

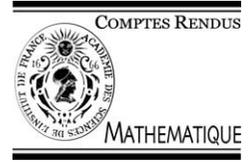


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 623–627



Géométrie différentielle

# Une déformation en famille du complexe de de Rham–Hodge

Jean-Michel Bismut

Département de Mathématique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 5 janvier 2004 ; accepté le 6 janvier 2004

Présenté par Jean-Michel Bismut

---

## Résumé

On donne une déformation de la superconnexion de Levi-Civita associée à une famille d'opérateurs de de Rham, dont la courbure est une famille d'opérateurs hypoelliptiques d'ordre deux le long des fibres du fibré cotangent de la fibration. *Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A deformation in families of Hodge–de Rham theory.** We construct a deformation of the Levi-Civita superconnexion associated to a family of de Rham–Hodge operators, whose curvature is a family of second order hypoelliptic operators along the fibres of the cotangent bundle of the given fibration. *To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## 1. Introduction

Dans les Notes [3] et [4], nous avons construit une déformation naturelle de la théorie de Hodge d'une variété compacte riemannienne  $X$ , et nous avons montré que le laplacien correspondant est un opérateur hypoelliptique sur  $T^*X$ . Nous avons également montré que cette déformation produisait une interpolation entre la théorie de Hodge habituelle de  $X$  et le flot géodésique de  $T^*X$ .

L'objet de cette Note est d'étendre cette construction à une fibration  $p : M \rightarrow S$  de fibre compacte  $X$ . Nous construisons une déformation de la superconnexion de Levi-Civita considérée par Lott et l'auteur [5] pour démontrer un théorème de Riemann–Roch–Grothendieck pour l'image directe des fibrés plats. Soit  $\mathcal{M}$  l'espace total de  $T^*X$ , et soit  $q : \mathcal{M} \rightarrow S$  la projection de fibre  $T^*X$ . La courbure de notre superconnexion est alors un opérateur hypoelliptique le long des fibres  $T^*X$  au dessus de  $S$ . Les résultats des Notes [3] et [4] sont des cas particuliers des résultats de la présente note quand  $S$  est un point.

Dans cette Note, on utilise les notations des Notes [3] et [4]. Les démonstrations complètes sont données dans [2].

---

Adresse e-mail : [Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr](mailto:Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr) (J.-M. Bismut).

## 2. Fibration cotangente et superconnexions

Soient  $M$  et  $S$  des variétés, soit  $p: M \rightarrow S$  une submersion de fibre compacte  $X$ . Soit  $F$  un fibré plat sur  $M$ , soit  $g^F$  une métrique hermitienne sur  $F$ . Soit  $\omega(\nabla^F, g^F)$  la 1-forme sur  $M$ ,

$$\omega(\nabla^F, g^F) = (g^F)^{-1} \nabla^F g^F. \quad (1)$$

Soit  $\mathcal{M}$  l'espace total de  $T^*X$ , et soit  $\pi: \mathcal{M} \rightarrow M$ ,  $q: \mathcal{M} \rightarrow S$  les projections évidentes. Soit  $(\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F), d^{T^*X})$  le complexe de de Rham de long des fibres de  $T^*X$  à coefficients dans  $\pi^*F$ .

Soit  $T^H M$  un fibré horizontal sur  $M$ , de telle sorte que  $TM = T^H M \oplus TX$ , et soit  $P^{TX}: TM \rightarrow TX$  la projection associée. Si  $U \in TS$ , soit  $U^H \in T^H M$  son relevé horizontal. Si  $U, V \in TS$ , on pose

$$T^H(U, V) = -P^{TX}[U^H, V^H]. \quad (2)$$

Alors  $T^H$  est un tenseur. Le fibré  $T^H M$  induit une connexion sur un  $\text{Diff}(X)$  fibré principal. Comme  $\text{Diff}(X)$  agit symplectiquement sur  $T^*X$ , on en déduit que  $T^H M$  a un relèvement canonique  $T^H \mathcal{M}$ , qui est un fibré horizontal sur  $\mathcal{M}$ , tel que la connexion associée préserve la forme symplectique des fibres  $T^*X$ .

On peut donner une autre version de la construction précédente. En effet soit  $\theta = \pi^*p$  la 1-forme canonique le long des fibres  $T^*X$ . On peut relever canoniquement  $\theta$  en une 1-forme sur  $\mathcal{M}$  qui est nulle sur  $T^H M$ . Alors  $\omega = d^{\mathcal{M}}\theta$  est une 2-forme fermée sur  $\mathcal{M}$ , qui induit la forme symplectique  $\omega^V$  le long des fibres  $T^*X$ . On vérifie que  $T^H \mathcal{M}$  est exactement le fibré orthogonal à  $TT^*X$  dans  $T\mathcal{M}$  relativement à  $\omega$ . Soit  $\omega^H$  la restriction de  $\omega$  à  $T^H \mathcal{M}$ . On vérifie que

$$\omega^H = \langle p, T^H \rangle. \quad (3)$$

Si  $\mathcal{T}^H$  est l'analogue de  $T^H$  relativement à  $T^H \mathcal{M}$ , alors  $\mathcal{T}^H(U, V)$  est exactement le champ de vecteurs hamiltonien le long de  $T^*X$  de hamiltonien  $\omega^H(U, V)$ .

Soit  $d^{\mathcal{M}}$  l'opérateur de de Rham agissant sur les formes  $C^\infty$  sur  $\mathcal{M}$  à coefficients dans  $\pi^*F$ . Comme dans [5], on peut considérer  $d^{\mathcal{M}}$  comme une superconnexion plate  $A^{\mathcal{M}}$  sur  $\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)$ .

Soit  $\nabla^{\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)}$  la connexion évidente sur  $\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)$  associée à  $T^H \mathcal{M}$ . Si  $U \in TS$ , si  $U^H \in T^H \mathcal{M}$  est son relèvement horizontal, soit  $L_{U^H}$  l'opérateur de dérivée de Lie correspondant. Si  $s$  est une section  $C^\infty$  de  $\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)$ , on pose en effet

$$\nabla_U^{\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)} s = L_{U^H} s. \quad (4)$$

Alors par [5, Proposition 3.4], on a

$$A^{\mathcal{M}} = d^{T^*X} + \nabla^{\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)} + i_{\mathcal{T}^H}. \quad (5)$$

La forme symplectique le long des fibres  $\omega^V$ , la forme volume induite par  $\omega^V$  et la métrique hermitienne  $g^F$  définissent une forme sesquilinéaire évidente le long des fibres comme dans [3, Éq. (18)]. Soit  $\bar{A}^{\mathcal{M}}$  l'adjoint de la superconnexion  $A^{\mathcal{M}}$  relativement à cette forme sesquilinéaire au sens de Bismut et Lott [5]. Alors  $\bar{A}^{\mathcal{M}}$  est encore une superconnexion plate sur  $\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)$ . De plus si  $\omega(\nabla^F, g^F) = 0$ , alors

$$[A^{\mathcal{M}}, \bar{A}^{\mathcal{M}}] = \nabla^{\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F), 2}. \quad (6)$$

Soit  $g^{TX}$  une métrique  $C^\infty$  sur  $TX$ . On définit la forme bilinéaire  $\eta$  sur  $TT^*X$  comme dans [3, Éq. (25)], de telle sorte que si  $U, V \in TT^*X$ ,

$$\eta(U, V) = \langle \pi_* U, \pi_* V \rangle_{g^{TX}} + \omega^V(U, V). \quad (7)$$

Soit  $\phi: TT^*X \rightarrow T^*T^*X$  le morphisme associé à  $\eta$  comme dans [3, Éq. (17)]. Soit  $\bar{A}'_{\phi}$  la superconnexion adjointe de  $A^{\mathcal{M}}$  relativement à la forme sesquilinéaire sur  $\Omega^\cdot(T^*X, \pi^*F)$  associée à  $\eta$ ,  $g^F$  et à la forme volume sur  $T^*X$ .

On définit  $\lambda_0$  comme en [3, Éq. (27)].

**Proposition 2.1.** *On a les identités,*

$$\begin{aligned} \bar{A}'_{\phi}{}^{\mathcal{M}} &= e^{\lambda_0} \bar{A}'^{\mathcal{M}} e^{-\lambda_0}, \\ \bar{A}'_{\phi}{}^{\mathcal{M}} &= \bar{A}'^{\mathcal{M}} - [\bar{A}'^{\mathcal{M}}, \lambda_0]. \end{aligned} \tag{8}$$

### 3. Une fonction hamiltonienne

Soit  $\mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $C^\infty$ .

**Définition 3.1.** On pose

$$\mathfrak{C}'_{\mathcal{H}}{}^{\mathcal{M}} = e^{-\mathcal{H}} A'{}^{\mathcal{M}} e^{\mathcal{H}}, \quad \bar{\mathfrak{C}}'_{\phi, \mathcal{H}}{}^{\mathcal{M}} = e^{\mathcal{H}} \bar{A}'_{\phi}{}^{\mathcal{M}} e^{-\mathcal{H}}. \tag{9}$$

Alors  $\mathfrak{C}'_{\mathcal{H}}{}^{\mathcal{M}}$ ,  $\bar{\mathfrak{C}}'_{\phi, \mathcal{H}}{}^{\mathcal{M}}$  sont encore des superconnexions sur  $\Omega'(T^*X, \pi^*F)$ . Dans la suite, on effectuera cette construction en remplaçant  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H} - \omega^H$ .

**Définition 3.2.** On pose

$$\begin{aligned} A'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{C}}'_{\phi, 2(\mathcal{H} - \omega^H)}{}^{\mathcal{M}} + A'{}^{\mathcal{M}}), & B'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{C}}'_{\phi, 2(\mathcal{H} - \omega^H)}{}^{\mathcal{M}} - A'{}^{\mathcal{M}}), \\ \mathfrak{C}'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{C}}'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} + \mathfrak{C}'_{\mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}}), & \mathfrak{D}'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{C}}'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} - \mathfrak{C}'_{\mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}}). \end{aligned} \tag{10}$$

On a de manière évidente,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} &= e^{-(\mathcal{H} - \omega^H)} A'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} e^{(\mathcal{H} - \omega^H)}, \\ \mathfrak{D}'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} &= e^{-(\mathcal{H} - \omega^H)} B'_{\phi, \mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}} e^{(\mathcal{H} - \omega^H)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Par (11), on peut raisonner de la même manière sur l'un des deux couples qui y apparaissent.

Alors  $A'_{\phi, 2\mathcal{H} - \omega^H}{}^{\mathcal{M}}$  est une superconnexion sur  $\Omega'(T^*X, \pi^*F)$ , et  $B'_{\phi, 2(\mathcal{H} - \omega^H)}{}^{\mathcal{M}}$  est une section de  $\Lambda'(T^*S) \widehat{\otimes} \text{End}(\Omega'(T^*X, \pi^*F))$ .

### 4. Une formule de Lichnerowicz pour la courbure

Soit  $\nabla^{TX}$  la connexion euclidienne sur  $TX$  construite dans [1], qui est canoniquement associée à  $g^{TX}$  et  $T^H M$ . Soit  $R^{TX}$  la courbure de  $\nabla^{TX}$ . La connexion  $\nabla^{TX}$  induit un scindage  $TT^*X = TX \oplus T^*X$ , et l'identification  $\Lambda'(T^*T^*X) = \Lambda'(T^*X) \widehat{\otimes} \Lambda'(TX)$ .

Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base orthonormale de  $TX$ , soit  $e^1, \dots, e^n$  la base duale. Soit  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$  et  $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n$  d'autres copies de ces bases. Alors  $e_1, \dots, e_n, \hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n$  est une base de  $TT^*X$ , et  $e^1, \dots, e^n, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$  est la base duale.

Pour des raisons multiples, on doit conjuguer les superconnexions précédentes par des automorphismes non triviaux. En particulier, si  $A$  est l'un des objets construits précédemment, on désigne par  $\underline{A}$  l'objet obtenu à partir de  $A$  en effectuant les substitutions suivantes :

- Les  $e^i$  sont inchangés.
- Les  $i_{e_i}$  sont changés en  $i_{e_i + \hat{e}_i}$ .
- Les  $\hat{e}_i$  sont changés en  $i_{\hat{e}_i}$ .
- Les  $i_{\hat{e}^i}$  sont changés en  $\hat{e}^i - e^i$ .

Notons que les relations de commutation évidentes entre opérateurs ne sont pas modifiées par ces substitutions.

Si  $U \in TS$ ,  $V \in TX$ , on pose

$$T(U^H, V) = \frac{1}{2} L_{U^H} g^{TX} V. \quad (12)$$

En combinant (2) et (6), on obtient le tenseur  $T$  sur  $M$  qui a été considéré dans [1]. Soit  $f_1, \dots, f_m$  une base de  $TS$ , et soit  $f^1, \dots, f^m$  la base duale. On pose

$$T^0 = \langle T(f_\alpha^H, e_i), e^j \rangle f^\alpha \hat{e}^i e_j, \quad (13)$$

de telle sorte que

$$\langle T^0, p \rangle = \langle T(f_\alpha^H, e_i), p \rangle f^\alpha \hat{e}^i. \quad (14)$$

Si  $A$  est l'un des objets précédents, on pose

$$\hat{A} = \exp(\langle T^0, p \rangle) A \exp(-\langle T^0, p \rangle). \quad (15)$$

Soit  $\mathcal{H}^c = c|p|^2/2$ . Soit  $Y^{\mathcal{H}}$  le champ de vecteurs hamiltonien sur  $T^*X$  associé à  $\mathcal{H} = |p|^2/2$ . Soit  $T^{\bar{H}}\mathcal{M}$  le sous-fibré horizontal de  $T\mathcal{M}$  induit par  $\nabla^{TX}$ , de telle sorte que  $T\mathcal{M} = T^{\bar{H}}\mathcal{M} \oplus T^*X$ . Dans la suite, les  $e^i$ ,  $\hat{e}_i$  sont considérées comme des formes sur  $\mathcal{M}$  qui s'annulent sur  $T^{\bar{H}}\mathcal{M}$ .

Soit  $L_{Y^{\mathcal{H}}}$  l'opérateur de dérivée de Lie dans la fibre  $T^*X$  associé à  $Y^{\mathcal{H}}$ , et soit  $\mathcal{L}_{Y^{\mathcal{H}}}$  l'opérateur de dérivée de Lie correspondant agissant sur  $\mathcal{M}$ . On a les identités,

$$\begin{aligned} L_{Y^{\mathcal{H}}} &= \nabla_p^{\Lambda(T^*X) \otimes \Lambda(TX) \otimes F} + \hat{e}_i i_{e_i} + \langle R^{T^*X}(p, e_i) p, e_j \rangle e^i i_{\hat{e}_j}, \\ \mathcal{L}_{Y^{\mathcal{H}}} &= L_{Y^{\mathcal{H}}} - \langle T(f_\alpha^H, p), e^i \rangle f^\alpha i_{e_i} + \langle R^{T^*X}(p, f_\alpha^H) p, e_i \rangle f^\alpha i_{\hat{e}_i}. \end{aligned} \quad (16)$$

On désigne encore par  $L_{Y^{\mathcal{H}}}$ ,  $\mathcal{L}_{Y^{\mathcal{H}}}$  les opérateurs dans (16) obtenus en remplaçant  $\hat{e}_i$ ,  $i_{\hat{e}_i}$  par  $i_{\hat{e}_i}$ ,  $\hat{e}^i$ .

Rappelons que  $\theta$  est une 1-forme sur  $\mathcal{M}$ , et que  $\omega = d^{\mathcal{M}}\theta$ . On peut exprimer  $\omega$  à l'aide des variables  $e^i$ ,  $\hat{e}_i$ ,  $f^\alpha$ . On note  $A^{\mathcal{M}}\theta$  l'objet obtenu à partir de  $\omega$  en remplaçant  $\hat{e}_i$ ,  $i_{\hat{e}_i}$  par  $i_{\hat{e}_i}$ ,  $\hat{e}^i$ .

**Théorème 4.1.** *On a l'identité,*

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{\mathfrak{C}}}_{\phi, \mathcal{H}^c - \omega^H}^{\mathcal{M}, 2} &= \frac{1}{4} (-\Delta^V + c^2 |p|^2 + c(2i_{\hat{e}_i} \hat{e}^i - n)) + \frac{1}{4} \langle e_i, R^{TX} e_j \rangle \hat{e}^i \hat{e}^j \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\hat{e}_i} - \frac{1}{4} \nabla^{\Lambda(T^*T^*X) \otimes F} \hat{\omega}(\nabla^F, g^F) - \frac{1}{4} \omega(\nabla^F, g^F)^2 \\ &\quad - \frac{c}{2} \left( \mathcal{L}_p + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(p) + \hat{A}^{\mathcal{M}}\theta \right). \end{aligned} \quad (17)$$

## 5. Courbure hypoelliptique et courbure ordinaire

Pour  $a \in \mathbf{R}^*$ , soit  $r_a$  la transformation de  $\mathcal{M}$  donnée par  $p \rightarrow ap$ . Dans l'opérateur  $\widehat{\underline{\mathfrak{C}}}_{\phi, \mathcal{H}^c - \omega^H}^{\mathcal{M}, 2}$ , on remplace  $\hat{e}^i$ ,  $i_{\hat{e}_i}$  par  $i_{\hat{e}_i}$ ,  $\hat{e}_i$ . On conjugue l'opérateur obtenu par  $\exp(\mathcal{H}^c)$ . On obtient ainsi un opérateur  $\widehat{\underline{\mathfrak{A}}}_{\phi, \mathcal{H}^c - \omega^H}^{\mathcal{M}, 2}$ . Pour  $c > 0$ , on a

$$r_{1/\sqrt{c}}^* \widehat{\underline{\mathfrak{A}}}_{\phi, \mathcal{H}^c - \omega^H}^{\mathcal{M}, 2} r_{\sqrt{c}}^* = c a'_+ + \sqrt{c} b'_+ + c'. \quad (18)$$

Dans (18), les opérateurs dans le membre de droite peuvent être calculés explicitement. Pour  $c < 0$ , on a une formule comparable, où les indices  $+$  doivent être remplacés par  $-$ .

Soit  $o(TX)$  le fibré d'orientation de  $TX$ . Soit  $C_{\pm}$  la superconnexion de Levi-Civita sur  $\Omega^{\cdot}(X, F)$  ou sur  $\Omega^{\cdot}(X, F \otimes o(TX))$  qui est construite dans [5], et qui est associée à  $T^H M, g^{TX}, g^F$ . Rappelons que les opérateurs  $Q_{\pm}^{T^*X}$  ont déjà été définis dans [4]. Leur définition est ici essentiellement la même. On plonge  $\Omega^{\cdot}(X, F)$  et  $\Omega^{\cdot}(X, F \otimes o(TX))$  dans  $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$  (après tensorisation par  $\Lambda^{\cdot}(T^*S)$ ) comme dans [4].

On a alors un résultat qui servira à montrer que notre construction est effectivement une déformation de la construction de [5]. Ce résultat étend le résultat correspondant dans [4, Théorème 3.1] dans le cas où  $S$  est un point.

**Théorème 5.1.** *On a l'identité,*

$$Q_{\pm}^{T^*X} (c' - b'_{\pm} a'^{-1}_{\pm} b'_{\pm}) Q_{\pm}^{T^*X} = 2C_{\pm}^2. \tag{19}$$

**Références**

[1] J.-M. Bismut, The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, *Invent. Math.* 83 (1) (1986) 91–151.  
 [2] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle (2004) à paraître.  
 [3] J.-M. Bismut, Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338 (2004) sous presse.  
 [4] J.-M. Bismut, Le Laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338 (2004) sous presse.  
 [5] J.-M. Bismut, J. Lott, Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion, *J. Amer. Math. Soc.* 8 (2) (1995) 291–363.