Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 487–492
Comptes Rendus Mathematique

Probabilités

# Un principe d'invariance relatif à un processus généralisant le mouvement brownien $N$-dimensionnel

Léonard Gallardo, Laurent Godefroy

*Laboratoire de mathématiques et physique théorique, Université de Tours, parc de Grandmont, 37200 Tours, France*

Reçu le 15 octobre 2003 ; accepté le 15 janvier 2004

Présenté par Marc Yor

**Résumé**

Nous montrons que les marches aléatoires généralisées sur $\mathbb{R}^N$ associées à un système de racines $R$ et à une fonction $k$ de multiplicité, positive et définie sur $R$, convergent en loi (quand elles sont convenablement normalisées) vers un processus de Markov à trajectoires *càdlàg* dont le générateur infinitésimal est un opérateur différentiel et aux différences qui généralise le laplacien usuel. ***Pour citer cet article : L. Gallardo, L. Godefroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


**Abstract**

**An invariance principle related to a process which generalizes the $N$-dimensional Brownian motion.** We prove that the generalized random walks associated to a root system $R$ in $\mathbb{R}^N$ and a nonnegative multiplicity function $k$ defined on $R$, converge in distribution (if suitably normalized) to a Markov process with *càdlàg* trajectories and infinitesimal generator a differential-difference operator on $\mathbb{R}^N$ which generalizes the usual Laplacian. ***To cite this article: L. Gallardo, L. Godefroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***


## Abridged English version

The generalized Laplacian, also called the Dunkl Laplacian, is the operator $\Delta_k = \sum_{i=1}^N T_i^2$ where for $1 \leqslant i \leqslant N$, $T_i$ is the differential-difference operator defined for $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ by $T_i u(x) = \partial_i u(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_i \frac{u(x)-u(\sigma_\alpha x)}{\langle \alpha, x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^N$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the usual scalar product, $R$ is a root system in $\mathbb{R}^N$, $R_+$ a positive subsystem, $k$ a nonnegative multiplicity function defined on $R$ and invariant by the finite reflection group $W$ associated with $R$, and $\sigma_\alpha$ is the reflection with respect to the hyperplane $H_\alpha$ orthogonal to $\alpha$ [2].

The operator $\frac{1}{2}\Delta_k$ is the infinitesimal generator of a Markov process $(X_t)_{t \geqslant 0}$ with *càdlàg* trajectories on $\mathbb{R}^N$ called the Dunkl process [7]. A generalized random walk $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on $\mathbb{R}^N$ is a Markov chain with Markovian kernel $P(x, \cdot)$ such that for all $x \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}_k(P(x, \cdot))(\xi) = E_k(-\mathrm{i}x, \xi)\mathcal{F}_k(P(0, \cdot))(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, where for a probability

*Adresses e-mail :* gallardo@univ-tours.fr (L. Gallardo), godefroy@univ-tours.fr (L. Godefroy).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2004.01.016

measure $\nu$ on $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}_k(\nu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} E_k(-\mathrm{i}\xi, x)\nu(\mathrm{d}x)$ is the Dunkl transform of $\nu$ and $E_k(u, v)$ is the Dunkl kernel which reduce respectively to the usual Fourier transform and the exponential kernel $\mathrm{e}^{\langle u,v\rangle}$ if $k \equiv 0$.

If the law $\mu = P(0, \cdot)$ of $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ has usual second moments, we define its first (resp. second) moment function as the vector $m^{(1)}(\mu) = -\mathrm{i}(\nabla\mathcal{F}_k(\mu))(0)$ (resp. the $N \times N$ matrix $m^{(2)}(\mu) = -(D^2\mathcal{F}_k(\mu))(0))$ where $\nabla$ (resp. $D^2$) denotes the gradient (resp. the Hessian matrix).

The first of our results is an algebraic decomposition of $\mathbb{R}^N$, indispensable to normalize suitably our random walks.

**Theorem 0.1.** *There is a unique orthogonal decomposition of $\mathbb{R}^N$ of the form $\mathbb{R}^N = V_0 \oplus^\perp V_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp V_l$, where $V_0 = \bigcap_{\alpha\in R} H_\alpha$ and $V_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, are $W$-irreducible subspaces. Moreover the set $R_j = R \cap V_j$ generates $V_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $R_j$ is a root system in $V_j$ and $W$ can be identified to the product group $\prod_{j=1}^l W_j$, where $W_j$ is the reflection group associated to $R_j$.*

Then the Dunkl kernel $E_k$ splits as a tensor product $E_k = E_k^{(0)} \otimes E_k^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_k^{(l)}$, where $E_k^{(0)}$ is the usual exponential kernel on $V_0$ and for $1 \leqslant j \leqslant l$, $E_k^{(j)}$ is the Dunkl kernel associated to the root system $R_j$ and to the restriction of $k$ on $R_j$.

**Theorem 0.2.** *With the notations of Theorem 0.1, let $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a generalized random walk on $\mathbb{R}^N$ with law $\mu$ having usual second moments and such that $m^{(1)}(\mu) = 0$ and the matrix $m^{(2)}(\mu)$ acting on $V_j$, $0 \leqslant j \leqslant l$, as $\sigma_j^2 I_{V_j}$. Let $S_n^* = S_n^{(0)}/\sigma_0 + \cdots + S_n^{(l)}/\sigma_l$, $n \in \mathbb{N}$, where $S_n^{(j)}$ denotes the projection of $S_n$ on $V_j$. Then the sequence of processes $X^n = (X_t^n)_{t\geqslant 0}$ defined by $X_t^n = S_{[nt]}^*/\sqrt{n}$, $t \geqslant 0$, converge in distribution to the Dunkl process $(X_t)_{t\geqslant 0}$ in the Skorohod space.*

Note that our hypothesis on the second moment matrix $m^{(2)}(\mu)$ is fulfilled in some important cases, for example when $\mu$ is a $W$-invariant probability measure on $\mathbb{R}^N$.

## 1. Introduction et généralités

Sous des hypothèses naturelles, les marches aléatoires sur $(\mathbb{R}^N, +)$ convenablement normalisées convergent en loi vers le mouvement brownien de $\mathbb{R}^N$. C'est le célèbre « principe d'invariance » de Donsker [1,5]. Dans cette Note, nous présentons un résultat analogue pour certaines marches aléatoires généralisées sur $\mathbb{R}^N$. La limite est alors le processus de Dunkl, processus de Markov à trajectoires *càdlàg* introduit par Rösler et Voit dans [7], dont le générateur infinitésimal est un opérateur différentiel et aux différences qui généralise le laplacien.

Voyons d'abord précisément de quoi il s'agit. On munit $\mathbb{R}^N$ de sa structure euclidienne canonique, dont $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $|\cdot|$ désigneront le produit scalaire et la norme. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on notera $\sigma_\alpha$ la réflexion par rapport à l'hyperplan $H_\alpha$ orthogonal à $\alpha$. On considère un système de racines $R$ de $\mathbb{R}^N$, c'est-à -dire une famille finie de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^N$ vérifiant $R \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ et $\sigma_\alpha(R) = R$ pour tout $\alpha \in R$. Le groupe fini de réflexions engendré par $\{\sigma_\alpha, \alpha \in R\}$ sera noté $W$. On fixe $\beta \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{\alpha\in R} H_\alpha$, on note $R_+ = \{\alpha \in R \mid \langle\alpha, \beta\rangle > 0\}$ le sous-système positif associé, et $k$ une fonction dite de multiplicité, définie sur $R$, positive et invariante par $W$. On pose $\gamma = \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$ et $\omega_k(x) = \prod_{\alpha\in R_+} |\langle\alpha, x\rangle|^{2k(\alpha)}$.

Pour $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, on considère l'opérateur de Dunkl [2] :

$$T_\xi u(x) = \partial_\xi u(x) + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)\langle\alpha, \xi\rangle \frac{u(x) - u(\sigma_\alpha x)}{\langle\alpha, x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où $\partial_\xi$ est la dérivée partielle dans la direction du vecteur $\xi$. Pour $y \in \mathbb{R}^N$ fixé, le système

$$T_\xi u = \langle\xi, y\rangle u, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad u(0) = 1, \tag{1}$$

admet une unique solution $u = E_k(\cdot, y)$, analytique sur $\mathbb{R}^N$, appelée noyau de Dunkl. On peut montrer que ce noyau est symétrique, qu'il admet un unique prolongement analytique à $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, et qu'il vérifie $|E_k(\mathrm{i}x, y)| \leqslant 1$, pour $x, y \in \mathbb{R}^N$.

La transformée de Dunkl d'une mesure de probabilité $\mu$ (voir [7]) est alors définie par :

$$\mathcal{F}_k(\mu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} E_k(-\mathrm{i}\xi, x)\mu(\mathrm{d}x), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Cette transformation, qui coïncide avec la transformation de Fourier usuelle si $k \equiv 0$, vérifie la propriété de continuité de Paul Lévy. De plus, si $\mu$ est la loi d'une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, on a bien sûr

$$\mathcal{F}_k(\mu)(\xi) = \mathbb{E}\big(E_k(-\mathrm{i}\xi, X)\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

**Définition 1.1** [7]. Un noyau de Markov $P$ sur $\mathbb{R}^N \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est dit $k$-invariant si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{F}_k\big(P(x, \cdot)\big)(\xi) = E_k(-\mathrm{i}x, \xi)\mathcal{F}_k\big(P(0, \cdot)\big)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{R}^N$ dont le noyau de transition $P$ est $k$-invariant sera appelée marche aléatoire $k$-invariante de loi $P(0, \cdot)$.

Notons que si $k \equiv 0$, on retrouve la définition des marches aléatoires usuelles.

On définit l'espérance généralisée et la matrice de covariance généralisée d'une mesure de probabilité $\mu$ possédant des moments d'ordre 2 par :

$$m^{(1)}(\mu) = -\mathrm{i}\big(\nabla\mathcal{F}_k(\mu)\big)(0) \quad \text{et} \quad m^{(2)}(\mu) = -\big(D^2\mathcal{F}_k(\mu)\big)(0),$$

où $\nabla$ désigne le gradient et $D^2$ la matrice hessienne.

L'opérateur $\Delta_k = \sum_{i=1}^N T_{\xi_i}^2$, indépendant de la base orthornormée $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ de $\mathbb{R}^N$, sera appelé laplacien de Dunkl. Il se réduit au laplacien usuel si $k \equiv 0$. L'opérateur $\Delta_k/2$ est le générateur infinitésimal d'un processus de Markov $X$ sur $\mathbb{R}^N$ appelé processus de Dunkl ou mouvement brownien généralisé de Dunkl [7]. Le semi-groupe $(P_t)_{t \geqslant 0}$ des noyaux de transition de $X$ est donné par

$$P_t(x, \mathrm{d}y) = \frac{1}{c_k t^{\gamma+N/2}}\, \mathrm{e}^{-(|x|^2+|y|^2)/2t} E_k\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}}\right)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

où $c_k = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\omega_k(x)\,\mathrm{d}x$. Enfin, il convient de noter que $\mathcal{F}_k(P_t(x, \cdot))(\xi) = E_k(-\mathrm{i}x, \xi)\,\mathrm{e}^{-t|\xi|^2/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $t \geqslant 0$.

## 2. Décomposition en sous-espaces irréductibles

Rappelons qu'un sous-espace $V$ de $\mathbb{R}^N$, non trivial, est dit irréductible pour l'action de $W$ si les seuls sous-espaces de $V$ stables par tout $w \in W$ sont $\{0\}$ et $V$.

Nous supposerons dans la suite que $W$ n'est pas réduit à l'identité de $\mathbb{R}^N$. Nous noterons par $A \oplus^\perp B$ la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $A$ et $B$, et par $C \cup^\perp D$ l'union de deux sous-ensembles orthogonaux de $\mathbb{R}^N$.

**Théorème 2.1.** *Il existe une décomposition de $\mathbb{R}^N$ de la forme*

$$\mathbb{R}^N = V_0 \oplus^\perp V_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp V_l, \tag{4}$$

*où $V_0 = \bigcap_{\alpha \in R} H_\alpha$ et où chaque $V_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, est irréductible pour l'action de $W$. Cette décomposition est unique à permutation près des $V_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$.*

*De plus, si on note $R_j = R \cap V_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant l$, alors $V_j$ est engendré par $R_j$, $R_j$ est un système de racines dans $V_j$, et $R = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant l}^{\perp} R_j$. Enfin, $W$ s'identifie au groupe produit $\prod_{j=1}^{l} W_j$, où $W_j$ est le groupe de réflexions associé à $R_j$.*

**Démonstration.** On voit facilement que

$$\mathbb{R}^N = \left(\bigcap_{\alpha\in R} H_\alpha\right) \oplus^{\perp} V,$$

où $V$ est le sous espace de $\mathbb{R}^N$ engendré par $R$. L'existence des $V_j$ se démontre alors par récurrence sur la dimension de $V$.

L'unicité de la décomposition découle des deux lemmes suivants, dont nous omettons les preuves.

**Lemme 2.2.** *Soit $\alpha \in R$ et $S$ un sous espace de $\mathbb{R}^N$ stable par $\sigma_\alpha$. Alors $S \subset H_\alpha$ ou $\alpha \in S$.*

**Lemme 2.3.** *Soit $U$ un sous espace de $V$ irréductible pour l'action de $W$. Alors, $U$ est engendré par $R_U = R \cap U$.*

On déduit également du Lemme 2.3 les autres assertions du Théorème 2.1. $\square$

Nous noterons dans la suite $N_0, N_1, \ldots, N_l$ les dimensions des sous-espaces vectoriels $V_0 = \bigcap_{\alpha\in R} H_\alpha$, $V_1, \ldots, V_l$. Pour $0 \leqslant j \leqslant l$, on fixe une base orthonormale $(\varepsilon_i^{(j)})_{1\leqslant i\leqslant N_j}$ de $V_j$, qui s'identifie à la base canonique de $\mathbb{R}^{N_j}$. Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit donc sous la forme

$$x = \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=1}^{N_j} x_i^{(j)} \varepsilon_i^{(j)}.$$

Pour $0 \leqslant j \leqslant l$, on identifiera la projection orthogonale (resp. la projection) $x^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_j} x_i^{(j)} \varepsilon_i^{(j)}$ de $x \in \mathbb{R}^N$ (resp. $x \in \mathbb{C}^N$) sur $V_j$ (resp. sur le complexifié $V_j^{\mathbb{C}}$ de $V_j$) avec le vecteur $(x_1^{(j)}, \ldots, x_{N_j}^{(j)})$ de $\mathbb{R}^{N_j}$ (resp. de $\mathbb{C}^{N_j}$).

Pour $1 \leqslant j \leqslant l$, $E_k^{(j)}$ désignera le noyau de Dunkl sur $\mathbb{C}^{N_j} \times \mathbb{C}^{N_j}$ correspondant au système de racines $R_j$ et à la fonction de multiplicité $k_j = k\backslash_{R_j}$ (restriction de $k$ à $R_j$). De cette manière, on a aussi $(R_j)_+ = \{\alpha \in R_j$ tel que $\langle\alpha, \beta^{(j)}\rangle > 0\}$, où $\beta$ est le vecteur ayant servi à définir $R_+$.

**Corollaire 2.4.** *Pour tout $x, y \in \mathbb{C}^N$, on a*

$$E_k(x, y) = \mathrm{e}^{\langle x^{(0)}, y^{(0)}\rangle} E_k^{(1)}\big(x^{(1)}, y^{(1)}\big) \cdots E_k^{(l)}\big(x^{(l)}, y^{(l)}\big). \tag{5}$$

**Démonstration.** On utilise le Théorème 2.1 et la caractérisation de $E_k$ comme unique solution du système différentiel et aux différences (1). $\square$

Le résultat suivant concerne les projections $X^{(j)}$ du processus de Dunkl sur les sous-espaces $V_j$, $0 \leqslant j \leqslant l$.

**Corollaire 2.5.** *Les processus $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(l)}$ sont indépendants. Si $N_0 \neq 0$, le processus $X^{(0)}$ est un mouvement brownien classique sur $\mathbb{R}^{N_0}$. Pour $1 \leqslant j \leqslant l$, le processus $X^{(j)}$ est un mouvement brownien de Dunkl sur $\mathbb{R}^{N_j}$, associé au système de racines $R_j$ et à la fonction de multiplicité $k_j$.*

**Démonstration.** On considère des boréliens $B$ de $\mathbb{R}^N$ de la forme

$$B = \big\{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que pour } 0 \leqslant j \leqslant l,\ x^{(j)} \in B_j\big\},$$

où pour $0 \leqslant j \leqslant l$, $B_j$ est un borélien de $V_j$ ($\simeq \mathbb{R}^{N_j}$). On pose $\omega_{k_j}(\cdot) = \prod_{\alpha \in (R_j)_+} |\langle \alpha, \cdot \rangle|^{2k_j(\alpha)}$, $c_{k_j} = \int_{\mathbb{R}^{N_j}} \mathrm{e}^{-|x^{(j)}|^2/2} \omega_{k_j}(x^{(j)})\, \mathrm{d}x^{(j)}$ et $\gamma_j = \sum_{\alpha \in (R_j)_+} k(\alpha)$. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on calcule $P_t(x, B)$ en effectuant dans la formule (3) le changement de variable $y = P\tilde{y}$, où $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^N$ à la base orthonormée $(\varepsilon_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_0^{(N_0)}, \dots, \varepsilon_l^{(1)}, \dots, \varepsilon_l^{(N_l)})$. On obtient

$$P_t(x, B) = \frac{1}{(2\pi t)^{N_0/2}} \int_{B_0} \mathrm{e}^{-(|x^{(0)} - y^{(0)}|^2)/2t}\, \mathrm{d}y^{(0)} \\ \times \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{c_{k_j} t^{\gamma_j + N_j/2}} \int_{B_j} \mathrm{e}^{-(|x^{(j)}|^2 + |y^{(j)}|^2)/2t} E_k^{(j)}\left( \frac{x^{(j)}}{\sqrt{t}}, \frac{y^{(j)}}{\sqrt{t}} \right) \omega_{k_j}\big(y^{(j)}\big)\, \mathrm{d}y^{(j)}. \tag{6}$$

On en déduit immédiatement l'indépendance des processus $X^{(j)}, 0 \leqslant j \leqslant l$. Enfin, on identifie les projections $X^{(j)}, 0 \leqslant j \leqslant l$, à l'aide de (6) et de [5], Chapitre III, Exercice 1.17. □

## 3. Théorème limite central et principe d'invariance

**Théorème 3.1.** *Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire $k$-invariante partant d'un point $x \in \mathbb{R}^N$, et dont la loi $\mu$ possède des moments d'ordre 2. On suppose que $m^{(1)}(\mu) = 0$, que $m^{(2)}(\mu)$ est de rang $N$ et qu'elle agit sur les sous-espaces $V_j$, $0 \leqslant j \leqslant l$, comme une homothétie $\sigma_j^2 I_{V_j}$ ($\sigma_j^2 > 0$). Soit*

$$S_n^* = \frac{S_n^{(0)}}{\sigma_0} + \cdots + \frac{S_n^{(l)}}{\sigma_l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Alors $(S_n^*/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers la loi au temps $t = 1$ du mouvement brownien de Dunkl partant de 0.*

**Démonstration.** On désigne par $\mathbb{E}_x$ l'espérance pour la chaîne $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partant de $x$ à l'instant $n = 0$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^N$ on notera $\xi^* = \xi^{(0)}/\sigma_0 + \cdots + \xi^{(l)}/\sigma_l$. On déduit du Corollaire 2.4 que $\mathbb{E}_x(E_k(-\mathrm{i}\xi, S_n^*/\sqrt{n})) = \mathbb{E}_x(E_k(-\mathrm{i}\xi^*/\sqrt{n}, S_n))$. On utilise alors la propriété de $k$-invariance du noyau de la marche pour obtenir

$$\mathbb{E}_x\left( E_k\left( -\mathrm{i}\xi, \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \right) \right) = E_k\left( -\mathrm{i}x, \frac{\xi^*}{\sqrt{n}} \right) \left( \mathcal{F}_k(\mu)\left( \frac{\xi^*}{\sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

Les hypothèses sur $m^{(1)}(\mu)$ et $m^{(2)}(\mu)$ impliquent de plus que

$$\mathcal{F}_k(\mu)\left( \frac{\xi^*}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{\langle \xi^*, m^{(2)}(\mu)\xi^* \rangle}{2n} + \mathrm{o}\left( \frac{1}{n} \right),$$

et que $\langle \xi^*, m^{(2)}(\mu)\xi^* \rangle = \sum_{j=1}^{l} |\xi^{(j)}|^2 = |\xi|^2$. Ainsi, $\mathbb{E}_x(E_k(-\mathrm{i}\xi, S_n^*/\sqrt{n})) \longrightarrow \mathrm{e}^{-|\xi|^2/2}$, quand $n \to \infty$, et on conclut en utilisant le Théorème de continuité de Paul Lévy [7, Théorème 2.7]. □

**Théorème 3.2.** *Sous les hypothèses et avec les notations du Théorème 3.1, on considère les processus $X^n = (X_t^n)_{t \geqslant 0}$ définis par*

$$X_t^n = \frac{S_{[nt]}^*}{\sqrt{n}}, \quad t \geqslant 0.$$

*Alors, la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers le mouvement brownien de Dunkl $X$, dans l'espace des fonctions càdlàg sur $[0, \infty[$ muni de la topologie de Skorohod [4].*

**Démonstration.** On utilise [4, Chapitre VI, §2, Théorème 16]. Il faut d'abord montrer la convergence des distributions multidimensionnelles, i.e. montrer que pour tout $i \geqslant 1$ et tous $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_i < +\infty$, $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_i})$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_i})$. Pour $i = 1$, le résultat découle directement de la preuve du théorème limite central 3.1. Pour $i = 2$, on calcule la transformée de Dunkl produit d'un couple $(X^n_{t_1}, X^n_{t_2})$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < +\infty$ :

$$F_n(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\big(E_k\big(-\mathrm{i}\xi_1, X^n_{t_1}\big) E_k\big(-\mathrm{i}\xi_2, X^n_{t_2}\big)\big), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N.$$

En utilisant la propriété de Markov, on montre que

$$F_n(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} E_k(-\mathrm{i}\xi_1, x) \mathbb{E}_{\tilde{x}\sqrt{n}}\left(E_k\left(-\mathrm{i}\xi_2^*, \frac{S_{[nt_2]-[nt_1]}}{\sqrt{n}}\right)\right) \nu_n(\mathrm{d}x),$$

où $\nu_n$ est la loi de $X^n_{t_1}$ et $\tilde{x} = \sigma_0 x^{(0)} + \cdots + \sigma_l x^{(l)}$. Du cas $i = 1$, on déduit alors que

$$F_n(\xi_1, \xi_2) \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} E_k(-\mathrm{i}\xi_1, x) E_k(-\mathrm{i}x, \xi_2)\, \mathrm{e}^{-(t_2 - t_1)|\xi_2|^2/2} \nu(\mathrm{d}x),$$

où $\nu$ est la loi de $X_{t_1}$, et l'on vérifie que cette dernière expression est bien la transformée de Dunkl produit du couple $(X_{t_1}, X_{t_2})$. On conclut enfin à l'aide de [3]. Le cas général $i \geqslant 3$ se traite de la même façon, par récurrence sur $i$.

On vérifie ensuite la condition d'Aldous [4] grâce à un critère de Zeuner [8]. Pour cela, on établit le lemme suivant :

**Lemme 3.3.** *Quel que soient* $y \in \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, *et* $\theta > 0$, *on a*

$$\mathbb{P}_y\big(|S_{m+p} - S_m| \geqslant \theta\big) \leqslant \frac{cp\sigma^2}{\theta^2},$$

*avec* $\sigma^2 = \sum_{j=0}^{l} N_j \sigma_j^2$, *où* $N_j$ *est la dimension de* $V_j$ *et* $c$ *une constante* $> 0$ *universelle.*

Le théorème est alors démontré. □

Les hypothèses des Théorèmes 3.1 et 3.2 sont vérifiées par une classe de lois très naturelle dans ce contexte :

**Proposition 3.4.** *Soit* $\mu$ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}^N$ *centrée,* $W$*-invariante et possédant des moments d'ordre* 2. *Alors, pour* $1 \leqslant j \leqslant l$, $V_j$ *est un sous espace propre de* $m^{(2)}(\mu)$.

**Remarque 1.** Toute probabilité $\mu$ sur $\mathbb{R}^N$ n'est pas la loi d'une marche aléatoire $k$-invariante (sauf si $k \equiv 0$). C'est le cas si $\omega_k^{-1}(x)\mu(\mathrm{d}x)$ est une mesure radiale (voir [6]).

## Références


[1] M.D. Donsker, An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc. 1951 (6) (1951) 12.

[2] C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1) (1989) 167–183.

[3] L. Gallardo, Le théorème de continuité de Paul Lévy dans un espace produit, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 315 (1) (1992) 73–77.

[4] D. Pollard, Convergence of Stochastic Processes, in: Springer Ser. Statist., Springer-Verlag, New York, 1984.

[5] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, third ed., in: Grundlehren Math. Wiss., vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[6] M. Rösler, A positive radial product formula for the Dunkl kernel, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (6) (2003) 2413–2438.

[7] M. Rösler, M. Voit, Markov processes related with Dunkl operators, Adv. Appl. Math. 21 (4) (1998) 575–643.

[8] H. Zeuner, Invariance principles for random walks on hypergroups on $\mathbf{R}_+$ and $\mathbf{N}$, J. Theoret. Probab. 7 (2) (1994) 225–245.