Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 437–442
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Espaces de Branges Rovnyak et fonctions de Schur : le cas hyper-analytique

Daniel Alpay [a], Michael Shapiro [b], Dan Volok [a]

[a] *Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israël*
[b] *Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Física y Mathemáticas, Instituto Politécnico Nacional, 07300 México, D.F., Mexique*

Reçu et accepté le 13 janvier 2004

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous étendons au cas hyper-analytique la notion de fonction de Schur et la théorie de la réalisation pour de telles fonctions. Nous introduisons la notion de fonction caractéristique pour les colligations coisométriques entre espaces de Hilbert de fonctions hyper-analytiques. Nous caractérisons les fonctions de Schur comme les fonctions caractéristiques des colligations coisométriques. ***Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

de Branges Rovnyak spaces and Schur functions: the hyperholomorphic case. We extend to the hyperholomorphic case the notion of Schur functions and the corresponding realization theory. We introduce the notion of characteristic operator function for coisometric colligations between Hilbert spaces of hyperholomorphic functions. We show that every Schur function is the characteristic operator function of a coisometric colligation and vice-versa. ***To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

Schur functions (that is, functions analytic and contractive in the open unit disk $\mathbb{D}$) play an important role in operator theory and related topics; see [1] for a review. For such a function s, the kernel $k_s(z,w) = (1-s(z)s(w)^*)/(1-z\overline{w})$ is positive in $\mathbb{D}$. In [5] de Branges and Rovnyak studied the associated reproducing kernel Hilbert space (denoted by $\mathcal{H}(s)$). The space $\mathcal{H}(s)$ is contractively included in the Hardy space $\mathbf{H}_2$ and is the state space for a coisometric realization of s, that is, $s(z) = H + zG(I-zT)^{-1}F$ where G is the point evaluation at the origin, $H = s(0)$,

$$Tf = R_0 f, \quad \mathcal{H}(s) \mapsto \mathcal{H}(s) \quad \text{and} \quad Fx = \frac{s(z)-s(0)}{z}x, \quad \mathbb{C} \mapsto \mathcal{H}(s),$$

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), shapiro@esfm.ipn.mx (M. Shapiro), volok@math.bgu.ac.il (D. Volok).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.01.013

and the operator matrix (also called *colligation*) $\begin{pmatrix} T & F \\ G & H \end{pmatrix}$ is coisometric. When leaving the setting of one complex variable there are numerous counterparts of de Branges Rovnyak spaces. See [1] for the definition of these spaces in the setting of compact Riemann surfaces and upper triangular operators respectively. In the setting of the unit ball $\mathbb{B}_N$ of $\mathbb{C}^N$, Schur functions (also called Schur multipliers) are functions such that the kernel $(1-s(z)s(w)^*)(1-\langle z,w\rangle)$ is positive in $\mathbb{B}_N$. Note that it can be rewritten as

$$\frac{1-s(z)s(w)^*}{1-\langle z,w\rangle}=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^N}\frac{|\nu|!}{\nu!}z^{\nu}\bigl(1-s(z)s(w)^*\bigr)\overline{w}^{\nu}, \tag{1}$$

where we used the multi-index notation. When $N>1$, the kernel $\frac{1}{1-\langle z,w\rangle}$ is the reproducing kernel of the Arveson space (see [4]), which is included strictly and contractively in the Hardy space of the ball. The connections with the Beurling–Lax theorem and realization theory were explained in [2]. Another direction of research is when one replaces $\mathbb{C}$ by the skew field of quaternions $\mathbb{H}$. The counterpart of the Arveson space was given in our previous note [3]. In the present Note (where we use the notation and definitions of [3]) we study the contractive multipliers of the quaternionic Arveson space in terms of realizations and the corresponding reproducing kernel Hilbert spaces.

1. Espace d'Arveson et fonctions de Schur hyper-analytiques

Nous noterons $x=x_0+x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ un élément de $\mathbb{H}$ (avec $x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$). Voir [3]. Soient $\zeta_1(x),\ \zeta_2(x)$ et $\zeta_3(x)$ les variables hyper-analytiques (voir [3, §1]). On a

$$\bigl|\zeta_1(x)\bigr|^2+\bigl|\zeta_2(x)\bigr|^2+\bigl|\zeta_3(x)\bigr|^2=3x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Nous avons montré (voir [3] ; le symbole $\odot$ dénote le produit de Cauchy–Kovalevskaya par la gauche) que le noyau

$$k_y(x)=\bigl(1-\zeta_1(x)\overline{\zeta_1(y)}-\zeta_2(x)\overline{\zeta_2(y)}-\zeta_3(x)\overline{\zeta_3(y)}\bigr)^{-\odot}=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\zeta^{\nu}(x)\overline{\zeta^{\nu}(y)}$$

est positif dans l'ellipsoïde

$$\Omega=\bigl\{x\in\mathbb{H}\mid 3x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\bigr\}.$$

Comme dans [3] nous dénotons par ζ^{ν} ($\nu\in\mathbb{N}^3$) les polynômes de Fueter. L'espace d'Arveson est l'espace de Hilbert quaternionique à noyau reproduisant correspondant. Nous le dénoterons $\mathcal{A}$. Notons la différence avec l'espace de Hardy quaternionique, qui est l'espace à noyau reproduisant de noyau $(1-\bar{x}y)/|1-\bar{x}y|^4$ et dont les éléments sont des fonctions hyper-analytiques dans la boule unité de $\mathbb{R}^4$ (voir [6, p. 198]).

Une fonction de Schur est une fonction $s:\Omega\to\mathbb{H}$ telle que l'opérateur de multiplication de Cauchy–Kovalevskaya par la gauche : $f\mapsto M_sf=s\odot f$ est une contraction de l'espace d'Arveson dans lui-même. Les fonctions de Schur sont hyper-analytiques puisque les constantes appartiennent à l'espace d'Arveson. De plus la formule

$$(M_s^*k_y)(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\zeta^{\nu}(x)\overline{\bigl(s\odot\zeta^{\nu}\bigr)(y)}$$

permet de montrer que s est une fonction de Schur si et seulement si le noyau

$$k_s(x,y)=\bigl((I-M_sM_s^*)k_y\bigr)(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\Bigl(\zeta^{\nu}(x)\overline{\zeta^{\nu}(y)}-\bigl(s\odot\zeta^{\nu}\bigr)(x)\overline{\bigl(s\odot\zeta^{\nu}\bigr)(y)}\Bigr) \tag{2}$$

est positif dans Ω. On reconnaît l'analogue de (1).

Définition 1.1. Soit s une fonction de Schur hyper-analytique. L'espace de de Branges Rovnyak associé est l'espace de Hilbert quaternionique à droite à noyau reproduisant de noyau (2). On le note $\mathcal{H}(s)$.

2. Réalisation d'une fonction de Schur hyper-analytique

D'abord quelques notations et définitions. Étant donnés $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert quaternionique $\mathcal{H}$ dans lui-même, on appelle produit symétrique l'opérateur

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(n)},$$

S_n étant le groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

Théorème 2.1. *Soit s une fonction de Schur hyper-analytique. Il existe une matrice d'opérateurs*

$$V = \begin{pmatrix} T_1 & F_1 \\ T_2 & F_2 \\ T_3 & F_3 \\ G & H \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}(s) \\ \mathbb{H} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{H}(s)^3 \\ \mathbb{H} \end{pmatrix} \tag{3}$$

qui est coisométrique et telle que pour chaque $f \in \mathcal{H}(s)$ et $q \in \mathbb{H}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{3} \zeta_k \odot (T_k f) \right)(x) = f(x) - f(0) \; ; \tag{4}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{3} \zeta_k \odot (F_k q) \right)(x) = \big(s(x) - s(0)\big) q \; ; \tag{5}$$

$$Gf = f(0) \; ; \tag{6}$$

$$Hq = s(0) q. \tag{7}$$

Soit

$$T^{\nu} = T_1^{\times \nu_1} \times T_2^{\times \nu_2} \times T_3^{\times \nu_3}. \tag{8}$$

La fonction $s(x)$ admet la représentation :

$$s(x) q = Hq + \sum_{k=1}^{3} \sum_{\nu \in \mathbb{N}^3} \frac{|\nu|!}{\nu!} \big(\zeta_k \odot \zeta^{\nu}\big)(x) G T^{\nu} F_k q, \quad x \in \Omega, \; q \in \mathbb{H}. \tag{9}$$

Nous remarquons que (4) exprime le fait que le problème de Gleason est résoluble dans $\mathcal{H}(s)$.

Démonstration du Théorème 2.1. Nous dénotons par $\mathcal{H}(s)_3$ la fermeture dans $\mathcal{H}(s)^3$ des combinaisons linéaires des éléments de la forme

$$w_y = \begin{pmatrix} (I - M_s M_s^*) M_{\zeta_1}^* k_y \\ (I - M_s M_s^*) M_{\zeta_2}^* k_y \\ (I - M_s M_s^*) M_{\zeta_3}^* k_y \end{pmatrix}, \quad y \in \Omega.$$

Les formules $(\widehat{G} q)(x) = k_s(x, 0) q$, $\widehat{H} q = \overline{s(0)} q$ et

$$(\widehat{T} w_y q)(x) = \big(k_s(x, y) - k_s(x, 0)\big) q, \qquad \widehat{F} w_y q = \big(\overline{s(y)} - \overline{s(0)}\big) q,$$

permettent de définir une relation $\widehat{V} = \begin{pmatrix} \widehat{T} & \widehat{G} \\ \widehat{F} & \widehat{H} \end{pmatrix}$ dont le domaine de définition consiste en les combinaisons linéaires à droite des éléments de la forme $\begin{pmatrix} w_y q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ et est donc dense. Nous montrons que $\widehat{V}$ est isométrique. Cela nous permettra d'affirmer que $\widehat{V}$ définit en fait une matrice d'opérateurs et non seulement une relation. Soient donc $x, y \in \Omega$ et $p, q, u, v \in \mathbb{H}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{V}\begin{pmatrix} w_y q \\ u \end{pmatrix}, \widehat{V}\begin{pmatrix} w_x p \\ v \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathcal{H}(s)\oplus\mathbb{H}} &= \langle \widehat{T} w_y q + \widehat{G} u, \widehat{T} w_x p + \widehat{G} v\rangle_{\mathcal{H}(s)} + \overline{(\widehat{F} w_x p + \widehat{H} v)}(\widehat{F} w_y q + \widehat{H} u) \\ &= \big\langle k_s(\cdot, y)q - k_s(\cdot,0)(q-u), k_s(\cdot,x)p - k_s(\cdot,0)(p-v)\big\rangle_{\mathcal{H}(s)} \\ &\quad + \big(\bar{p}s(x) - (\bar{p}-\bar{v})s(0)\big)\big(\overline{s(y)}q - \overline{s(0)}(q-u)\big) \\ &= \bar{p}\big(k_s(x,y) + s(x)\overline{s(y)} - 1\big)q + \bar{v}u.\end{aligned}$$

Définissant l'opérateur $Cf = f(0)$ d'évaluation à l'origine, on a l'identité dans l'espace d'Arveson $\mathcal{A}$

$$I - \sum_{k=1}^{3} M_{\zeta_k} M_{\zeta_k}^* = C^* C.$$

Utilisant le fait que M_s and M_{ζ_k} commutent, le dernier terme devient :

$$\begin{aligned}&\bar{p}\big(k_s(x,y) + s(x)\overline{s(y)} - 1\big)q + \bar{v}u \\ &\quad = \big\langle (I - M_s M_s^*)k_y q, k_x p\big\rangle_{\mathcal{H}(k)} + \bar{p}\big(\overline{(CM_s^* k_x)}(CM_s^* k_y) - \overline{(Ck_x)}(Ck_y)\big)q + \bar{v}u \\ &\quad = \big\langle (I - C^*C)k_y q, k_x p\big\rangle_{\mathcal{A}} - \big\langle (I - C^*C)M_s^* k_y q, M_s^* k_x p\big\rangle_{\mathcal{A}} + \bar{v}u \\ &\quad = \left\langle w_y q, \begin{pmatrix} M_{\zeta_1}^* \\ M_{\zeta_2}^* \\ M_{\zeta_3}^* \end{pmatrix} k_x p\right\rangle_{\mathcal{A}^3} + \bar{v}u = \left\langle \begin{pmatrix} w_y q \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_x p \\ v \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathcal{H}(s)^3\oplus\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

$\widehat{V}$ est donc une isométrie sur son domaine. Ce dernier étant dense, on peut étendre $\widehat{V}$ à une isométrie de $\mathcal{H}(s)_3 \oplus \mathbb{H}$ dans $\mathcal{H}(s) \oplus \mathbb{H}$. Soit (3) son adjoint. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{3}\big(\zeta_\ell \odot (T_\ell f)\big)(x) &= \sum_{\ell=1}^{3}\big\langle \zeta_\ell \odot (T_\ell f), k_x\big\rangle_{\mathcal{H}(k)} = \sum_{\ell=1}^{3}\langle T_\ell, M_{\zeta_\ell}^* k_x\rangle_{\mathcal{H}(k)} \\ &= \langle Tf, w_x\rangle_{\mathcal{H}(s)^3} = \big\langle f, k_s(\cdot,x) - k_s(\cdot,0)\big\rangle_{\mathcal{H}(s)} = f(x) - f(0),\end{aligned}$$

et nous obtenons donc (4). On vérifie de manière similaire (5)–(7).

Finalement nous remarquons que (4)–(7) impliquent que :

$$\begin{aligned}s(x)q &= s(0)q + \big(s(x) - s(0)\big)q = Hq + \sum_{k=1}^{3}\big(\zeta_k \odot (F_k q)\big)(x) \\ &= Hq + \sum_{k=1}^{3}\zeta_k(x)(F_k q)(0) + \sum_{k=1}^{3}\big(\zeta_k \odot \big(F_k q - (F_k q)(0)\big)\big)(x) \\ &= Hq + \sum_{k=1}^{3}\zeta_k(x) G F_k q + \sum_{k=1}^{3}\left(\zeta_k \odot \sum_{\ell=1}^{3}\zeta_\ell \odot T_\ell F_k q\right)(x).\end{aligned}$$

En réitérant ce procédé nous obtenons la représentation (9). Cette série converge normalement puisque $(\, T_1 \quad T_2 \quad T_3\,)^t$ est une contraction (^{t} désigne le transposé du vecteur d'opérateurs).

3. Fonction caractéristique d'une colligation

Étant donné un espace de Hilbert quaternionique à droite $\mathcal{H}$, on appelle colligation toute matrice d'opérateurs $V:\binom{\mathcal{H}}{\mathbb{H}}\mapsto\binom{\mathcal{H}^3}{\mathbb{H}}$ de la forme (3). Le Théorème 2.1 suggère la définition suivante (rappelons que T^ν est défini par (8)) :

Définition 3.1. La fonction caractéristique de la colligation V est la fonction hyper-analytique à gauche

$$s_V(x)=H+\sum_{k=1}^{3}\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\big(\zeta_k\odot\zeta^\nu\big)(x)GT^\nu F_k.$$

Lorsque T_k, F_k, G, H sont des matrices constantes dont les éléments appartiennent à $\mathbb{H}$ (dans ce cas $\mathcal{H}$ est aussi un espace quaternionique à gauche), on a

$$s_V(x)=H+G\odot(I-\zeta_1T_1-\zeta_2T_2-\zeta_3T_3)^{-\odot}\odot(\zeta_1F_1+\zeta_2F_2+\zeta_3F_3),$$

et s_V est rationnelle.

Théorème 3.2. *La fonction caractéristique d'une colligation coisométrique est une fonction de Schur.*

Démonstration. Introduisons les fonctions $A_\mu(x):\mathcal{H}^3\mapsto\mathbb{H}$ et $B_\mu(x), C(x):\mathcal{H}\mapsto\mathbb{H}$, données par

$$A_\mu(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\Big(\big(\zeta^{\mu+\nu}\odot\zeta_1\big)(x)GT^\nu\ \big(\zeta^{\mu+\nu}\odot\zeta_2\big)(x)GT^\nu\ \big(\zeta^{\mu+\nu}\odot\zeta_3\big)(x)GT^\nu\Big),$$

$$B_\mu(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\zeta^{\mu+\nu}(x)GT^\nu,\qquad C(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\nu|!}{\nu!}\zeta^{\nu}(x)GT^\nu.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}A_\mu(x)A_\mu(y)^*+\zeta^\mu(x)\overline{\zeta^\mu(y)}&=\big(A_\mu(x)\,\zeta^\mu(x)\big)VV^*\big(A_\mu(y)\,\zeta^\mu(y)\big)^*\\&=\big(B_\mu(x)\,\big(\zeta^\mu\odot s_V\big)(x)\big)\big(B_\mu(y)\,\big(\zeta^\mu\odot s_V\big)(y)\big)^*\\&=B_\mu(x)B_\mu(y)^*+\big(\zeta^\mu\odot s_V\big)(x)\overline{\big(\zeta^\mu\odot s_V\big)(y)}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}K_{s_V}(x,y)&=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\mu|!}{\mu!}\Big(\zeta^\mu(x)\overline{\zeta^\mu(y)}-\big(\zeta^\mu\odot s_V\big)(x)\overline{\big(\zeta^\mu\odot s_V\big)(y)}\Big)\\&=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\mu|!}{\mu!}\big(B_\mu(x)B_\mu(y)^*-A_\mu(x)A_\mu(y)^*\big).\end{aligned}$$

Par ailleurs on a pour tout choix de ν et η dans $\mathbb{N}^3$:

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu\in\mathbb{N}^3}\frac{|\mu|!}{\mu!}\sum_{n=1}^{3}\big(\zeta^{\mu+\nu}\odot\zeta_n\big)(x)GT^\nu\big(T^\eta\big)^*G^*\overline{\big(\zeta^{\mu+\eta}\odot\zeta_n\big)(y)}\\&\quad=\sum_{n=1}^{3}\sum_{\mu:\mu_n>0}\frac{\mu_n}{|\mu|}\frac{|\mu|!}{\mu!}\zeta^{\mu+\nu}(x)GT^\nu\big(T^\eta\big)^*G^*\overline{\zeta^{\mu+\eta}(y)}\\&\quad=\sum_{|\mu|>0}\zeta^{\mu+\nu}(x)GT^\nu\big(T^\eta\big)^*G^*\overline{\zeta^{\mu+\eta}(y)},\end{aligned}$$

et donc $K_{s_V}(x,y)=C(x)C(y)^*$ est positive et s_V est une fonction de Schur hyper-analytique.

Références

[1] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, in : Panoramas et Synthèses, vol. 6, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[2] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, Un théorème de type Beurling–Lax dans la boule unité, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (5) (2002) 349–354.

[3] D. Alpay, B. Schneider, M. Shapiro, D. Volok, Fonctions rationnelles et théorie de la réalisation : le cas hyper-analytique, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 975–980.

[4] W. Arveson, The curvature invariant of a Hilbert module over $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$, J. Reine Angew. Math. 522 (2000) 173–236.

[5] L. de Branges, J. Rovnyak, Square Summable Power Series, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[6] R. Delanghe, F. Sommen, V. Souček, Clifford Algebra and Spinor Valued Functions, in: Math. Appl., vol. 53, Kluwer Academic, 1992.