Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 163–166
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

Sur le théorème de la stabilité non asymptotique dans la méthode directe de Lyapunov

Boris Kalitine

Faculté de mathématique appliqué et informatique, Université de Biélorussie, 4, av. Skoriny, 220050 Minsk, Bélarus

Reçu le 28 juillet 2003 ; accepté le 7 novembre 2003

Présenté par Thierry Aubin

Résumé

Nous présentons une généralisation du théorème de A.M. Lyapunov sur la stabilité pour un système dynamique autonome dans la classe des fonctions auxiliaires qui ne sont pas définies positives. ***Pour citer cet article : B. Kalitine, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

On the theorem for nonasymptotic stability in the direct Lyapunov's method. This paper provides a new theorem for nonasymptotic stability of autonomous dynamical systems by Lyapunov's direct method in the class of the indefinite functions. ***To cite this article: B. Kalitine, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Le théorème de A.M. Lyapunov sur la stabilité de l'équilibre d'un système d'équations différentielles autonome suppose d'existence d'une fonction définie positive et différentiable $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ dont la dérivée $\dot{V}$ par rapport au système est une fonction semi-définie négative. Les travaux [2–4] contiennent différentes généralisations de ce théorème pour des systèmes dynamiques abstraits $(X, \mathbb{R}, \pi)$ où le problème de la stabilité est étudié relativement à un ensemble M, compact, positivement invariant. Les auteurs utilisent une fonction auxiliaire $V: X \to \mathbb{R}^+$ qui n'est pas définie positive mais seulement semi-définie positive. En compensation de la perte de la propriété de stricte positivité de la fonction V dans [2,3], une hypothèse supplémentaire est exigée : l'ensemble M doit être asymptotiquement stable par rapport à la surface de niveau $Y_0 = \{x \in X\colon\ V(x) = 0\}$. Dans [4] la condition de stabilité asymptotique est remplacée par la condition de B-stabilité de M par rapport à Y_0, condition qui est moins restrictive.

Adresse e-mail : Kalitine@bsu.by (B. Kalitine).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.11.026

Dans cette Note, on propose un théorème concernant la stabilité non asymptotique par rapport à un ensemble compact positivement invariant où la fonction V peut changer le signe. Ce résultat généralise les résultats analogues des travaux [2–4].

2. Notation

Soit (X,d) un espace métrique localement compact et $(X,\mathbb{R},\pi)$ un système dynamique avec l'application de phase : $\pi:(x,t)\to xt$ de $X\times\mathbb{R}$ dans X [3]. Pour tout $Y\subset X$ et $T\subset\mathbb{R}$ on pose $YT=\{yt\colon\ y\in Y,\ t\in T\}$; $\overline{Y}$ est la fermeture de Y ; $\operatorname{int} Y$ et $\operatorname{Fr} Y$ sont respectivement l'intérieur et la frontière de Y. Pour chaque élément x de X, les ensembles $\gamma(x)=\{xt\colon\ t\in\mathbb{R}\}$, $\gamma^{\pm}(x)=\{xt\colon\ t\in\mathbb{R}^{\pm}\}$ sont respectivement la trajectoire, la demi-trajectoire positive et la demi-trajectoire négative issue du point x. On dit que l'ensemble M est invariant (positivement ou négativement invariant) si $M\mathbb{R}=M$ (resp. $M\mathbb{R}^{\pm}=M$).

Soit $B(M,\varepsilon)=\{x\in X\colon\ d(x,M)<\varepsilon\}$, où $M\subset X, \varepsilon>0$.

3. B-stabilité

Soient M et Y deux sous-ensembles de X positivement invariants, où M est compact, Y est fermé et $M\subset Y$. Rappelons les notions suivantes [4–6].

Définition 3.1. Nous dirons que M est B-attractif par rapport à Y si chaque voisinage de M contient un ensemble K compact, positivement invariant et attractif par rapport à Y tel que $M\subset K$. Si $Y=X$, nous dirons que M est B-attractif.

Définition 3.2. Nous dirons que M est B-stable par rapport à Y s'il est simultanément stable par rapport à Y et attractif par rapport à Y. Si $Y=X$, nous dirons que M est B-stable.

Définition 3.3. Nous dirons que le voisinage W de M est répulsif pour $t<0$ par rapport à Y si pour chaque élément $x\in\operatorname{Fr} W\cap Y$, il existe $\tau<0$ tel que $x\tau\notin\overline{W}$.

4. Résultat principal

Théorème 4.1. *Un ensemble compact positivement invariant M de X est stable s'il existe un voisinage U de M et une fonction $V:U\to\mathbb{R}$ tels que* :

(i) $V(x_n)\to 0$ *si* $d\,(x_n,M)\to 0$;
(ii) $V(x)=0$ *si* $V(x_n)\to 0$ *et* $x_n\to x$;
(iii) $V(xt)\leqslant V(x)\ \forall t\geqslant 0$ *et* $\forall x\ [0,t]\subset\{x\in U\colon\ V(x)\geqslant 0\}$;
(iv) *M est B-stable par rapport à la frontière de l'ensemble* $Y_0=\{x\in X\colon\ V(x)=0\}$;
(v) *M est stable par rapport à l'ensemble $Y_0\cup Y^-$ où* $Y^-=\{x\in X\colon\ V(x)<0\}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que M est instable. Alors, d'après les hypothèses (iv), (v) l'instabilité est possible seulement par rapport à l'ensemble des points où $V(x)>0$. Dans ce cas, il existe $\varepsilon>0$ tel que $\overline{B(M,\varepsilon)}$ est compact, $\overline{B(M,\varepsilon)}\subset U$, et il existe deux suites (x_n), $V(x_n)>0$, $d(x_n,M)\to 0$ et $(t_n')\subset\mathbb{R}^+$ tels que $d(x_nt,M)<\varepsilon$ si $0\leqslant t<t_n'$ et $d(x_nt_n',M)=\varepsilon\ \forall n\geqslant 1$.

D'après la propriété de B-stabilité (voir (iv) et le Théorème 1 [5]) pour $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage compact W de M, répulsif pour $t < 0$ par rapport à $\operatorname{Fr} Y_0$, tel que $W \subset B(M, \varepsilon)$. Pour le compact W, par un raisonnement analogue, il existe une suite (t_n), $0 \leqslant t_n \leqslant t'_n$, telle que :

$$x_n t \in \operatorname{int} W \quad \text{si } 0 \leqslant t < t_n \quad \text{et} \quad x_n t_n \in \operatorname{Fr} W \quad \forall n \geqslant 1.$$

M étant positivement invariant, $t_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. De plus, $\operatorname{Fr} W$ est aussi compact ; donc on peut supposer que la suite $(x_n t_n)$ converge vers un élément $y \in \operatorname{Fr} W$. D'après le Lemme 1 [6] la demi-trajectoire $\gamma^-(y) \subset W$. Montrons que $\gamma^-(y) \subset \operatorname{Fr} Y_0$. En effet, Y_0, positivement invariant, implique l'invariance positive de sa frontière. Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant 1$, soit le mouvement $x_n : t \to x_n t$ ne traverse pas l'ensemble $\overline{Y}_0$ sur l'intervalle $[0, t_n]$, soit il existe un instant $s_n \subset]0, t_n]$ tel que $x_n[s_n, t_n] \in \operatorname{Fr} Y_0$. Dans tous les cas selon les hypothèses (i)–(iii) on a $0 \leqslant V(x_n t_n) \leqslant V(x_n)$ $\forall n \geqslant 1$; d'où à la limite $V(y) = 0$, c'est-à-dire, $y \in \operatorname{Fr} Y_0$. D'autre part, comme $t_n \to +\infty$, on a $t_n + \tau > 0$ pour tout $\tau < 0$ et n assez grand. Par conséquence, $x_n(t_n + \tau) = (x_n t_n)\tau \to y\tau$ et donc $y\tau \in \operatorname{Fr} Y_0$ $\forall \tau < 0$. Ainsi, nous avons obtenu l'inclusion $\gamma^-(y) \subset \operatorname{Fr} Y_0$. Mais cette affirmation et les propriétés suivantes, $\gamma^-(y) \subset W$ et $y \in \operatorname{Fr} W$, contredisent la définition d'un voisinage répulsif pour $t < 0$ par rapport à $\operatorname{Fr} Y_0$. Le Théorème 4.1 est démontré. □

Dans le cas d'une fonction de Lyapunov continue, on a le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Un ensemble compact, positivement invariant, M de X est stable s'il existe un voisinage U de M et une fonction continue $V : U \to \mathbb{R}$ tels que* :

(i) $V(x) = 0$ $\forall x \in M$;
(ii) $V(xt) \leqslant V(x)$ $\forall t \geqslant 0$ *et* $\forall x$, *on a* $[0, t] \subset \{x \in U\colon\ V(x) \geqslant 0\}$;
(iii) *M est B-stable par rapport à la frontière de l'ensemble* $Y_0 = \{x \in X\colon\ V(x) = 0\}$;
(iv) *M est stable par rapport à l'ensemble $Y_0 \cup Y^-$ où* $Y^- = \{x \in X\colon\ V(x) < 0\}$.

Exemple 1. Soit le système dynamique sur $\mathbb{R}^2$ défini par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}y^2 - x^2\right)\varphi(x, y), & \text{si } |y| > |x|, \\ -\dfrac{3}{4}x^2\varphi(x, y), & \text{si } |y| \leqslant |x|, \end{cases} \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{4}xy\varphi(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

où la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie l'inégalité

$$x\varphi(x, y) \geqslant 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On prend $M = \{(0, 0)\}$ et on pose $V(x, y) = 0{,}5(y^2 - x^2)$. Alors la dérivée de V par rapport au système (1) est égale à $\dot{V}(x, y) = -x\varphi(x, y)(y^2 - x^2)$, si $|y| > |x|$. On peut voir facilement que la fonction V est décroissante le long des trajectoires du système pour tous les points (x, y) où $V(x, y) \geqslant 0$.

De plus la fonction $V_1(x, y) = \frac{2}{3}(x^2 + y^2)$ a pour dérivée $\dot{V}_1(x, y) = -x\varphi(x, y)(x^2 + y^2)$, si $|y| \leqslant |x|$. Compte tenu de ce que les droites $|y| = |x|$ sont les ensembles invariants, on peut conclure que la solution nulle du système (1) est stable par rapport à l'ensemble des points (x, y) où $|y| \leqslant |x|$. Alors, pour la fonction V, les hypothèses (i), (ii) et (iv) du Théorème 4.2 sont vérifiées. Il ne reste qu'à vérifier les conditions qui garantissent la B-stabilité par rapport à l'ensemble $Y_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |y| = |x|\}$. Sur Y_0 le système peut s'écrire :

$$\dot{x} = -\frac{3}{4}x^2\varphi(x, y), \quad \text{avec } |y| = |x|. \tag{2}$$

La *B*-stabilité de l'origine du système (2) est équivalente à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1 \in \left]-\varepsilon, 0\right[,\ \exists x_2 \in \left]0, \varepsilon\right[,\ \forall y,\ \forall x_j, \quad |y| = |x_j| \quad \Rightarrow \quad x_j \varphi(x_j, y) > 0, \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Cette condition est vérifiée, par exemple, pour la fonction φ définie par :

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}\left(\left(|y| - |x|\right)^2 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0, y) = 0. \tag{4}$$

Remarquons que la condition

$$x\varphi(x, y) > 0 \quad \text{pour } |y| = |x| \neq 0 \tag{5}$$

garantit la stabilité asymptotique par rapport au point d'équilibre du système (2), donc elle garantit la *B*-stabilité. Cela signifie que la condition (5) est une condition suffisante pour la stabilité de l'origine du système (1). Mais cette condition est plus forte que (3) (par exemple, la fonction (4) ne vérifie pas la condition (5)).

Remarque 1. D'après la Définition 3.2, l'hypothèse (iv) des Théorèmes 4.1 et 4.2 peut être changée, en demandant la stabilité asymptotique de M par rapport à Y_0. Si, de plus, la fonction V est semi-définie positive, on obtient un résultat déjà énoncé dans [2–4].

Exemple 2. Soit le système dynamique :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0 \tag{6}$$

où $f : G \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et G un voisinage du point $x = 0$. Si le système (6) admet des intégrales premières continues $\varphi_s(x) = c,\ c \in \mathbb{R},\ s = 1, 2, \ldots, k$, il existe toujours une fonction semi-définie positive $V(x) = \sum_{s=1}^{k} (\varphi_s(x) - \varphi_s(0))^2$, qui est constante le long des solutions du système (6).

Le Théorème 4.2 permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Supposons que le système* (6) *admette des intégrales premières continues* $\varphi_s(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$, $s = 1, 2, \ldots, k$. *Alors, la solution nulle du système* (6) *est stable si elle est* B*-stable par rapport à l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi_s(x) = \varphi_s(0),\ s = 1, 2, \ldots, k\}$.

Théorème 4.3 généralise les résultats [1,7].

Remerciements

Cet article a été écrit lors du séjour de l'auteur au sein du projet CONGE de l'Inria-Lorraine. Je remercie chaleureusement le directeur du laboratoire, Jean-Claude Vivalda, pour l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de cette Note.

Références

[1] D. Aeyels, R. Sepulchre, Stability for dynamical systems with first integrals: a topological criterion, Systems Control Lett. 19 (1992) 461–465.
[2] N.G. Bulgakov, The stability of invariant sets, Differential Equations 18 (2) (1982) 147–152.
[3] B.S. Kalitine, Sur la stabilité des ensembles compacts invariants des systèmes dynamiques, RAIRO Automat./Systems Analysis and Control 16 (3) (1982) 275–286.
[4] B.S. Kalitine, On the stability of compact sets, Vestnik Beloruss. Gos. Univ. Ser. I 3 (1984) 61–62 (in Russian).
[5] B.S. Kalitine, T. Sari, B-stability and its applications to the Tikhonov and Malkin–Gorshin theorems, Differential Equations 37 (1) (2001) 11–16.
[6] B.S. Kalitine, B-stability and the probleme of Florio–Seibert, Differential Equations 35 (4) (1999) 453–463.
[7] B.S. Kalitine, Stability in the presence of first integrals, Vestnik Beloruss. Gos. Univ. Ser. I 3 (1986) 69–70 (in Russian).