

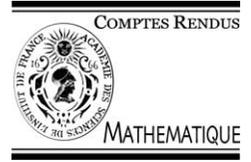


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 235–238



Systèmes dynamiques

Itération de pliages de quadrilatères

Yves Benoist^a, Dominique Hulin^b

^a *École normale supérieure-CNRS, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris, France*

^b *Université Paris-Sud, bâtiment 425, Orsay 91405, France*

Reçu le 20 juin 2003 ; accepté après révision le 9 décembre 2003

Présenté par Jean-Christophe Yoccoz

Résumé

Partant d'un quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ de \mathbb{R}^2 , on construit une suite $q_n = (A_{4n+1}, \dots, A_{4n+4})$ de quadrilatères par itération de pliages : $q_n = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(q_{n-1})$, où le pliage φ_j remplace le sommet numéro j par son symétrique par rapport à la diagonale opposée. Dans cette Note, nous étudions le comportement dynamique de la suite q_n . **Pour citer cet article : Y. Benoist, D. Hulin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Iteration of quadrilateral foldings. Starting with a quadrilateral $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ of \mathbb{R}^2 , one constructs a sequence of quadrilaterals $q_n = (A_{4n+1}, \dots, A_{4n+4})$ by iteration of foldings: $q_n = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(q_{n-1})$ where the folding φ_j replaces the vertex number j by its symmetric with respect to the opposite diagonal.

We study the dynamical behavior of this sequence. In particular, we prove that:

- The drift $v := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} q_n$ exists.
- When none of the q_n is isometric to q_0 , then the drift v is zero if and only if one has $\max a_j + \min a_j \leq \frac{1}{2} \sum a_j$, where a_1, \dots, a_4 are the sidelengths of q_0 .
- For Lebesgue almost all q_0 the sequence $(q_n - nv)_{n \geq 1}$ is dense on a bounded analytic curve with a center, or an axis of symmetry. However, for Baire generic q_0 , the sequence $(q_n - nv)_{n \geq 1}$ is unbounded. **To cite this article: Y. Benoist, D. Hulin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Pliage cyclique

A chaque quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, on peut associer d'autres quadrilatères obtenus par pliage le long d'une diagonale. Ainsi, pour $j = 1, \dots, 4$, le quadrilatère $\varphi_j(q_0)$ est obtenu à partir de q_0 en remplaçant le sommet A_j par son symétrique $s_{\Delta_j}(A_j)$ par rapport à la diagonale Δ_j joignant les deux voisins de A_j .

Adresses e-mail : Yves.Benoist@ens.fr (Y. Benoist), Dominique.Hulin@math.u-psud.fr (D. Hulin).

Partons du quadrilatère q_0 et considérons la suite q_n de quadrilatères obtenue en pliant de façon cyclique les sommets numéros 1, 2, 3, 4. Autrement dit, on introduit $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $q_n := \varphi^n(q_0)$. Nous voulons décrire le comportement dynamique de cette suite q_n . On notera $q_n = (A_{4n+1}, A_{4n+2}, A_{4n+3}, A_{4n+4})$. On a donc $A_5 = s_{A_2 A_4}(A_1)$ puis $A_6 = s_{A_3 A_5}(A_2)$, etc.

Remarquons tout d'abord que la longueur des côtés $a_1 = A_1 A_2$, $a_2 = A_2 A_3$, $a_3 = A_3 A_4$ et $a_4 = A_4 A_1$ est préservée par le pliage et donc que la suite q_n de quadrilatères ne s'écrase pas sur un point... contrairement à ce que pourrait laisser croire la terminologie « itération de pliages ». Cette suite q_n est particulièrement simple à étudier lorsque q_0 est de type k -périodique, c'est-à-dire lorsque $(\varphi_4 \circ \varphi_3)^k(q_0) = q_0$. Le quadrilatère q_k est alors l'image de q_0 par une isométrie de \mathbb{R}^2 . Selon que cette isométrie a un point fixe ou non, la suite q_n reste bornée ou tend vers l'infini.

2. Principaux résultats

Nous supposons que $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$ et que $(a_1, a_4) \neq (a_2, a_3)$ de sorte que la suite q_n des quadrilatères obtenue par pliage cyclique est bien définie.

La proposition suivante affirme l'existence d'une dérive pour le pliage cyclique.

Proposition 2.1. *Soit q_n la suite des quadrilatères obtenue par pliage cyclique à partir d'un quadrilatère q_0 . Alors, la limite $v(q_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} q_n$ existe.*

Par construction, la dérive $v(q_0)$ est un quadrilatère dont les quatre sommets sont confondus, et s'identifie donc à un vecteur de \mathbb{R}^2 . Voici un critère d'annulation de cette dérive. On note M le plus grand côté, m le plus petit côté et p le demi-périmètre de q_0 .

Théorème 2.2. *On suppose q_0 de type non périodique. Alors on a l'équivalence :*

$$v(q_0) = 0 \iff M + m \leq p.$$

Définition 2.3. Un quadrilatère q_0 est de type NC si $M + m \leq p$ et de type C sinon.

Remarques. – Pour un quadrilatère de type périodique, la nullité de $v(q_0)$ équivaut au fait que la suite q_n est bornée.

– Géométriquement, cette condition « q_0 de type C » signifie que l'on peut déformer continûment le quadrilatère q_0 en une image miroir $\sigma(q_0)$ sans changer la longueur des côtés et sans passer par un quadrilatère plat.

– Tous les quadrilatères de période stricte $2k$ sont de type NC et vérifient $v(q_0) = 0$; d'autre part, parmi les quadrilatères de type n -périodique et de type C, presque tous vérifient $v(q_0) \neq 0$.

– Malheureusement, il existe des quadrilatères de type $(4k + 2)$ -périodiques et de type NC tels que $v(q_0) \neq 0$ et il existe aussi des quadrilatères de type $4k$ -périodique et de type C tels que $v(q_0) = 0$.

On en déduira le :

Corollaire 2.4. *Soit q_0 un quadrilatère de type non périodique. La suite q_n obtenue par pliage cyclique tend vers l'infini si et seulement si q_0 est de type C.*

La proposition suivante décrit le comportement du pliage cyclique par rapport à sa dérive.

Proposition 2.5. (a) *Pour presque tout quadrilatère q_0 , la suite de quadrilatères $q_n - nv(q_0)$ est dense sur une courbe analytique lisse bornée C .*

- (b) Pour un ensemble générique de quadrilatères q_0 , la suite de quadrilatères $q_n - n v(q_0)$ n'est pas bornée.
- (c) Si la suite de quadrilatères $q_n - n v(q_0)$ est bornée, elle est soit convergente, soit périodique, soit dense sur une courbe C de classe C^0 .

Remarques. – Cette courbe $C \subset (\mathbb{R}^2)^4$ n'est pas toujours de classe C^1 .

– Appelons encore symétrie la transformation de l'espace $(\mathbb{R}^2)^4$ induite par une symétrie de \mathbb{R}^2 . La courbe C est invariante par une symétrie centrale lorsque q_0 est de type NC, et par une symétrie axiale d'axe parallèle à la dérivée $v(q_0)$ lorsque q_0 est de type C. Elle admet une symétrie supplémentaire lorsque q_0 est isocèle (i.e. lorsque $a_1 = a_3$).

– La condition *presque tout* signifie que l'assertion est vraie en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. *Ensemble générique* signifie ensemble dont le complémentaire est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Un tel ensemble est dense. *Courbe C^0* signifie sous-variété de dimension 1 et de classe C^0 .

L'énoncé suivant complète le Corollaire 2.4 pour les quadrilatères de type NC.

Corollaire 2.6. (a) Pour presque tout quadrilatère q_0 de type NC, la suite q_n est dense sur une courbe analytique bornée C .

(b) Pour un ensemble générique de quadrilatères q_0 de type NC, la suite q_n n'est pas bornée.

(c) Si la suite q_n est bornée, elle est soit convergente, soit périodique, soit dense sur une courbe C de classe C^0 .

Remarques. – Pour les quadrilatères de type non périodique, le fait que la suite q_n soit bornée ne dépend que des côtés a_1, \dots, a_4 .

– Malheureusement, une telle assertion n'est pas toujours vraie pour les quadrilatères de type périodique.

L'étude de la dynamique de cette suite q_n a été initiée par K. Charter, J. Esch et T. Rogers dans [3] et [4]. Les Corollaires 2.4, 2.6 et leurs remarques sont vrais pour les quadrilatères isocèles. Ce qui répond aux questions et conjectures de ces deux articles (voir [3], p. 222).

3. Méthode suivie

On note $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et $Q = Q_{\mathbf{a}}$ l'ensemble des quadrilatères de côtés a_1, a_2, a_3 et a_4 . On note $\dot{Q} = \dot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des translations et $\ddot{Q} = \ddot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des isométries positives de \mathbb{R}^2 .

Pour tout quadrilatère q dans Q , on note \dot{q} et \ddot{q} ses images dans \dot{Q} et \ddot{Q} . On note $\varphi_{j_1 \dots j_\ell} = \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_\ell}$ de sorte que $\varphi := \varphi_{4321}$ et $q_n = \varphi^n(q_0)$. Pour toute transformation ψ de Q qui commute aux isométries de \mathbb{R}^2 , par exemple $\psi = \varphi_{j_1 \dots j_\ell}$, on note $\dot{\psi}$ et $\ddot{\psi}$ les transformations de \dot{Q} et \ddot{Q} induites par ψ .

Pour étudier le système dynamique (Q, φ) , nous allons tout d'abord étudier les systèmes dynamiques $(\ddot{Q}, \ddot{\varphi})$ et $(\dot{Q}, \dot{\varphi})$. En effet l'espace Q est de dimension 4 et non compact, tandis que les espaces \ddot{Q} et \dot{Q} sont compacts et de dimensions respectives 1 et 2. On supposera, pour simplifier notre exposition, que l'on a toujours $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \neq 0$.

3.1. La dynamique sur \ddot{Q}

Comme dans [3], la courbe \ddot{Q} est une courbe elliptique réelle et la transformation $\ddot{\varphi}_{21} = \ddot{\varphi}_{43}$ est une translation sur cette courbe elliptique. Il est remarquable que ce système dynamique $(\ddot{Q}, \ddot{\varphi}_{43})$ est conjugué au système dynamique de Poncelet pour deux cercles dont les centres sont à distance $a := a_1 a_3$, le cercle circonscrit ayant pour rayon $R := a_2 a_4$ et le cercle inscrit ayant pour rayon $r := \frac{1}{2} |a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2|$ (voir [2] et [5] pour le lien

entre le système dynamique de Poncelet et les courbes elliptiques). Il existe sur \dot{Q} une fonction $\dot{\varphi}$ -invariante h . Elle est donnée par $h(\dot{q}_0) = r_1 r_2 r_3 / r_4$ où $r_j = \frac{1}{a_j}(A_{j+1} - A_j)$ pour $j = 1, 2, 3$, et $r_4 = \frac{1}{a_4}(A_1 - A_4)$. Lorsque q_0 n'est pas de type périodique, la suite $\dot{q}_n = \dot{\varphi}^n(\dot{q}_0)$ s'équirépartit sur une courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ de \dot{Q} en suivant une loi statistique μ : cette courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est une composante connexe d'un revêtement à deux feuillets de \dot{Q} et μ est la probabilité invariante sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Ce qui permet de démontrer la Proposition 2.1.

3.2. La dynamique sur \dot{Q}

Introduisons, pour $j = 1, \dots, 4$, la loi μ_j de la suite des directions $\frac{1}{a_j}(A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$.

Lorsque q_0 est de type NC, le quadrilatère $-\dot{q}_0$ est dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. La loi μ est alors symétrique par rapport à l'origine et toutes les lois μ_j coïncident. Ce qui prouve que la dérive $v(q_0)$ est nulle.

Lorsque q_0 est de type C, notons j_0 le numéro du plus grand côté de q_0 . Les directions $\frac{1}{a_j}(A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$ sont alors toutes dans un même demi-espace et les probabilités μ_j coïncident sauf pour $j = j_0$ où ces directions sont dans le demi-espace opposé et où la probabilité μ_{j_0} est la probabilité opposée. A cause de l'inégalité triangulaire, la dérive due au plus grand côté n'arrivera pas à annuler la somme des dérivées dues aux trois autres côtés. Ce qui prouve que la dérive $v(q_0)$ est non nulle. On peut calculer cette dérive : elle est parallèle à $\sqrt{-h(\dot{q}_0)}$, a pour norme

$$|v(q_0)| = \frac{(p - M)\pi}{K} \quad \text{où } K := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} \text{ et } k^2 := \frac{(a + R)^2 - r^2}{4aR} \in]0, 1[,$$

et elle fait, pour tout $n \geq 1$, un angle aigu avec les vecteurs $A_{n+1} - A_n$, sauf pour ceux de longueur M , auquel cas cet angle est obtus. Ce qui permet de démontrer le Théorème 2.2.

3.3. La dynamique sur Q

Nous avons vu que l'action de $\dot{\varphi}$ sur la courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est conjuguée à une rotation. On note $\rho_{\mathbf{a}}$ son nombre de rotation. Au dessus de cette courbe, le pliage cyclique « recentré » $\varphi - v(q_0)$ est donc conjugué à un système dynamique $\varphi_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ donné par $\varphi_{\mathbf{a}}(x, v) = (x + \rho_{\mathbf{a}}, v + f_{\mathbf{a}}(x))$ où la fonction $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique explicite de moyenne nulle. Lorsque $\rho_{\mathbf{a}}$ a de bonnes propriétés diophantiennes, les orbites de $\varphi_{\mathbf{a}}$ sont denses sur des courbes analytiques réelles. Lorsque $\rho_{\mathbf{a}}$ n'a pas de bonnes propriétés diophantiennes, les orbites de $\varphi_{\mathbf{a}}$ ne sont pas bornées. Ce qui permet de démontrer la Proposition 2.5. Les détails sont donnés dans [1].

Références

- [1] Y. Benoist, D. Hulin, Itération de pliages de quadrilatères, Preprint, 2003.
- [2] H. Bos, C. Kers, F. Oort, D. Raven, Poncelet's closure theorem, *Exposition. Math.* 5 (1987) 289–364.
- [3] K. Charter, T. Rogers, The dynamics of quadrilateral folding, *Experiment. Math.* 2 (1993) 209–222.
- [4] J. Esch, T. Rogers, Dynamics on elliptic curves arising from polygonal folding, *Discrete Comput. Geom.* 25 (2001) 477–502.
- [5] P. Griffiths, J. Harris, On Cayley's explicit solution to Poncelet porism, *Enseign. Math.* 24 (1978) 31–40.