Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 787–792

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie analytique

Sur la transformation d'Abel–Radon de courants localement résiduels

Bruno Fabre

22, rue Emile Dubois, 75014 Paris, France

Reçu le 5 janvier 2004 ; accepté après révision 2 mars 2004

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Henkin et Passare ont démontré le théorème suivant : soit ω une q-forme méromorphe ($q > 0$) sur un sous-ensemble analytique Y de codimension pure p d'un ouvert linéairement p-concave $U \subset \mathbb{P}_N$; si la transformation d'Abel–Radon $\mathcal{A}(\omega \wedge [Y])$, qui est méromorphe sur $U^* \subset G(p,N)$, se prolonge méromorphiquement dans un domaine $\widetilde{U}^*$ contenant U^*, alors Y se prolonge en un sous-ensemble analytique $\widetilde{Y}$ du domaine $\widetilde{U}$, et ω en une forme méromorphe sur $\widetilde{Y}$. Le problème est de démontrer l'énoncé analogue, lorsqu'on remplace le courant $\omega \wedge [Y]$ par un courant α de bidegré $(q+p,p)$, $0 < q \leqslant N-p$, de type plus général, appelé *localement résiduel*. Nous donnons la solution pour $p=1$, et $q = N-p$, ou q quelconque si $\mathcal{A}(\alpha) = 0$. On donne pour terminer une application de ce théorème. ***Pour citer cet article : B. Fabre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

On the Abel–Radon transform of locally residual currents. The aim of this Note is to give a generalisation of the following theorem of Henkin and Passare: let Y be an analytic subvariety of pure codimension p in a linearly p-concave domain U, and ω a meromorphic q-form ($q > 0$) on it; if the Abel–Radon transform $\mathcal{A}(\omega \wedge [Y])$, which is meromorphic on U^*, has a meromorphic prolongation to $\widetilde{U}^*$, then Y extends to an analytic subvariety of $\widetilde{U}$, and ω to a meromorphic form on it. The problem is to show the analogous statement when we replace $\omega \wedge [Y]$ by a current α of a more general type, called *locally residual*. We give the proof if α is of bidegree $(N,1)$, or $(q+1,1)$, $0 < q < N$ in the particular case where $\mathcal{A}(\alpha) = 0$. We conclude with some applications of the theorem. ***To cite this article: B. Fabre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

Let us recall the definition of Abel–Radon transform of a current, which generalize the one given in [5] and [6]. Let U be a linearly p-concave domain of $\mathbb{P}_N$ (i.e., union of p-planes). We denote by U^* the open subset of $G(p,N)$, the Grassmannian of p-planes, corresponding to the p-planes contained in U. Let $I_U \subset U^* \times U$ be

Adresse e-mail : bruno.fabre9@wanadoo.fr (B. Fabre).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.03.008

the incidence variety, with the two natural projections $p_1 : I_U \to U^*$ and $p_2 : I_U \to U$. If α is a current on U, since $p_2 : I_U \to U$ is a submersion, $p_2{}^*(\alpha)$ is a well-defined current on I_U; and since $p_1 : I_U \to U^*$ is proper, we can define the *Abel–Radon transform* of α as: $\mathcal{A}(\alpha) := p_{1*}(p_2^*(\alpha))$. Now let us recall what is a locally residual current on some analytic manifold X. A current α of bidegree (p, q) on X is said to be locally residual if for any $x \in X$ there exists an open neighborhood U_x of x, some holomorphic functions $f_1, \ldots, f_p, g$ on U_x such that $\{f_1 = \cdots = f_p = g\}$ is of pure codimension $p + 1$ on U_x, and an holomorphic q-form ψ on U_x, such that $\alpha_{|U_x} = [\psi/g] \wedge \bar\partial[1/f_1] \wedge \cdots \wedge \bar\partial[1/f_p]$. Here $[\omega]$ is the principal value of the meromorphic form ω, and the wedge product can be shown to be well-defined (cf. [10,11,9,1]).

Let U be a linearly 1-concave domain of $\mathbb{P}_N$.

Theorem 0.1. *Let α be a locally residual current of bidegree $(q + 1, 1)$, $0 < q < N$ in U. Then $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ if and only if α extends to $\mathbb{P}_N$ as a $\bar\partial$-closed locally residual current.*

This theorem can be considered as a variant of the direct and inverse Abel theorems of [5] and [8] for the case of 'non-reduced' analytic subvarieties. The proof uses essentially the result of [4] which says that if $\mathcal{A}(\psi) = 0$, and ψ is smooth $\bar\partial$-closed, then $\psi = \bar\partial\phi$ for a smooth ϕ on U, provided that U has some good topological property.

Theorem 0.2. *Let α be a locally residual current of bidegree $(N, 1)$ on U. If $\mathcal{A}(\alpha)$ extends meromorphically to some domain $\widetilde{U}^*$ containing U^*, then α extends to $\widetilde{U}$ as a locally residual current.*

The proof is based on several lemmas, studying the link between a locally residual current α of bidegree $(n + 1, 1)$ on some domain $D \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, D some domain in $\mathbb{C}^n$, with p-proper support (with $p : D \times \mathbb{C} \to D$ the natural projection) and 'traces' $v_k(x)\,\mathrm{d}x := p_*(\alpha y^k)$. In particular we prove that if all the v_ks extend meromorphically to some greater domain $\widetilde{D}$, then α extends to $\widetilde{D} \times \mathbb{C}$ as a locally residual current.

We give the following application of the preceding theorem:

Corollary 0.3. *If α is a locally residual current of bidegree $(N, 1)$ in a domain $U \subset \mathbb{P}_N$ containing a $\mathbb{P}_2$, then α extends in a unique way to the whole $\mathbb{P}_N$ as a locally residual current. Moreover, the extension is $\bar\partial$-closed if and only if α is $\bar\partial$-closed.*

1. Théorèmes principaux

Soit U un ouvert linéairement p-concave de $\mathbb{P}_N$ (i.e. réunion de p-plans); on note U^* l'ouvert de $G(p, N)$ correspondant aux p-plans contenus dans U. Si $I_U \subset U^* \times U$ est la variété d'incidence, avec $p_1 : I_U \to U^*$ et $p_2 : I_U \to U$ les projections naturelles, on définit pour tout courant α sur U sa transformation d'Abel–Radon $\mathcal{A}(\alpha) := p_{1*}(p_2^*(\alpha))$ (les opérations sont bien définies du fait que p_1 est propre et p_2 est une submersion).

Définition 1.1. Sur une variété analytique X, un courant α de bidegré (q, p) est dit localement résiduel (on notera l.r.), si au voisinage de tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x, et $p + 1$ fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p, g$ sur U_x, telles que $\{f_1 = \cdots = f_p = g = 0\}$ est de codimension pure $p+1$, et une q-forme holomorphe ψ sur U_x, telles que $\alpha_{|U_x} = [\psi/g] \wedge \bar\partial[1/f_1] \wedge \cdots \wedge \bar\partial[1/f_p]$.

Dans la définition précédente, on note $[\omega]$ le courant *valeur principale* associé à une forme méromorphe ω (cf. [10]). Pour l'existence du produit dans la définition précédente, cf. [9,11], ou [1]. On peut aussi définir un courant l.r. de la manière suivante : un courant de bidegré (q, p) est dit l.r. si pour tout point x on peut trouver un voisinage ouvert U_x de x dans lequel il s'écrit sous la forme $1/g\bar\partial\beta$, avec β résiduel de bidegré $(q, p - 1)$, et g une fonction holomorphe coupant le support de β proprement.

Le résultat suivant est obtenu dans [3] :

Théorème 1.2. *Soit α un courant de bidegré $(q+1,1)$, $0<q<N$, l.r., $\bar\partial$-fermé sur U. $\mathcal{A}(\alpha)=0$ si et seulement si α se prolonge à $\mathbb{P}_N$ en un courant $\bar\partial[\psi]$, avec ψ une $(q+1)$-forme rationnelle.*

Démonstration. Considérons une droite D contenue dans U. Alors, soit U_D un voisinage ouvert de D, contenu dans U, et vérifiant la propriété suivante : il existe une section continue : $s: U_D \to G(1,N)$, $x \in s(x) \subset U_D$. On peut prendre par exemple U_D de la forme $|x_0|^2+\cdots+|x_{N-2}|^2<\epsilon(|x_{N-1}|^2+|x_N|^2)$, où D a pour équation $x_0=\cdots=x_{N-2}=0$. Alors, d'après [4], pour toute forme lisse ϕ de bidegré $(q+1,1)$, $\mathcal{A}(\phi)=0$ et $\bar\partial\phi=0$ impliquent $\phi=\bar\partial\psi$, pour quelque $(q+1)$-forme lisse ψ. Soit ϕ une forme lisse de bidegré $(q+1,1)$ telle que $\alpha=\phi+\bar\partial\beta$ sur U, pour un certain courant β sur U. Alors, on a $\mathcal{A}(\phi)=0$, donc $\phi=\bar\partial\psi$, et $\alpha=\bar\partial(\psi+\beta)$.

Soit Y le support de α. Alors, $\gamma:=\psi+\beta$ est de bidegré $(q+1,0)$, et $\bar\partial$-fermé en dehors de Y. Il est donc représenté sur $U-Y$ par une $(q+1)$-forme holomorphe ω. Soit x un point de Y, et f_x une fonction holomorphe dans un voisinage U_x de x tel que $Y\cap U_x\subset\{f_x=0\}$. Si N est tel que $f_x^N\alpha=0$, on a $\bar\partial f_x^N\gamma=0$ sur U_x, et donc $f_x^N\omega$ se prolonge holomorphiquement à U_x. Soit ω' l'extension méromorphe de ω sur U_D. Par hypothèse, α est l.r., donc $\alpha=\bar\partial[\omega']$ sur U_D. Enfin, si l'on décompose $\omega'=\sum_{|I|=q+1}\omega_I\,\mathrm{d}x^I$, où les x_i sont des coordonnées affines sur $\mathbb{P}_N$, on obtient, comme d'après [2] les fonctions méromorphes ω_I sur U_D se prolongent en fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}_N$ (U_D est pseudoconcave au sens d'Andreotti), que ω' se prolonge en une forme rationnelle $\widetilde{\omega}$. Soit $\tilde\alpha:=\bar\partial[\widetilde{\omega}]$. Ainsi $\tilde\alpha-\alpha$ est un courant l.r. nul sur U_D, donc également sur U. En effet, si le support sur U était non vide, ce serait une hypersurface analytique fermée, rencontrant toutes les droites de U et en particulier de U_D en un même nombre de points. Le courant $\tilde\alpha$ est donc bien un prolongement de α à $\mathbb{P}_N$. □

Théorème 1.3. *Soit α un courant l.r. de bidegré $(N,1)$ dans U. On suppose que $\mathcal{A}(\alpha)$ se prolonge méromorphiquement dans un domaine $\widetilde{U}^*$. Alors α se prolonge à $\widetilde{U}$ comme courant l.r.*

Ce théorème donne pour $N=2$ la solution d'un problème formulé dans [7], p. 482.

On a besoin pour la démonstration des lemmes suivants, qui permettent de reconstruire un courant l.r. à partir de ses traces. Soit α un courant l.r. de bidegré $(n+1,1)$ sur $D_x\times\mathbb{C}_y$, avec $D\subset\mathbb{C}^n$ un domaine de $\mathbb{C}^n$. On note $p: D\times\mathbb{C}\to D$ la projection canonique. On suppose que la restriction de p au support de α (noté Y) est propre. Alors, on pose pour tout entier k : $v_k(x)\,\mathrm{d}x:=p_*(\alpha y^k)$, avec $\mathrm{d}x:=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$. On note que $v_k(x)$ est une fonction méromorphe sur D. Pour tout $x\in D$, comme $p_{|Y}$ est propre, $p^{-1}(x)\cap Y$ est fini. On note $(x,y_i(x))$ les différents points de $p^{-1}(x)\cap Y$. Soit $F(x,y)=y^d+a_1(x)y^{d-1}+\cdots+a_d(x)$, avec a_i des fonctions holomorphes de x sur D, telles que $F\alpha=0$. On sait qu'une telle fonction F existe, car Y peut être définie par une fonction G de cette forme, et une puissance de G annule α. On suppose de plus que l'on a choisi d minimal. Alors on a :

Lemme 1.4. *Pour tout $k\geqslant d$, on a :*

$$v_k(x)+a_1(x)v_{k-1}(x)+\cdots+a_d(x)v_{k-d}(x)=0.$$

Démonstration. On considère l'équation $F\alpha y^{k-d}=0$. Si l'on prend son image directe par p, compte tenu du fait que $p_*(a(x)\alpha)=a(x)p_*(\alpha)$, on obtient : $(v_k+a_1(x)v_{k-1}(x)+\cdots+a_d(x)v_{k-d}(x))\,\mathrm{d}x=0$. □

Lemme 1.5. *Si $p_*(\alpha y^k)=0$ pour tout entier $k\geqslant 0$, alors $\alpha=0$.*

Démonstration. L'énoncé est local. Soit D_{x_0} un voisinage de Stein de $x_0\in D$, au-dessus duquel α s'écrit $\mathrm{res}_{P=0}\,\rho\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y/Pg$, avec ρ, P, g holomorphes. Alors $p_*(\alpha y^k)$ sur D_{x_0} s'écrit $(\sum_i \mathrm{Res}_{y_i(x)}\,\rho y^k\,\mathrm{d}y/Pg)\,\mathrm{d}x$. Si la somme est nulle pour tout k et tout x, alors, la fonction ρ/Pg n'a pas de pôle aux points $y_i(x)$, donc pas de pôle sur $P=0$, et α est nulle. □

Lemme 1.6. *Pour $x \in D$ fixé, la somme $\sum_{n\geqslant 0} v_n(x)/y^n$ converge pour $|y| > \max_i |y_i(x)|$. Il existe sur $D \times \mathbb{C}$ une unique fonction méromorphe $V(x,y)$, qui vérifie, pour tout $x \in D$, $V(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} v_n(x)/y^n$ pour $|y| > \max_i |y_i(x)|$. Cette fonction V égale*

$$\frac{y^{d-1}v_0(x) + y^{d-2}(v_1(x) + a_1(x)v_0(x)) + \cdots + (v_{d-1}(x) + \cdots + a_{d-1}(x)v_0(x))}{F(x,y)}$$

et

$$\alpha = \mathrm{res}_{F=0}\, V(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Démonstration. Considérons la somme $\sum_{n\geqslant 0} v_n(x)/y^n$. Soit $R(x) := \max_i |y_i(x)|$. On trouve $|v_k(x)|^{1/k} \to R(x)$ lorsque k tend vers l'infini. D'après Cauchy–Hadamard, la somme converge uniformément sur tout compact de $|y| > R(x)$. Lorsqu'on mutiplie par F, on trouve, en utilisant les relations du Lemme 1.4, que la somme vaut en fait

$$V(x,y) := \frac{y^{d-1}v_0(x) + y^{d-2}(v_1(x) + a_1(x)v_0(x)) + \cdots + (v_{d-1}(x) + \cdots + a_{d-1}(x)v_0(x))}{F(x,y)}.$$

Soit $\beta := \mathrm{res}_{F=0}\, V(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Un calcul de résidus montre que pour tout k,

$$p_*\big(\beta y^k\big) = \left(\sum_i \mathrm{Res}_{y_i(x)}\, V(x,y)y^k\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = v_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'après le Lemme 1.5, on en déduit $\alpha = \beta$. $\square$

Corollaire 1.7. *Si pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant d-1$, $p_*(\alpha y^k)$ est nul* (*resp. holomorphe*), *alors $\alpha = 0$* (*resp.* $\bar\partial\alpha = 0$).

Démonstration. On a vu ci-dessus qu'on pouvait calculer α à partir de $v_0, \ldots, v_{d-1}$ et F. Si $v_0, \ldots, v_{d-1}$ sont nuls (resp. holomorphes), alors α est aussi nul (resp. $\bar\partial$-fermé). $\square$

Lemme 1.8. *Considérons la matrice $M(x) := (v_{i+j}(x))_{0\leqslant i\leqslant d-1,\, 0\leqslant j\leqslant d-1}$. Alors $\det(M(x))$ n'est pas identiquement nul.*

Démonstration. Supposons que le déterminant est nul. Alors, on a une relation linéaire entre les colonnes de la matrice, à coefficients dans le corps des fonctions méromorphes sur D : $l_1(x)v_i(x) + l_2(x)v_{i+1}(x) + \cdots + l_d(x)v_{i+d-1}(x) = 0$ $(0 \leqslant i \leqslant d-1)$. Mais alors, multiplions la i-ème équation par $a_{d-i}(x)$ et additionnons. On obtient, grâce aux relations du Lemme 1.4 : $l_1(x)v_d(x) + l_2(x)v_{d+1}(x) + \cdots + l_d(x)v_{2d-1}(x) = 0$. On obtient de la même manière, pour tout entier k : $l_1(x)v_k(x) + l_2(x)v_{d+1}(x) + \cdots + l_d(x)v_{k+d-1}(x) = 0$. Cela peut s'écrire aussi de la manière suivante : $p_*((l_1(x) + l_2(x)y + \cdots + l_d(x)y^{d-1})\alpha y^k) = 0$ pour tout entier k. D'après le corollaire précédent, cela implique $(l_1(x) + l_2(x)y + \cdots + l_d(x)y^{d-1})\alpha = 0$. Mais cela est impossible, car on a supposé ci-dessus d minimal. Donc le déterminant est non nul. $\square$

Lemme 1.9. *Si pour tout n, $v_n(x)$ se prolonge méromorphiquement dans un domaine $\widetilde{D} \subset \mathbb{C}^n$ contenant D, alors F et $V(x,y)$ se prolongent méromorphiquement dans $\widetilde{D} \times \mathbb{C}$, et α s'y prolonge également comme courant l.r.*

Démonstration. On considère le système linéaire $v_k(x) + a_1(x)v_{k-1}(x) + \cdots + a_d(x)v_{k-d}(x) = 0$ $(d \leqslant k \leqslant d-1)$. Si l'on considère les a_i comme des inconnues, le système admet une unique solution, car le déterminant est non nul. Donc les a_i admettent un prolongement à $\widetilde{D}$, donc aussi F, soit $\widetilde{F}$, et V, soit $\widetilde{V}$. Alors, le courant résiduel $\tilde\alpha := \mathrm{res}_{\widetilde{F}=0}\, \widetilde{V}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ est un prolongement de α sur $\widetilde{D} \times \mathbb{C}$. $\square$

Lemme 1.10. *Soit Y une hypersurface analytique de $D \times \mathbb{C}$, telle que la restriction de p à Y est propre. Soit X une hypersurface analytique de Y. Soit $H := p(X)$. Soit α un courant l.r. sur $(D - H) \times \mathbb{C}$, de support $Y - X$. On* *suppose que les $v_0, \dots, v_{d-1}$ (introduits ci-dessus) se prolongent méromorphiquement à D. Alors, α, qui définit un courant l.r. sur $D \times \mathbb{C} - X$, se prolonge de manière unique à travers X en courant l.r.*

Démonstration. Considérons la forme $\psi := V(x, y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ définie ci-dessus, qui est telle que $\alpha = \mathrm{res}_{F=0}\psi$ sur $(D - H) \times \mathbb{C}$. D'après l'hypothèse, ψ se prolonge méromorphiquement en $\tilde{\psi}$ sur $D \times \mathbb{C}$, et $\tilde{\alpha} = \mathrm{res}_{F=0}\tilde{\psi}$ est un prolongement de α. En enlevant une éventuelle composante verticale, on obtient un prolongement de α à travers X dans $D \times \mathbb{C}$ comme courant l.r. Le prolongement est unique car X est de codimension 2. □

Démonstration du théorème. Choisissons un hyperplan à l'infini, et un système de coordonnées affines $(x_1, \dots, x_n, y)$, tel que l'hyperplan à l'infini coupe le support de α proprement, et une carte associée (a, b) sur la grassmannienne $G(1, N)$ en prenant pour les droites des équations de la forme $l_i = a_i y + b_i - x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Le lemme ci-dessous donne une expression explicite de la transformation d'Abel–Radon d'un courant l.r. α de bidegré $(N, 1)$ sur U :

Lemme 1.11.

$$\mathcal{A}(\alpha) := \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} v_{\mathrm{card}(I)(a,b)\,\mathrm{d}a^I \wedge \mathrm{d}b^{I^c}},$$

avec $v_k(a,b) := \sum_{P_i(a,b)} \mathrm{Res}_{P_i}(\alpha y^k / l_1 \cdots l_n)$, où les P_i sont les différents points d'intersection de la droite $\Delta_{a,b}$ avec le support de α, et $\mathrm{Res}_{P_i}(\alpha / l_1 \cdots l_n) := \mathrm{Res}_{P_i}(\mathbb{P}si_i / f_i l_1 \cdots l_n)$ est le résidu ponctuel de Grothendieck, si $\alpha = \mathrm{res}_{f_i=0}\mathbb{P}si_i / f_i$ au voisinage de P_i.

Démonstration. Cela provient de l'expression du courant $\mathcal{A}(\alpha)$ comme image directe, par la projection standard $p_1 : U^* \times U \to U^*$, du courant l.r. $\mathrm{res}_{l_1=\dots=l_n=0}\, \alpha \wedge \mathrm{d}l_1/l_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}l_n/l_n$. □

Notons que pour tout k, $v_k(a, b)$ est méromorphe sur U^*, puisque c'est le coefficient de $\mathrm{d}b_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}b_n$ dans $\mathcal{A}(\alpha y^k)$.

On pose $D_a := \{b, (a, b) \in U^*\}$ et $\widetilde{D}_a := \{b, (a, b) \in \widetilde{U}^*\}$. On pose $p_a(x, y) := (x_i - ay)_i$.

Lemme 1.12. $\mathcal{A}(\alpha)_{|\{a\} \times D_a} = p_{a*}(\alpha)$.

Démonstration. Soit $I_{U,a} := I_U \cap \{a = Cte\}$, alors $p_2 : I_{U,a} \to U_a := \{(x, y), p_a(x, y) \in D_a\}$ est un biholomorphisme. Soit ${p_2}^{-1}$ son inverse, on a : $\mathcal{A}(\alpha)_{|\{a\} \times D_a\}} = p_{1*}({p_2}_*^{-1}(\alpha)) = (p_1 \circ {p_2}^{-1})_*(\alpha) = p_{a*}(\alpha)$. □

D'après le lemme précédent, $p_{a*}(\alpha y^k) := v_k(a, b)\,\mathrm{d}b$ sur D_a.

Supposons que $\mathcal{A}(\alpha)$ se prolonge méromorphiquement à $\widetilde{U}^*$.

On déduit du Lemme 1.11 que $v_0, \dots, v_n$ se prolongent méromorphiquement sur $\widetilde{U}^*$.

D'autre part, $\mathcal{A}(\alpha y^k)$ est une forme méromorphe fermée sur U^*, pour tout $k \geqslant 0$.

On en déduit du Lemme 1.11 :

Lemme 1.13. $\partial_{b_i} v_{n+k} = \partial_{a_i} v_{n+k-1}$ *pour tout* $k \geqslant 0$ *sur* U^*.

Première étape. Supposons que $\mathcal{A}(\alpha)$ se prolonge *holomorphiquement* à $\widetilde{U}^*$, et que $\widetilde{U}^*$ vérifie la condition topologique suivante : pour tout a, le domaine $\widetilde{D}_a$ est contractible. v_k est méromorphe pour tout k sur D_a. D'autre part, $v_0, \dots, v_n$ se prolongent holomorphiquement sur $\widetilde{D}_a$. Supposons que l'on ait prolongé holomorphiquement v_{n+k} sur $\widetilde{D}_a$, $k \geqslant 0$, introduisons la forme suivante sur $\widetilde{D}_a$: $\phi := \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial_{a_i} v_{n+k}\,\mathrm{d}b_i$. Cette forme est holomorphe fermée sur D_a, donc sur $\widetilde{D}_a$, et égale à dv_{n+k+1} sur D_a d'après le lemme précédent. On en déduit, comme $\widetilde{D}_a$ est contractible, que v_{n+k+1}, qui est méromorphe sur D_a, y est en fait holomorphe et se prolonge holomorphiquement à $\widetilde{D}_a$. Par récurrence, pour a fixé, pour tout $k \geqslant 0$, $v_k(a, b)$ se prolonge holomorphiquement sur $\widetilde{D}_a$. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, comme $p_{a*}(\alpha y^k) = v_k(a, b)\,\mathrm{d}b$, cela implique que α restreint à $U_a := \bigcup_{b \in D_a} \Delta_{a,b}$ se prolonge en un courant l.r. $\tilde{\alpha}_a$ sur $\widetilde{U}_a := \bigcup_{b \in \widetilde{D}_a} \Delta_{a,b}$.

En faisant varier l'hyperplan à l'infini, on voit que pour tout $x \in U$, si l'on pose $U_x = \bigcup_{x\in\Delta,\Delta\subset U} \Delta$ et $\widetilde{U}_x := \bigcup_{x\in\Delta,\,\Delta\subset\widetilde{U}} \Delta$, $\alpha_{|U_x}$ se prolonge canoniquement en un courant l.r. α_x sur $\widetilde{U}_x$. D'autre part, on peut montrer que $\alpha_{x\,U\cap\widetilde{U}_x} = \alpha_{U\cap\widetilde{U}_x}$, donc α se prolonge à $U \cup \widetilde{U}_x$.

On considère l'ensemble des couples (V, α_V), ordonnés par la relation $(V, \alpha_V) \leqslant (W, \alpha_W)$ si $V \subset W$, et $\alpha_V = \alpha_{W|V}$. Alors, cet ensemble admet un élément maximal d'après le lemme de Zorn. Cet élément maximal (V, α_V) est tel que $x \in V$ implique $\widetilde{U}_x \subset V$, d'après ce qu'on a montré ci-dessus. V est donc à la fois ouvert et fermé dans $\widetilde{U}$. Comme $\widetilde{U}$ est connexe, $V = \widetilde{U}$. $\square$

Deuxième étape : Suppression de la condition topologique sur $\widetilde{U}^*$. On suppose maintenant seulement $\widetilde{U}^*$ connexe. Alors la méthode exposée dans [6] peut être utilisée pour montrer que le prolongement a lieu sans hypothèse topologique sur le domaine $\widetilde{U}^*$.

Troisième étape. On suppose maintenant un prologement *méromorphe*. Alors, le pôle du prolongement de $\mathcal{A}(\alpha)$ est de la forme $H^* := \{\Delta, \Delta \cap H \neq \emptyset\}$, pour un certain sous-ensemble analytique H de $\widetilde{U}$ de codimension 2. Soit $\tilde{\alpha}$ le prolongement $\bar{\partial}$-fermé de α obtenu sur $\widetilde{U} - H$ d'après la deuxième étape ; soit $\widetilde{Y}$ son support. D'après le théorème de Remmert–Stein, $\widetilde{Y}$ se prolonge à travers H.

Le Lemme 1.10 permet de conclure que $\tilde{\alpha}$ lui-même se prolonge à travers H, comme courant l.r. $\square$

Corollaire 1.14. *Soit α un courant l.r. de bidegré $(N, 1)$, sur un domaine linéairement 1-concave U, tel que U^* est connexe, et contenant un 2-plan complexe. Alors, α se prolonge de manière unique en un courant résiduel $\tilde{\alpha}$ sur $\mathbb{P}_N$. De plus, $\tilde{\alpha}$ est $\bar{\partial}$-fermé si et seulement si α l'est.*

Démonstration. L'ensemble $U^* \subset G(1, N)$ des droites contenues dans U est pseudoconcave au sens d'Andreotti. On en déduit d'après [2] que $\mathcal{A}(\alpha)$ se prolonge en une forme rationnelle sur la grassmannienne toute entière. Le Théorème 1.3 permet de conclure. $\square$

Remarque 1. Le théorème analogue de Henkin–Passare n'est pas démontré pour les courants localement résiduels de bidegré (N, p) de codimension p quelconque. Cette généralisation permettrait en particulier de remplacer $\mathbb{P}_N$ par une sous-variété algébrique quelconque. L'énoncé analogue n'est pas non plus démontré pour les courants de bidegré $(q + 1, 1)$ avec $0 < q < N - 1$, si la transformation n'est pas nulle. Nous reviendrons sur ces questions et leurs applications dans une publication ultérieure.

Remerciements

Je remercie G. Henkin, G. Tomassini et J.-L. Sauvageot pour des conversations fructueuses qu'ils ont bien voulu m'accorder.

Références

[1] J.-E. Björk, Residue currents and $\mathcal{D}$-modules on complex manifolds, Prepublication, Department of Mathematics, Stockholm University, 1996.
[2] P. Dingoyan, Un phénomène de Hartogs dans les variétés projectives, Math. Z. 232 (1999) 217–240.
[3] B. Fabre, Nouvelles variations sur des théorèmes d'Abel et Lie, Thèse de l'université Paris VI, 2000.
[4] S.G. Gindinkin, G.M. Henkin, Integral geometry for $\bar{\partial}$-cohomology in q-linear concave domains in CP^n, Funct. Anal. Appl. 12 (1978) 247–261.
[5] P. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, Invent. Math. 35 (1976) 321–390.
[6] G. Henkin, The Abel–Radon transform and several complex variables, Ann. Math. Stud. 137 (1995) 223–275.
[7] G. Henkin, Abel–Radon transform and applications, in: The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer, 2003, pp. 477–494.
[8] G. Henkin, M. Passare, Holomorphic forms on singular varieties and variations on a theorem of Lie–Griffiths, Invent. Math. 135 (1999) 297–328.
[9] M. Herrera, N. Coleff, Les courants résiduels associés à une forme méromorphe, in : Lecture Notes in Math., vol. 633, Springer, 1979, p. 211.
[10] M. Herrera, D. Lieberman, Residues and principal values on complex spaces, Math. Ann. 194 (1971) 259–294.
[11] M. Passare, Residues, currents, and their relations to ideals of holomorphic functions, Math. Scand. 62 (1988) 75–152.