left(R - \frac{R(1,\tau)+R(-1,\tau)}{2}\right) - \left(S - \frac{S(1,\tau)+S(-1,\tau)}{2}\right)\right) + \mathrm{O}(\epsilon).$$

La fonction h dépend de $R(\pm1,\tau)$ et $S(\pm1,\tau)$ et les fonctions P_i, Q_i sont régulières. La dénomination « $\mathrm{O}(\epsilon)$ », utilisée pour alléger les notations, désigne des fonctions régulières en les variables R, S.

2. *Analyse lente/rapide* : Le paramètre $\epsilon \ll 1$ induit une dynamique lente/rapide sur le système (7), (8). Une analyse à la Fenichel [5,1] permet de mettre en évidence un graphe invariant.

Lemme 2.2. *Soient $R \in C^1((-1,1)\times\mathbb{T})$ et s_1, s_2 solutions* 1*-périodiques des équations $s_1' - Bs_1 = -b'(\tau)$, $s_2' + Bs_2 = \frac{A}{2}\int_{-1}^{1} R(u,\tau)\,\mathrm{d}u$. Alors il existe une fonction $S^\epsilon \in C^1((-1,1)\times\mathbb{T})$, vérifiant la deuxième équation de* (7) *et la condition aux bords* (8)*, et telle que $S^\epsilon(\xi,\tau) = s_1(\tau) + s_2(\tau) + \mathrm{O}(\epsilon)$.*

En injectant $S = s_1(\tau) + s_2(\tau) + \mathrm{O}(\epsilon)$ dans la première équation de (7), la dynamique réduite sur ce graphe est donnée par

$$R_\tau + \frac{p''(u_0)}{4}\left(R - \frac{R(1,\tau)+R(-1,\tau)}{2} + \epsilon\mathcal{F}^\epsilon(R)\right)R_\xi = AR + F(\tau) + \epsilon\mathcal{G}^\epsilon(R), \tag{9}$$

où $F(\tau) = -B(s_1(\tau) + s_2(\tau)) + b'(\tau)$ et $\mathcal{F}^\epsilon$, $\mathcal{G}^\epsilon$ sont régulières.

3. *Analyse de* (9) : A l'ordre 0 en ϵ, l'équation (9) est une équation de Burgers qui possède des solutions roll-wave : $R_0(\xi,\tau) = H(\xi) + G(\tau)$ où H est 2-périodique, $H(\xi) = \frac{4A}{p''(u_0)}\xi$ pour $\xi \in (-1,1)$ et G solution 1 périodique de $G' + G = -Bs_1 - s_1'$. C'est une solution entropique vérifiant les conditions de chocs de Lax $R^+ < R^-$ pourvu que $A > 0$. Pour $\epsilon \neq 0$, on recherche une solution de (9) sous la forme $R = R_0 + \epsilon w$. La fonction w vérifie une équation du type

$$w_\tau + A\big(\xi + \epsilon\mathcal{K}^\epsilon(\xi,w)\big)w_\xi = \mathcal{L}^\epsilon(R + \epsilon w) + A\frac{w(-1,\tau)+w(1,\tau)}{2} - Bs(w)(\tau), \tag{10}$$

où $\mathcal{K}^\epsilon$, $\mathcal{L}^\epsilon$ sont des fonctions régulières et $s(w)$ solution 1-périodique de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} + Bs = \frac{A}{2}\int_{-1}^{1} w(x,\tau)\,\mathrm{d}x$. La fonction w apparaît alors comme un point fixe de l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: C\big(\mathbb{T}, C^1(-1,1)\big) &\to C\big(\mathbb{T}, C^1(-1,1)\big)\\ z &\to \mathcal{H}(z) = w, \quad w \text{ solution de } w_\tau + \mathbb{L}_z^\epsilon w = \mathcal{L}^\epsilon(R + \epsilon z)(\tau,\cdot), \end{aligned}$$

où $\mathbb{L}_z^\epsilon w = Bs(w) - A\frac{w(1)+w(-1)}{2} + A(\xi + \epsilon\mathcal{K}^\epsilon(\xi,z))w_\xi$. L'opérateur $\mathbb{L}_z^\epsilon$ est défini sur $\mathbb{X} = C^1(-1,1)$. En combinant une estimation sur les caractéristiques avec le caractère dissipatif dans $\mathbb{X}$ du semi groupe engendré par $\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$, on obtient les estimations sur le semi groupe $\exp -\tau\mathbb{L}_z^\epsilon$:

$$\begin{aligned}&\big\|w(\tau,\cdot) - \epsilon K(w_0,z)\big\|_\infty \leqslant \|w_0\|_{\mathbb{X}} \exp -\alpha(\epsilon,u_0,z)\tau,\\ &\big\|w_\xi(\tau,\cdot)\big\|_\infty \leqslant \|w_0\|_{\mathbb{X}} \exp -A\big(1-\epsilon C\big(\|z\|_{\mathbb{X}}\big)\big)\tau,\end{aligned} \tag{11}$$

où $\alpha(\epsilon, w_0, z) = \min(1, A(1 - \epsilon C(\|z\|_{\mathbb{X}}))) > 0$. Les inégalités (11) impliquent que $\mathcal{H}$ est contractant pour ϵ suffisamment petit et possède donc un point fixe. L'Éq. (9) possède donc une solution $R \in C^1((-1,1)\times\mathbb{T})$ telle que $R = R_0 + \mathrm{O}(\epsilon)$ et qui vérifie aisément la condition de choc de Lax $R^+ < R^-$. On obtient ainsi une solution de type roll-wave des équations de Saint Venant avec une vitesse de propagation oscillant autour d'une vitesse moyenne ce qui traduit l'influence de la modulation spatiale b.

3. Stabilité linéaire des roll-waves dans un canal à fond plat

Le problème de la stabilité des roll-waves, bien que classique, a été peu traité [11]. Considérons la roll-wave de Dressler de vitesse d'onde c, de longueur d'onde L. Une des difficultés essentielles de l'analyse de stabilité est dûe à la présence d'une infinité de chocs. S'inspirant du cadre introduit par Majda [7] pour l'étude de la stabilité des chocs simples, on se place dans un espace de fonctions C^1 par morceaux avec des discontinuités proches des chocs de la roll-wave. On choisit donc comme espace de perturbations de la roll-wave, l'ensemble des fonctions décroissantes vers 0 à l'infini, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}\setminus\{X_i(t),\ i\in\mathbb{Z}\}$ où $X_i(t) = ct + iL + \epsilon_i(t)$ et $|\epsilon_i| \ll 1$. Dans cet espace de fonctions, un changement de variable spatial $\xi = \xi(x,t)$ dans les équations de Saint Venant, continu, affine par morceaux et tel que $\xi(X_i(t),t) = iL$ fixe toutes les discontinuités aux points $\{iL,\ i\in\mathbb{Z}\}$. Les conditions de Rankine Hugoniot sont inchangées mais exprimées aux points iL. Dans ces nouvelles coordonnées, la roll-wave de Dressler $(H, V, ct + iL)$ est une solution stationnaire du système de Saint Venant couplé aux conditions de Rankine Hugoniot. En considérant des perturbations à croissance exponentielle en temps : $\delta h(\xi,t) = k(\xi)\exp(\lambda t)$, $\delta v(\xi,t) = w(\xi)\exp(\lambda t)$ et $\epsilon_i(t) = \varepsilon_i \exp(\lambda t)$, les équations de Saint Venant linéarisées couplées aux conditions de Rankine Hugoniot linéarisées autour de la roll-wave conduisent au problème spectral suivant

Trouver $\lambda\in\mathbb{C}$, $k, w \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{iL,\ i\in\mathbb{Z}\})$, $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$ *bornée tel que* $\lim_{\xi\to\pm\infty}\|(k,w)(\xi)\| = 0$ *et*

$$(w - ck)' + \lambda k = \lambda\big(\varepsilon_i + F_{12}\big(H(\xi)\big)(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)\big)H',$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(GH - \frac{V^2}{H^2}\right)k + \left(\frac{2V}{H} - c\right)w\right)' + \lambda w = \left(G\tan\theta + \frac{2c_f V^2}{H^3}\right)k - \frac{2c_f V}{H^2}w + \frac{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i}{L}\left(\frac{GH^2}{2} + \frac{K^2}{H}\right)'\\ &\quad + \lambda\big(\varepsilon_i + F_{12}\big(H(\xi)\big)(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)\big)V', \quad \forall \xi \in \big]iL, (i+1)L\big[;\end{aligned} \tag{12}$$

$$[w - ck]_{iL} = \varepsilon_i\lambda[H]_{iL}, \qquad \left[\left(GH - \frac{V^2}{H^2}\right)k + \left(\frac{2V}{H} - c\right)w\right]_{iL} = \varepsilon_i\lambda c[H]_{iL}. \tag{13}$$

La fonction F_{12} est définie par $F_{12}(h) = \frac{f(h)-f(H_1)}{f(H_2)-f(H_1)}$ où H_1 et H_2 désignent respectivement la hauteur minimale et la hauteur maximale de la roll wave.

Le système différentiel (12) est singulier aux points $\xi_i^0 \in]iL, (i+1)L[$ tel que $H(\xi_i^0) = H_0$ (où $gH_0^3 = K^2$). Il possède une droite de solutions analytiques sur chaque intervalle $]iL, (i+1)L[$ qu'on ne sait pas calculer explicitement. Pour aller plus loin, on étudie plusieurs asymptotiques.

Dans la limite des grandes longueurs d'onde, on peut montrer que le problème spectral ne possède pas de valeurs propres instables de grand module. Le théorème suivant, d'intérêt indépendant, est une étape importante dans l'obtention d'estimations résolvantes.

Théorème 3.1. *Il existe deux fonctions r_1 et r_2, croissantes, et L_0 tel que pour tout (λ, L) vérifiant* $\mathrm{Re}(\lambda) > r_1(L)$ *ou $L > L_0$ et* $\mathrm{Im}(\lambda) > r_2(L)$ $(|\mathrm{Re}(\lambda)| \leqslant M)$, *$\lambda$ n'est pas valeur propre du problème spectral* (12), (13)*.*

Pour montrer ce résultat, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des valeurs propres instables de module arbitrairement grand. Une analyse de type WKB donne un développement asymptotique des solutions analytiques de (12) sur $]iL, (i+1)L[$. La contradiction vient des conditions de Rankine Hugoniot linéarisées (13). L'axe des imaginaires purs ne joue pas ici de rôle particulier comme c'est le cas par exemple en détonique [3].

On s'intéresse alors à la stabilité linéaire des roll-waves dans la limite $\tan(\theta) \to 0$. L'étude se scinde en deux parties :

- valeurs propres en $\mathrm{O}(\theta)$: le changement d'échelle $\lambda = \bar{\lambda}\theta$ donne un problème spectral sans valeurs propres $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) \geqslant 0$ pour $\theta = 0$. On conclut avec le théorème de Rouché pour $\theta \neq 0$;
- valeurs propres en $\mathrm{O}(1)$: du Théorème 3.1, on déduit que (12), (13) n'a pas de solution quand $\lambda = \mathrm{O}(1)$ et $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ pour θ assez petit.

Théorème 3.2. *Il existe $\theta_0 > 0$ tel que pour $0 < \theta < \theta_0$, les roll-waves sont linéairement stables.*

Les résultats présentés ici seront développés dans deux articles en cours de rédaction [8,9].

Références

[1] P.W. Bates, K. Lu, C. Zeng, Existence and persistence of invariant manifold for semi flow in Banach spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 135 (645) (1998).

[2] H. Berestycki, F. Hamel, Front propagation in periodic excitable media, Comm. Pure Appl. Math. 55 (8) (2002) 949–1032.

[3] A. Bourlioux, A.J. Majda, V. Roytburd, Theoretical and numerical structure for unstable one-dimensional detonations, SIAM J. Appl. Math. 51 (2) (1991) 303–343.

[4] R. Dressler, Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels, CPAM (1949) 149–190.

[5] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, J. Differential Equations 31 (1979) 53–98.

[6] S. Jin, M.A. Katsoulakis, Hyperbolic systems with supercharacteristic relaxations and roll waves, SIAM J. Appl. Math. 61 (2000) 273–292, (electronic).

[7] A. Majda, The stability of multidimensional shock fronts, Mem. Amer. Math. Soc. 275 (1983).

[8] P. Noble, On the linear stability of roll-waves, Preprint Univ. Toulouse III, 2004.

[9] P. Noble, Roll-waves in inclined channels with a periodic bottom, Preprint Univ. Toulouse III, 2004.

[10] B. Perthame, Derivation of viscous Saint Venant equations for laminar shallow water and numerical validation, Discrete Continuous Dynamical Systems B 1 (2001) 44–60.

[11] K. Tamada, H. Tougou, Stability of roll-waves on thin laminar flow down an inclined plane wall, J. Phys. Soc. Japan 47 (6) (1979) 1992–1998.

[12] J.P. Vila, Sur la théorie et l'approximation numérique des problèmes hyperboliques non lineaires. Application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense, Thèse Univ. Paris VI.