

Contrôle optimal

Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan

Romain Brossard, Jean-Pierre Lohéac

MAPLY (CNRS UMR 5585), École centrale de Lyon, DMI, BP 163, 69131 Écully cedex, France

Reçu le 18 avril 2003 ; accepté après révision le 19 novembre 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan. Ici, nous prenons en compte les singularités générées par un changement de conditions au bord. *Pour citer cet article : R. Brossard, J.-P. Lohéac, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Boundary stabilization of the elastodynamic system in a plane polygonal domain. In this paper, we study the boundary stabilization of the elastodynamic system in a plane polygonal domain. Here, we take in account singularities which appear when changing boundary conditions. *To cite this article : R. Brossard, J.-P. Lohéac, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be an open bounded convex polygonal set and let $\partial\Omega$ be its boundary. We assume

$$\partial\Omega = \overline{\partial\Omega_N} \cup \overline{\partial\Omega_D}, \quad \overline{\partial\Omega_N} \cap \overline{\partial\Omega_D} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}, \quad (1)$$

where $\partial\Omega_N$ and $\partial\Omega_D$ are two open connected non-empty parts of $\partial\Omega$, \mathbf{s}_1 and \mathbf{s}_2 are two points of $\partial\Omega$, which we will consider as vertices of $\partial\Omega$. At almost every point \mathbf{x} of $\partial\Omega$, we denote by $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ the normal unit vector pointing outward of Ω . We assume that there exists $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ such that function $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ satisfies (see Fig. 1)

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) \geq 0, \quad \text{on } \partial\Omega_N, \quad (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) \leq 0, \quad \text{on } \partial\Omega_D. \quad (2)$$

Let λ and μ be Lamé's coefficients. If a vector function \mathbf{v} is smooth enough, we define the strain tensor and the stress tensor by

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \mathbf{v}_i), \quad \sigma(\mathbf{v}) = 2\mu\epsilon(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v})I_n. \quad (3)$$

Adresses e-mail : romain.brossard@ec-lyon.fr (R. Brossard), jean-pierre.loheac@ec-lyon.fr (J.-P. Lohéac).

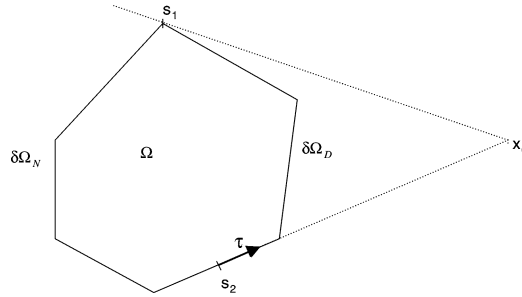


Fig. 1. Un exemple du domaine Ω .

Fig. 1. An example of domain Ω .

We will set $\sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) = \text{tr}(\sigma(\mathbf{u})\epsilon(\mathbf{u}))$. We consider the linear isotropic elastodynamic system

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' - \text{div}(\sigma(\mathbf{u})) = 0, & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{on } \partial\Omega_D \times \mathbb{R}_+, \\ \sigma(\mathbf{u})\mathbf{v} = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}', & \text{on } \partial\Omega_N \times \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

We introduce $\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^2$, $\mathbb{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^2$ and $\mathbb{H}_D^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega_D\}$. One can easily prove the well-posedness of this problem by using semi-group method, assuming

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) \in \mathbb{H}_D^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega). \tag{5}$$

The energy function is given by

$$E(\mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\mathbf{u}'|^2 + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})) \, dx. \tag{6}$$

A similar problem for the wave equation has been studied in [5]. In the same way, in this work, we prove the stabilization result for problem (4).

Theorem 0.1. *Assume (1) and (2). Then there exist constants $C > 0$ and $\varpi > 0$ such that for all $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ satisfying (5), the solution \mathbf{u} of (4) satisfies $\forall t \in \mathbb{R}_+, E(\mathbf{u}, t) \leq C e^{-\varpi t} E(\mathbf{u}, 0)$.*

The case of a disconnected boundary is studied in [8] for some elastodynamic systems with the natural feedback. This work has been extended in [9,1,2] for more general systems, including the Lamé system, under less restrictive geometrical assumptions, but always with a boundary such that $\overline{\partial\Omega_N} \cap \overline{\partial\Omega_D} = \emptyset$.

Here we inspired from [5,7,4]. We have chosen the feed-back of the type $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}'$, which appears for the first time in [7]. This is the first step to prove boundary stabilization of the elastodynamic system in a n -dimensional domain, with singularities.

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné polygonal plan convexe et $\partial\Omega$ sa frontière. On va supposer que $\partial\Omega$ est découpée en deux parties connexes ouvertes $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$ telles que (1) est vérifié. Pour presque tout point \mathbf{x} de $\partial\Omega$, on note $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ la normale unitaire sortante en \mathbf{x} . On suppose qu'il existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ satisfait (2) (voir Fig. 1).

Pour \mathbf{v} un champ de vecteurs suffisamment régulier, le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes sont définis par (3).

Par la méthode des semi-groupes, on prouve que le problème (4) est bien posé, sous l'hypothèse (5). L'énergie est définie par (6). Un problème similaire pour l'équation des ondes a été étudié dans [5]. Ici, nous prouvons un résultat analogue pour le problème (4).

Théorème 1.1. *On suppose que (1) et (2) sont satisfaits. Alors il existe des constantes $C > 0$ et $\varpi > 0$ telles que pour tout $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ vérifiant (5), la solution \mathbf{u} du problème (4) vérifie*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E(\mathbf{u}, t) \leq C e^{-\varpi t} E(\mathbf{u}, 0).$$

Le cas d’une frontière non connexe a été étudié dans [8] pour certains système élastodynamiques, en introduisant un feedback dit naturel. Ce travail a été par la suite étendu dans [9,1,2] pour des systèmes élastodynamiques plus généraux, y compris le système de Lamé, et pour des conditions géométriques moins restrictives, mais toujours pour une frontière qui vérifie $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$.

Nous nous sommes ici inspirés de [5,7,4]. Nous avons choisi le feedback du type $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}'$, qui apparaît pour la première fois dans [7]. Ce travail constitue une première étape vers la stabilisation du système élastodynamique dans un domaine de \mathbb{R}^n , en présence de singularités.

La démonstration de ce théorème repose sur une égalité de type Rellich, énoncée ci-dessous.

2. Démonstration du Théorème 1.1

Aux points \mathbf{s}_i , on définit ω_i l’angle d’ouverture de Ω . Si $\omega_i = \pi$, on note $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{s}_i)$ le vecteur unitaire tangent à $\partial\Omega$ dirigé vers $\partial\Omega_D$ (voir Fig. 1). On constate que la condition (2) implique

$$\omega_i = \pi \Rightarrow \mathbf{m}(\mathbf{s}_i) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{s}_i) = 0. \tag{7}$$

On obtient alors

Théorème 2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné polygonal plan convexe vérifiant (1) et soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ vérifie (7). Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ tel que*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega_D) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega_N). \tag{8}$$

La fonction $2(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ est alors intégrable sur $\partial\Omega$ et on a

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} \, dx &= \int_{\partial\Omega} [2(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})] \, d\Gamma \\ &+ 8 \frac{(2\mu + \lambda)(3\mu + \lambda)}{\pi\mu} \left(\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{3\mu + \lambda}{\mu + \lambda} \right) \right) \sum_{\substack{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\} \\ \omega(\mathbf{s}) = \pi}} C(\mathbf{s})^2 (\mathbf{m}(\mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{s})), \end{aligned} \tag{9}$$

où $C(\mathbf{s})$ est le coefficient de singularité de \mathbf{u} au point \mathbf{s} .

Preuve abrégée du Théorème 2.1. On démontre grâce à la formule de Green que, pour $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$,

$$2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} \, dx = \int_{\partial\Omega} [2(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})] \, d\Gamma. \tag{10}$$

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ vérifiant (8). Pour tout ouvert \mathcal{V} tel que $\overline{\mathcal{V}} \subset \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\mathcal{V})$.

De plus, pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$, on peut montrer qu’il existe un voisinage \mathcal{V} de \mathbf{x} tel que $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\mathcal{V} \cap \Omega)$. Pour cela, si \mathbf{x} est un sommet, on utilise les résultats obtenus dans [10]. Sinon, on utilise la méthode des quotients différentiels.

Les problèmes que l’on va rencontrer seront donc en \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 . Soit \mathbf{s} l’un des deux \mathbf{s}_i . Soit γ_0 et γ_1 les deux côtés attenants à \mathbf{s} . Par troncature, on peut supposer que \mathbf{u} est nul en dehors d’un disque $D(\mathbf{s}, \delta)$. On peut supposer que δ est suffisamment petit pour que $D(\mathbf{s}, \delta) \cap \partial\Omega \subset \gamma_0 \cup \gamma_1$. Par un procédé de relèvement et par changement de coordonnées, on se ramène au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})) = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \mathcal{H}, \\ \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{H}_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{H}_N, \end{cases} \tag{11}$$

où $\mathcal{H} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times]0, \omega[\}$, $\partial\mathcal{H}_D = \{(r, 0) \mid r > 0\}$ et $\partial\mathcal{H}_N = \{(r, \omega) \mid r > 0\}$ en coordonnées polaires, et où $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{H})$.

Ainsi, on peut écrire \mathbf{u} comme somme d’une fonction $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^2(\mathcal{H})$ et de $\tilde{\mathbf{u}}$ solution de (11). En injectant $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}}$ dans le terme de gauche de (9) et en développant, on constate que les termes en (\mathbf{U}, \mathbf{U}) et en $(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{u}})$ vérifient une égalité du type (10). Il reste alors le terme quadratique en $\tilde{\mathbf{u}}$.

On va prendre $\varepsilon > 0$, et on va poser $\mathcal{H}_\varepsilon = \{(r, \theta) \in]\varepsilon, +\infty[\times]0, \omega[\}$, $\partial\mathcal{H}_{D\varepsilon} = \{(r, 0) \mid r > \varepsilon\}$, $\partial\mathcal{H}_{N\varepsilon} = \{(r, \omega) \mid r > \varepsilon\}$ et $\gamma_\varepsilon = \{(\varepsilon, \theta) \mid \theta \in]0, \omega[\}$.

On a donc $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{H}^2(\mathcal{H}_\varepsilon)$ et on obtient

$$2 \int_{\mathcal{H}_\varepsilon} \operatorname{div}(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}) \, dx = \int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} [2(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})] \, d\Gamma. \tag{12}$$

On a facilement, grâce au théorème de Lebesgue

$$\int_{\mathcal{H}_\varepsilon} \operatorname{div}(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}} \operatorname{div}(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \, dx.$$

Pour la convergence des intégrales frontières de (12), on a besoin de la structure de la solution de (11), que l’on obtient grâce aux résultats obtenus dans [10]. On va maintenant séparer deux cas.

Premier cas : $\omega < \pi$. On note ν le coefficient de Poisson du système, $\nu = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et on considère l’équation en α

$$\sin^2(\alpha\omega) = \frac{4(1 - \nu)^2 - \alpha^2 \sin^2 \omega}{3 - 4\nu}. \tag{13}$$

Soit $(\alpha_i)_{i=1, K}$ les racines complexes de (13) telles que $\Re\alpha_i \in]0, 1]$, qui sont en nombre fini. On a alors

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{u}_R \in \mathbb{H}^2(\mathcal{H}), \exists (\mathbf{v}_i^1, \mathbf{v}_i^2)_{i=1, K} \in [(C^\infty([0, \omega], \mathbb{C}))^2]^K \text{ et } \exists (\chi_i)_{i=1, K} \in \mathbb{R}^K \text{ tels que} \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_R + \sum_{i=1}^K \chi_i \Re [r^{\alpha_i} (\mathbf{v}_i^1(\theta) + \ln(r) \mathbf{v}_i^2(\theta))]. \end{aligned} \tag{14}$$

Or, par des arguments de parité et par des calculs, on peut démontrer le lemme suivant

Lemme 2.2. $\forall i \in [1, K], \Re\alpha_i > \frac{1}{2}$.

Maintenant, on injecte la forme (14) dans les intégrales frontières de (12), on développe la double somme et on étudie la convergence terme à terme. On constate que les termes ont soit la bonne régularité, soit la bonne puissance en r pour que toutes les intégrales convergent. On obtient finalement

$$\int_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} [2(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})] \, d\Gamma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{H}} [2(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})] \, d\Gamma.$$

Deuxième cas : $\omega = \pi$. On a $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) = 0$ sur $\partial\mathcal{H}$. Donc, grâce aux conditions au bord, on obtient $\int_{\partial\mathcal{H}} [2(\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})] \, d\Gamma = 0$.

Pour la structure de la solution, toujours grâce aux résultats obtenus dans [10], on obtient

$$\exists \mathbf{u}_R \in \mathbb{H}^2(\mathcal{H}), \exists C \in \mathbb{R} \text{ tels que } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_R + C \mathbf{u}_S, \text{ avec } \mathbf{u}_S(r, \theta) = \Re \left(r^{\frac{1}{2} + i \frac{\ln(3-4\nu)}{2\pi}} \mathbf{v}(\theta) \right), \tag{15}$$

où \mathbf{v} est une fonction connue de $(C^\infty([0, \omega], \mathbb{C}))^2$. On remarque qu’il n’y a ici qu’une seule singularité.

On injecte la forme (15) dans l’intégrale frontière sur γ_ε et on développe les sommes. On constate que toutes les intégrales où \mathbf{u}_R apparaît convergent vers 0. De plus, si on note $\boldsymbol{\tau}(0)$ le vecteur tangent à $\partial\mathcal{H}$ en 0 pointant vers $\partial\mathcal{H}_N$, on obtient par un calcul à ε fixé

$$\int_{\gamma_\varepsilon} [2(\sigma(\mathbf{u}_S)\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u}_S - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\sigma(\mathbf{u}_S) : \epsilon(\mathbf{u}_S)] d\Gamma$$

$$= 8 \frac{(2\mu + \lambda)(3\mu + \lambda)}{\pi\mu} \left(\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{3\mu + \lambda}{\mu + \lambda} \right) \right) (\mathbf{m}(0) \cdot \boldsymbol{\tau}(0)) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et le Théorème 2.1 est démontré. \square

Preuve abrégée du Théorème 1.1. On va faire la démonstration pour une solution forte \mathbf{u} . Le résultat pour les solutions faibles s'en déduira par un argument classique de densité.

Nous allons pour montrer le théorème utiliser un lemme démontré dans [6] :

Lemme 2.3. Soit $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_t^\infty E(s) ds \leqslant CE(t), \quad \forall t \geqslant 0, \tag{16}$$

alors on a $E(t) \leqslant E(0)e^{1-t/C}, \forall t \geqslant C$.

Nous voulons donc à présent obtenir une inégalité de la forme (16) pour l'énergie. Pour cela, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs (voir par exemple [6]).

Soit \mathbf{u} la solution du problème (4). Tout d'abord, on a grâce à la formule de Green, pour tout $t > 0$,

$$E'(\mathbf{u}, t) = - \int_{\partial\Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) |\mathbf{u}'|^2 d\Gamma. \tag{17}$$

L'énergie est donc une fonction décroissante du temps.

Soient $T > S > 0$. On pose à présent $M\mathbf{u} = 2(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}$ et on écrit

$$\int_S^T \int_\Omega \mathbf{u}'' \cdot M\mathbf{u} dx dt = \int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot M\mathbf{u} dx dt. \tag{18}$$

On considère le premier membre de cette égalité. On obtient

$$\int_S^T \int_\Omega \mathbf{u}'' \cdot M\mathbf{u} dx dt = \left[\int_\Omega \mathbf{u}' \cdot M\mathbf{u} dx \right]_S^T + \int_S^T \int_\Omega |\mathbf{u}'|^2 dx dt - \int_S^T \int_{S\partial\Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) |\mathbf{u}'|^2 d\Gamma dt. \tag{19}$$

Pour le second membre de l'égalité (18), l'application du Théorème 2.1 nous donne

$$2 \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} dx \leqslant - \int_{\partial\Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) [2\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})] d\Gamma.$$

On a donc

$$\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot M\mathbf{u} dx dt \leqslant - \int_S^T \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) dx dt + \int_S^T \int_{S\partial\Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} d\Gamma dt$$

$$- \int_S^T \int_{S\partial\Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) [2\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})] d\Gamma dt. \tag{20}$$

En regroupant (19) et (20), on obtient

$$\begin{aligned} \int_S^T E(t) dt \leq & - \left[\int_{\Omega} \mathbf{u}' \cdot M \mathbf{u} dx \right]_S^T + \int_S^T \int_{S \partial \Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) |\mathbf{u}'|^2 d\Gamma dt + \int_S^T \int_{S \partial \Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} d\Gamma dt \\ & - \int_S^T \int_{S \partial \Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) [2\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})] d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (21)$$

On montre par un calcul assez compliqué, inspiré de [3], que pour tout $\theta > 0$, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\int_S^T \int_{S \partial \Omega_N} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) [2\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})] d\Gamma dt \leq \theta \int_S^T E(t) dt + C_1 E(\mathbf{u}, S). \quad (22)$$

On montre alors que pour tout $\theta > 0$, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$(1 - \theta) \int_S^T E(t) dt \leq C_2 E(\mathbf{u}, S). \quad (23)$$

Comme C_2 ne dépend pas de S et de T , il suffit de prendre θ suffisamment petit, puis de faire tendre T vers l'infini pour obtenir le résultat. Ceci conclut la démonstration du théorème. \square

Remarque 1. Le feedback que nous avons choisi ici permet d'obtenir la stabilisation du système élastodynamique dans le cas d'une frontière non-connexe pour un domaine quelconque de \mathbb{R}^n .

Remarque 2. La stabilisation du système élastodynamique en présence de singularités paraît peu accessible par la méthode des multiplicateurs utilisée avec le feedback naturel introduit dans [8].

Remarque 3. Le cas d'un ouvert à frontière régulière connexe est encore à l'étude et fera l'objet d'une publication ultérieure.

Références

- [1] F. Alabau, V. Komornik, Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems, *SIAM J. Control Optim.* 37 (2) (1999) 521–542.
- [2] R. Bey, A. Heminna, J.-P. Lohéac, Stabilisation frontière du système de l'élasticité. Nouvelle approche, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (2000) 563–566.
- [3] R. Bey, A. Heminna, J.-P. Lohéac, Boundary stabilization of a linear elastodynamic system with variable coefficients, *Electron. J. Differential Equations* 78 (2001) 1–23.
- [4] R. Bey, J.-P. Lohéac, M. Moussaoui, Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. Pures Appl.* 78 (1999) 1043–1067.
- [5] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, *J. Math. Pures Appl.* 68 (1989) 215–259.
- [6] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization; The Multiplier Method*, Masson–Wiley, Paris, 1994.
- [7] V. Komornik, E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. Pures Appl.* 69 (1990) 33–54.
- [8] J. Lagnese, Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, *SIAM J. Control Optim.* 21 (1983) 968–984.
- [9] J. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, *Nonlinear Anal.* 16 (1991) 35–54.
- [10] B. Mérouani, Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, *Maghreb. Math. Rev.* 5 (1–2) (1996) 95–112.