

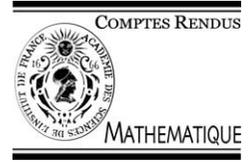


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 207–212



Équations aux dérivées partielles

Comportement à très basses énergies de la densité d'états intégrée du modèle d'Anderson non borné inférieurement

Olfa Saad

Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 26 novembre 2003 ; accepté le 1^{er} décembre 2003

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous obtenons un développement asymptotique complet à très basses énergies de la densité d'états intégrée du modèle d'Anderson non borné. Nous étudions aussi la dépendance de cette asymptotique par rapport à la décroissance à l'infini de la fonction de répartition du potentiel aléatoire. *Pour citer cet article : O. Saad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

Very low energy behaviour of the integrated density of states of the unbounded Anderson model. We obtain a complete asymptotic expansion of the integrated density of states of the unbounded Anderson model at low energies. We also study the evolution of this asymptotic when the decay of the tail of the distribution of the random potential increases. *To cite this article: O. Saad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.

Abridged English version

We consider the Anderson model acting on $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$H_\omega := -\Delta + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k V(\cdot - k), \quad (1)$$

where $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ is a nonnegative family of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables. Let P_0 be the probability measure of ω_0 . We denote by $F(\lambda) := P_0(\omega_0 \geq \lambda)$, the tail of the probability distribution of ω_0 . We assume that

(H1) $F(\lambda) > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (i.e., the random variable ω_0 is unbounded from above).

(H2) There exists $A \gg 1$ such that F is absolutely continuous on $[A, +\infty[$ and

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)} = -\infty.$$

Adresse e-mail : saad@math.univ-paris13.fr (O. Saad).

- (H3) (i) $V \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^d, [-1, 0])$.
 (ii) V admits a unique non-degenerate minimum at 0, i.e.,

$$V'(0) = 0, \quad V''(0) > 0, \quad V^{-1}(\{-1\}) = \{0\}.$$

We denote by $N(-\lambda)$, the integrated density of states associated to H_ω (see (8)). We study the asymptotic behavior of $N(-\lambda)$ when $\lambda \rightarrow +\infty$. To describe our results, we need the following reference model

$$H_\lambda := -\Delta + \lambda V(x), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

The assumption (H3) implies that the infimum of the spectrum of H_λ is an isolated simple eigenvalue. Let $\inf \sigma(H_\lambda) =: -E_0(\lambda)$. We denote by $y(\cdot)$ the reciprocal function of $E_0(\cdot)$. It is well known (see [1]) that $y(\lambda)$ has a complete asymptotic expansion in powers of $\lambda^{-1/2}$ that reads

$$y(\lambda) \sim \lambda + e_0 \lambda^{1/2} + \sum_{j \in \mathbb{N}} e'_j \lambda^{-j/2} \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty. \tag{2}$$

Here e_0 is the first eigenvalue of the harmonic oscillator $-\Delta + \frac{1}{2}\langle V''(0)x, x \rangle$. Let d_V (resp. d_{V_0}) be the Agmon distance associated to the metric $\max(V + 1, 0) dx^2$ (resp. $\max(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} V(\cdot - k) + 1, 0) dx^2$) where dx^2 is the Riemannian metric on \mathbb{R}^d (see [1]). We define

$$S_0 := \inf_{a \in \mathbb{Z}^d} d_{V_0}(0, a),$$

$$\bar{S}_0 := \inf(d_V(0, \partial C_0), S_0),$$

where ∂C_0 denotes the boundary of $C_0 :=]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^d$. Let $G = -\ln F$. Suppose that

$$\frac{G'(\lambda)}{G(\lambda)} = o(e^{S_0 \sqrt{\lambda}}) \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty. \tag{3}$$

Our main result is the following:

Theorem 0.1. *Assume (H1)–(H3) and (3). For every $S \in]0, \bar{S}_0[$, $\beta > 0$ and $\gamma > 0$, there exists $a > 0$, $K > 0$ and $\lambda_{S,\gamma,\beta} > 0$ such that for $\lambda > \lambda_{S,\gamma,\beta}$, we have*

$$F(y(\lambda) + a e^{-S\sqrt{\lambda}}) - K F(y(\lambda))^{2-\gamma} \leq N(-\lambda) \leq F(y(\lambda) - a e^{-S\sqrt{\lambda}})(1 + \mathcal{O}(e^{-\beta\sqrt{\lambda}})) + K F(y(\lambda))^{2-\gamma}. \tag{4}$$

The term $F(y(\lambda))^{2-\gamma}$ represents the probability of having at least two random variables of size $y(\lambda)$. Under the assumption (3), $F(y(\lambda))^{2-\gamma} = o(F(y(\lambda) \pm a e^{-S\sqrt{\lambda}}))$. In this case, the principal term of $N(-\lambda)$ is due to long fluctuations of only one random variable. We call that the behavior of $N(-\lambda)$ is *classical*. Moreover, if we suppose that there exists $S \in]0, \bar{S}_0[$ such that

$$G'(\lambda) = \mathcal{O}(e^{S\sqrt{\lambda}}) \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty, \tag{5}$$

then we can neglect the *tunneling effect* term $e^{-S\sqrt{\lambda}}$ in the leading term of (4). More precisely, we have

Corollary 0.2. *Assume (H1)–(H3) and (5) are satisfied. Then, for any $\varepsilon > 0$, there exists $\lambda_\varepsilon > 0$ such that for $\lambda > \lambda_\varepsilon$, we have*

$$N(-\lambda) = F(y(\lambda))(1 + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}})).$$

The term $F(y(\lambda))$ represents the probability that the infimum of the spectrum of the operator $H_{\omega_0} := -\Delta + \omega_0 V$ be below $-\lambda$. In this case, $N(-\lambda)$ behaves as if H_ω were the direct sum of infinitely many *i.i.d. copies* of operators H_{ω_0} each one located at a site of \mathbb{Z}^d .

Remark 1. If G admits a complete asymptotic expansion, Theorem 0.1 (resp. Corollary 0.2) gives a complete asymptotic expansion of $\ln N$ (resp. N) given by that of $-G(y(\lambda))$ (resp. $F(y(\lambda))$). The first term was given in [2].

1. Introduction

On considère le modèle d’Anderson sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$H_\omega := -\Delta + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k V(\cdot - k), \tag{6}$$

où $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est une famille de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Soit $F(\lambda) := P_0(\omega_0 \geq \lambda)$ la fonction de répartition de ω_0 , où P_0 est la mesure de probabilité de ω_0 . La fonction F est décroissante et à valeurs dans $[0, 1]$. Dans la suite, on suppose que

(H1) $F(\lambda) > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (i.e. la variable aléatoire ω_0 est non bornée supérieurement).

(H2) Il existe $A \gg 1$ tel que F est absolument continue sur $[A, +\infty[$ et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)} = -\infty. \tag{7}$$

(H3) (i) $V \in C_0^\infty(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^d, [-1, 0])$.

(ii) V admet un unique minimum non dégénéré avec $V(0) = -1$, i.e.

$$V'(0) = 0, \quad V''(0) > 0, \quad V^{-1}(\{-1\}) = \{0\}.$$

Sous les hypothèses (H1), (H3(i)) et (7), H_ω est, ω -presque sûrement, essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme H_ω est ergodique, il existe Σ un fermé de \mathbb{R} tel que $\sigma(H_\omega) = \Sigma$, ω -presque sûrement [2]. De plus $V \leq 0$ et ω_0 n’est pas bornée supérieurement; ceci assure que $\inf \Sigma = -\infty$.

La densité d’états intégrée associée à H_ω au point $\lambda \in \mathbb{R}$ est définie comme une limite thermodynamique de la façon suivante. Soit C_L , le cube centré en 0 et de côté L . On considère $H_{\omega,L}^D$ (resp. $H_{\omega,L}^{Ne}$) la restriction de H_ω au cube C_L avec les conditions au bord de Dirichlet (resp. Neumann). Dans ce qui suit, l’indice « \bullet » désigne D ou Ne . Comme la résolvante de $H_{\omega,L}^\bullet$ est compacte, son spectre est discret. Soit $N_{\omega,L}^\bullet(\lambda)$, le nombre de valeurs propres de $H_{\omega,L}^\bullet$ qui sont inférieures à λ . On définit

$$N(\lambda) := \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(C_L)} N_{\omega,L}^\bullet(\lambda). \tag{8}$$

Il est bien connu que cette limite existe ω -presque sûrement, elle est non aléatoire, croissante et indépendante des conditions au bord choisies pour restreindre H_ω à C_L [2]. De plus, si on désigne par $\mathbb{E}(X)$, l’espérance mathématique de X , on a (voir [2])

$$\frac{1}{\text{vol}(C_L)} \mathbb{E}(N_{\omega,L}^D(\lambda)) \leq N(\lambda) \leq \frac{1}{\text{vol}(C_L)} \mathbb{E}(N_{\omega,L}^{Ne}(\lambda)).$$

Heuristiquement, $N(-\lambda)$ est interprétée comme le nombre moyen par unité de volume de valeurs propres de $H_{\omega,L}^\bullet$ qui sont inférieures à $-\lambda$. Une telle valeur propre est créée seulement si, au moins une des variables aléatoires prend des valeurs supérieures à λ . On distingue deux cas :

1. soit une seule variable aléatoire ω_k est supérieure à λ et toutes les autres sont strictement inférieures à λ ;

2. soit au moins deux variables aléatoires *distinctes* sont supérieures à λ .

Notons ces événements respectivement Ω_1 et Ω_2 . Comme ces deux événements sont complémentaires, on décompose

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\text{vol}(C_L)} N_{\omega,L}^\bullet(-\lambda)\right) = N_{1,L}^\bullet(-\lambda) + N_{2,L}^\bullet(-\lambda),$$

où $N_{i,L}^\bullet(-\lambda) := \frac{1}{\text{vol}(C_L)} \mathbb{E}(N_{\omega,L}^\bullet(-\lambda) \mathbb{1}_{\Omega_i})$, $i \in \{1, 2\}$. Pour $\omega \in \Omega_1$, afin de créer une valeur propre inférieure à $-\lambda$ ($\lambda \rightarrow +\infty$), ω_k doit être plus grande que y_λ , où $y_\lambda > \lambda$ (voir [1]). Si F satisfait (7), alors $N_{1,L}^\bullet(-\lambda)$ est de taille $F(y_\lambda)$ et la quantité $N_{2,L}^\bullet(-\lambda)$ est majorée par $L^d F(\lambda)^{2-\gamma}$, $\gamma > 0$. Suivant la vitesse de décroissance de F , c'est l'une ou l'autre de ces deux quantités qui domine (L est choisi suffisamment grand en fonction de λ). Si le terme principal de $N(-\lambda)$ est dû à $N_{1,L}^\bullet(-\lambda)$, on dit que l'asymptotique de N est classique : c'est le cas qui nous intéressera dans cette note. Une étude similaire a déjà été faite dans le cas discret [3]. Dans le cas continu, le premier terme de l'asymptotique de N est connu [2]. Dans ce travail, nous obtenons des asymptotiques complètes pour $N(-\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

2. Le modèle de référence

Pour énoncer les résultats, on introduit le modèle de référence suivant :

$$H_\lambda := -\Delta + \lambda V(x), \quad \lambda \gg 1.$$

L'opérateur H_λ est auto-adjoint sur $H^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $V^{-1}(]-\infty, 0])$ est un ensemble compact, le spectre de H_λ dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ est constitué par des valeurs propres isolées de multiplicité finie. On note $\inf \sigma(H_\lambda) =: -E_0(\lambda)$. La fonction E_0 est croissante et convexe. On désigne par $y(\lambda)$ sa fonction réciproque. Il est bien connu (voir [1]) que $y(\lambda)$ admet un développement asymptotique complet en puissances de $\lambda^{-1/2}$ donné par

$$y(\lambda) \sim \lambda + e_0 \lambda^{1/2} + \sum_{j \in \mathbb{N}} e'_j \lambda^{-j/2}, \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

où e_0 est la première valeur propre de l'oscillateur harmonique $-\Delta + \frac{1}{2} \langle V''(0)x, x \rangle$.

3. Énoncé des résultats

Soit d_V (resp. d_{V_0}) la distance d'Agmon associée à la métrique $\max(V + 1, 0) dx^2$ (resp. $\max(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} V(\cdot - k) + 1, 0) dx^2$), où dx^2 est la métrique de Riemann sur \mathbb{R}^d . On définit

$$S_0 := \inf_{a \in \mathbb{Z}^d} d_{V_0}(0, a),$$

$$\bar{S}_0 := \inf(d_V(0, \partial C_0), S_0),$$

où on note ∂C_0 le bord de $C_0 :=]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Soit $G = -\ln F$. Supposons que

$$\frac{G'(\lambda)}{G(\lambda)} = o(e^{S_0 \sqrt{\lambda}}) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H1)–(H3) et (10) sont satisfaites. Pour $S \in]0, \bar{S}_0[$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, il existe $a > 0$, $K > 0$ et $\lambda_{S,\gamma,\beta} > 0$ tels que pour $\lambda > \lambda_{S,\gamma,\beta}$, on a*

$$\begin{aligned}
 & F(y(\lambda) + a e^{-S\sqrt{\lambda}}) - K F(y(\lambda))^{2-\gamma} \\
 & \leq N(-\lambda) \leq F(y(\lambda) - a e^{-S\sqrt{\lambda}})(1 + \mathcal{O}(e^{-\beta\sqrt{\lambda}})) + K F(y(\lambda))^{2-\gamma}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Le terme $F(y(\lambda))^{2-\gamma}$ représente la probabilité d’avoir au moins deux variables aléatoires supérieures à $y(\lambda)$. Sous l’hypothèse (10), il est négligeable par rapport à $F(y(\lambda) \pm a e^{-S\sqrt{\lambda}})$. Si F ne décroît pas trop rapidement à l’infini, le terme de l’effet tunnel $e^{-S\sqrt{\lambda}}$ est négligeable dans le terme principal de $N(-\lambda)$. Plus précisément, si on suppose qu’il existe $S \in]0, \overline{S}_0[$ tel que

$$G'(\lambda) = \mathcal{O}(e^{S\sqrt{\lambda}}) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty,
 \tag{12}$$

alors on obtient l’asymptotique suivante :

Corollaire 3.2. *Supposons que les hypothèses (H1), (H3) et (12) sont satisfaites. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tel que pour $\lambda > \lambda_\varepsilon$, on a*

$$N(-\lambda) = F(y(\lambda))(1 + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}})).$$

La quantité $F(y(\lambda))$ représente la probabilité que $-E_0(\omega_0)$, l’infimum du spectre de l’opérateur à un seul puits $H_{\omega_0} = -\Delta + \omega_0 V$, soit inférieur à $-\lambda$. Dans ce cas, on dit que $N(-\lambda)$ se comporte comme si H_ω était constitué d’une somme directe des copies i.i.d. de l’opérateur H_{ω_k} , $k \in \mathbb{Z}^d$.

Remarque 2. Si on connaît un développement asymptotique complet de G (resp. F), le Théorème 3.1 (resp. Corollaire 3.2) donne un développement asymptotique complet de $\ln N$ (resp. N). Il est donné par celui de $-G(y(\lambda))$ (resp. $F(y(\lambda))$).

Remarque 3. Dans [5], on obtient un résultat analogue au Théorème 3.1 pour des fonctions F plus générales que celles décrites dans cette note.

4. Idée de la preuve

Pour démontrer nos résultats, on utilise principalement la méthode des approximations périodiques introduite par Klopp [4]. Elle nous permet d’approcher $N(-\lambda)$ par $\mathbb{E}(N_{\omega,n}(-\lambda \pm \varepsilon))$, pour $\varepsilon > 0$ dépendant de λ . Ici, on désigne par $N_{\omega,n}$ la densité d’états intégrée d’une réalisation $(2n + 1)\mathbb{Z}^d$ -périodique définie par

$$H_{\omega,n} := -\Delta + V_{\omega,n} = -\Delta + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d / (2n+1)\mathbb{Z}^d} \omega_k \sum_{m \in (2n+1)\mathbb{Z}^d} V(x - k - m).$$

L’intérêt de cette méthode est qu’avec un choix convenable de n en fonction de λ et ε , $N(-\lambda)$ et $\mathbb{E}(N_{\omega,n}(-\lambda \pm \varepsilon))$ sont exponentiellement proches. Pour étudier $\mathbb{E}(N_{\omega,n}(-\lambda))$, on procède de la façon suivante. La densité d’états intégrée $N_{\omega,n}(-\lambda)$ est donnée par la formule (voir par exemple [6])

$$N_{\omega,n}(-\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T_n} \#\{\text{v.p. de } H_{\omega,n}(\theta) \leq -\lambda\} d\theta,$$

où « v.p. » est l’abréviation de « valeur propre » et $T_n = [-\frac{\pi}{2n+1}, \frac{\pi}{2n+1}]^d$.

On estime alors l’espérance du nombre des valeurs propres de $H_{\omega,n}(\theta) \leq -\lambda$, pour $\theta \in T_n$. Pour cela, on utilise une décomposition convenable sur l’espace de probabilité et une approche semi-classique car seules les grandes valeurs de ω contribueront au spectre situé sous l’énergie $-\lambda$ quand λ grand. Le terme principal de $\mathbb{E}(N_{\omega,n}(-\lambda))$

est donné par la probabilité que l'infimum du spectre de $H_{\omega_0} = -\Delta + \omega_0 V$ soit inférieur à $-\lambda \pm \mathcal{O}(e^{-S\sqrt{\lambda}})$, où $S > 0$.

Enfin, on déduit l'asymptotique de N à partir de l'approximation périodique et de l'estimation sur $\mathbb{E}(N_{\omega,n}(-\lambda))$ avec un choix convenable sur n et ε . Le choix de ε détermine la précision de nos asymptotiques.

Remerciements

Je remercie F. Klopp sous la direction duquel ce travail a été effectué.

Références

- [1] B. Helffer, J. Sjöstrand, Multiple wells in the semiclassical limit. I, *Comm. Partial Differential Equations* 9 (1) (1984) 337–408.
- [2] W. Kirsch, Random Schrödinger operators and the density of states, in: *Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems* (Marseille, 1983), in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 1109, Springer, Berlin, 1985, pp. 68–102.
- [3] F. Klopp, Precise high energy asymptotics for the integrated density of states of an unbounded random Jacobi matrix, *Rev. Math. Phys.* 12 (4) (2000) 575–620.
- [4] F. Klopp, L. Pastur, Lifshitz tails for random Schrödinger operators with negative singular Poisson potential, *Comm. Math. Phys.* 206 (1) (1999) 57–103.
- [5] O. Saad, Thèse présentée à l'université de Paris Nord.
- [6] J. Sjöstrand, Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions, in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 1495, Springer, 1991, pp. 237–332.