

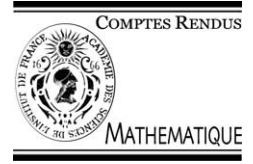


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 819–824



Mathematical Problems in Mechanics

Nonlinear thin plate models for a family of Ogden materials

Karim Trabelsi

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Received 21 May 2003; accepted after revision 20 October 2003

Presented by Philippe G. Ciarlet

Abstract

Nonlinear two-dimensional thin plate models are derived via a formal asymptotic procedure due to Pantz, for a family of Ogden materials proposed by Ciarlet and Geymonat (C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II 295 (4) (1982) 423–426). These materials are more realistic than the Saint Venant–Kirchhoff material. As a consequence, the derived models generalize those obtained for this material. **To cite this article:** K. Trabelsi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Modèles non linéaires de plaques minces pour une famille de matériaux de type Ogden. Des modèles non linéaires bidimensionnels de plaques minces sont dérivés via une procédure asymptotique formelle mise au point par Pantz, pour une famille de matériaux de type Ogden proposée par Ciarlet et Geymonat (C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II 295 (4) (1982) 423–426). Ces matériaux sont plus réalistes que le Saint Venant–Kirchhoff. En conséquence, les modèles dérivés généralisent ceux obtenus pour ce matériau. **Pour citer cet article :** K. Trabelsi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Soit $(e_i)_{i=1,2,3}$ une base orthonormale de \mathbb{R}^3 . La dérivée partielle d'une fonction ou d'un champ de vecteurs ψ par rapport au vecteur e_i est notée $\psi_{,i}$ et son gradient est noté $\nabla\psi$. Dans sa configuration de référence, la plaque occupe le domaine $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, où l'intérieur de sa surface moyenne ω est un ouvert de l'espace engendré par e_1 et e_2 , et ε est le petit paramètre. La frontière de Ω^ε est partitionnée de la sorte $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon$, où $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$ et $\Gamma^\varepsilon = \partial\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. La frontière de ω est composée de deux parties $\partial\omega = \partial\omega_\sigma \cup \partial\omega_\phi$, et on définit une partition de $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_\sigma^\varepsilon \cup \Gamma_\phi^\varepsilon$, où $\Gamma_\sigma^\varepsilon = \partial\omega_\sigma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\Gamma_\phi^\varepsilon = \partial\omega_\phi \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. La plaque est soumise à des forces volumiques b^ε , et à des forces surfaciques g_\pm^ε sur les faces supérieure et inférieure Γ_\pm^ε respectivement et h^ε sur la portion $\Gamma_\sigma^\varepsilon$ de sa face latérale, tandis que la déformation est imposée par $\bar{\phi}^\varepsilon$ sur Γ_ϕ^ε . On suppose que la plaque est constituée du même matériau isotropique, homogène et hyperélastique. Dans cette configuration la plaque subit

E-mail address: trabelsi@ann.jussieu.fr (K. Trabelsi).

une déformation $\varphi^\varepsilon : \overline{\Omega^\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui devrait être une solution du problème (P^ε) où $J_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = I_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) - \ell_\varepsilon(\varphi^\varepsilon)$, I_ε et ℓ_ε étant définies dans (1).

Enfin, on choisit une famille de matériaux de type Ogden proposée par Ciarlet et Geymonat [6] et dont l'expression de leurs densités d'énergie est donnée par (2). L'intérêt d'un tel matériau est double. D'abord, il est plus réaliste que le matériau de Saint Venant–Kirchhoff en ce sens qu'il ne permet pas la compression d'un volume en un point grâce au terme logarithmique tout en s'accordant avec le développement de la densité d'énergie d'un matériau isotropique, homogène et hyperélastique près d'un état naturel. Ensuite, sa densité d'énergie est polyconvexe par rapport aux invariants du gradient de la déformation ce qui fournit une théorie d'existence puissante pour le problème (P^ε) ; voir Ball [1] et Ciarlet [3] pour une présentation de ce type de résultat.

On remarquera que la condition de conservation de l'orientation locale $\det \nabla \psi^\varepsilon > 0$ est retenue ici. Cette condition a induit une contrainte injustifiée sur l'ensemble des déformations admissibles du modèle membranaire établi par Fox, Raoult et Simo [8] pour un matériau de Saint–Venant–Kirchhoff. Cela a été remarqué par Pantz [10] qui retrouve le modèle obtenu par Le Dret et Raoult [9] avant relaxation; dans ces deux dernières analyses asymptotiques, cette condition n'a pas été retenue. Ici, cette contrainte physique semble naturelle.

Afin de mettre en œuvre une analyse asymptotique, il est utile de se ramener à un domaine fixe. A cet effet, on opère le changement d'échelle π_ε défini par $(\pi_\varepsilon f)(x^1, x^2, x^3) = f(x^1, x^2, \varepsilon x^3)$ et pour toute fonction f^ε et toute fonctionnelle G^ε , on définit $f(\varepsilon) = \pi_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon$ et $G(\varepsilon)(\psi) = G_\varepsilon(\pi_\varepsilon^{-1} \psi)$. De plus on note $\Omega = \Omega^1$, $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^1$, $\Gamma_\phi = \Gamma_\phi^1$, $\Gamma_\pm = \Gamma_\pm^1$ et $x = (x_H, \xi) \in \omega \times [-1, 1]$. Mis à l'échelle de la sorte, le problème (P^ε) est équivalent au problème $(P(\varepsilon))$. Enfin, on suppose que les déformations ainsi que toutes les données du problème admettent des développements en puissances positives de ε . Pour une fonction $f(\varepsilon)$, on écrit $f(\varepsilon) = f^0 + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2 + \dots$. Cela induit un développement en puissances de ε sur la fonctionnelle $J(\varepsilon)$ qu'on note en conséquence. Un dernier prérequis mathématique est de supposer que $\overline{\phi(\varepsilon)}(x_H, \xi) = \overline{\varphi}(x_H)$ pour éviter le phénomène de couche-limite qui n'est pas pris en compte par cette analyse.

On est maintenant en mesure de reformuler la famille de problèmes $(P(\varepsilon))$ en une suite récursive de problèmes de minimisation indépendants de ε grâce à la Proposition 2.1. En d'autres termes, si l'on note P_n le problème qui consiste à minimiser la fonctionnelle J^n sur l'ensemble \mathcal{M}_n , la résolution du problème $(P(\varepsilon))$ équivaut à la résolution de la suite de problèmes $(P_n)_{n \geq -1}$. Cette procédure asymptotique mise au point par Pantz [10] est équivalente à celle formulée par Fox, Raoult et Simo [8] où les auteurs résolvent une suite de problèmes variationnels.

La résolution des problèmes P_n pour $n \leq 0$ impose la condition $g_+^0 + g_-^0 = 0$ qui semble raisonnable puisqu'une plaque dont l'épaisseur tend vers zéro ne peut supporter une force résultante surfacique non-nulle. Par commodité, on impose $g_\pm^0 = 0$.

La résolution des problèmes P_{-1} , P_0 et P_1 nous permet d'obtenir un modèle membranaire en ce sens qu'il ne dépend que de la première forme fondamentale de la déformation de la surface moyenne de la plaque. Plus précisément on établit le Théorème 3.1. Ce modèle généralise le modèle membranaire nonlinéaire classique pour un matériau de Saint Venant–Kirchhoff. En effet, pour certaines valeurs des constantes de la densité d'énergie (6) les termes dominants du développement de celle-ci près d'un état naturel sont identiques à ceux du modèle classique. De plus, l'énergie obtenue possède la propriété de devenir infinie lorsque la normale s'annule; l'intérêt de ce comportement sera exposé dans Trabelsi [11]. Ceci est une conséquence directe du comportement du matériau de Ciarlet–Geymonat qui interdit la compression d'un volume en un point. Enfin, le modèle hérite de l'indifférence matérielle du modèle tridimensionnel.

La relaxation de problèmes de minimisation du même type que celui mis en évidence par le Théorème 3.1 a été étudiée par Ben Belgacem [2]. Le calcul de la représentation intégrale de la relaxation de la fonctionnelle (5) pour la topologie faible de $W^{1,4}(\omega; \mathbb{R}^3)$ est un travail en cours; voir Trabelsi [11].

La résolution du problème P_2 nous amène à imposer certaines conditions sur les données. Ces conditions s'accordent parfaitement avec notre but d'obtenir un modèle de flexion pure d'où leurs justifications. Pratiquement, on impose que les forces membranaires s'annulent et on restreint en conséquence les déformations admissibles à celles qui annulent cette énergie soient celles dont le premier terme du développement est une isométrie. De plus,

on admet qu’il existe de telles déformations non-triviales. Enfin, on impose aux forces extérieures qu’elles soient de type flexion, afin d’éliminer tout effet membranaire.

Une fois que cette configuration a été prise en compte, le problème P_2 devient trivial et on passe à la résolution du problème P_3 qui nous permet d’obtenir un modèle nonlinéaire de flexion pure en ce sens que sa densité d’énergie ne dépend que de la deuxième forme fondamentale de la déformation de la surface moyenne de la plaque. Ce résultat est établi dans le Théorème 4.1. On remarquera qu’une fois de plus l’énergie (9) généralise l’énergie de flexion classique pour un matériau de Saint Venant–Kirchhoff. En effet, pour certaines valeurs des constantes de (9), on obtient exactement l’énergie classique.

En ce qui concerne le théorème d’existence relative au problème de minimisation soulevé par le Théorème 4.1, elle se déduit de celle menée par Ciarlet et Coutand [5] dans le cas des coques en flexion ; voir aussi Ciarlet [4] et Coutand [7].

1. Formulation of the three-dimensional problem

Let $(e_i)_{i=1,2,3}$ be an orthonormal basis of \mathbb{R}^3 . Partial differentiation of a function or a vector field ψ with respect to the vector e_i is denoted $\psi_{,i}$ and its gradient (matrix) is denoted $\nabla\psi$. In its reference configuration, the plate occupies the domain $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, where the interior of its mid-surface ω is an open subset of the plane spanned by e_1 and e_2 , and ε is the small parameter. The boundary of Ω^ε is partitioned as $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon$, where $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$ and $\Gamma^\varepsilon = \partial\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. The boundary of ω is partitioned as $\partial\omega = \partial\omega_\sigma \cup \partial\omega$, and we define a partition of $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_\sigma^\varepsilon \cup \Gamma_\phi^\varepsilon$, where $\Gamma_\sigma^\varepsilon = \partial\omega_\sigma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ and $\Gamma_\phi^\varepsilon = \partial\omega_\phi \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. The plate is submitted to dead body forces b^ε , to dead surface tractions g_\pm^ε on the top and bottom surfaces respectively Γ_\pm^ε and h^ε on the lateral portion $\Gamma_\sigma^\varepsilon$ while the deformation is prescribed as $\bar{\phi}^\varepsilon$ on Γ_ϕ^ε . The plate is assumed to be made of the same homogeneous, isotropic, hyperelastic material. Such a material, when subjected to the loads and boundary conditions described above, undergoes a deformation $\varphi^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ which should be a stationary point of the energy defined by $J_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = I_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) - \ell_\varepsilon(\varphi^\varepsilon)$, where the functional I^ε measures the internal energy of the plate and the linear form ℓ^ε is the work of the external forces. In other words, we have

$$I^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} W(\nabla\varphi^\varepsilon) \, dx \quad \text{and} \quad \ell^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \varphi^\varepsilon \, dx + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g^\varepsilon \cdot \varphi^\varepsilon \, dx_H + \int_{\Gamma_\sigma^\varepsilon} h^\varepsilon \cdot \varphi^\varepsilon \, ds, \tag{1}$$

where W is the stored energy function of the considered material. Ciarlet and Geymonat [6] have proposed a family of Ogden materials that are more realistic than the Saint Venant–Kirchhoff material. Namely,

$$W(F) = a|F|^2 + b|\text{adj}_3 F|^2 + c \det F^t F - d \ln \det F^t F + e \quad \forall F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \tag{2}$$

where all constants are positive except for e . These constants can be chosen in such a way that the function W is polyconvex with respect to the invariants of matrix F and agrees with the expansion of the stored energy function of a homogenous, isotropic, hyperelastic material near a natural state; see Ciarlet and Geymonat [6] for a proof, see also Ciarlet [3]. Moreover, it satisfies an important physical property which is to require an infinite energy to *squash* a volume into a point thanks to the logarithm term as $W(F) \rightarrow +\infty$ when $\det F \rightarrow 0$. Finally the polyconvexity condition ensures powerful existence results for the associated minimization problem

$$\inf\{J_\varepsilon(\psi^\varepsilon); \psi^\varepsilon \in \mathcal{F}(\bar{\Omega}^\varepsilon; \mathbb{R}^3) \text{ such that } \det \nabla\psi^\varepsilon > 0 \text{ and } \psi^\varepsilon|_{\Gamma_\phi^\varepsilon} = \bar{\phi}^\varepsilon|_{\Gamma_\phi^\varepsilon}\}, \tag{P^\varepsilon}$$

as was shown by Ball [1]; see also Ciarlet [3]. The constraint $\det \nabla\psi^\varepsilon > 0$ translates the local orientation-preserving condition which is a natural requirement. The space $\mathcal{F}(\bar{\Omega}^\varepsilon; \mathbb{R}^3)$ denotes a class of functions smooth enough for all expressions involving deformations ψ^ε to make sense.

Remark 1. For technical reasons, the local orientation-preserving condition was not taken into account by Le Dret and Raoult [9] in their analysis of the Saint Venant–Kirchhoff material via Γ -convergence arguments. Whereas

Fox, Raoult and Simo [8] obtain an unduly restrictive constraint on the set of admissible deformations for the membrane model which is due to the inclusion of this condition as it was shown by Pantz [10]. In our analysis, this physical requirement spares us unnecessary assumptions.

2. Setting of the asymptotic procedure

In order to carry out an asymptotic analysis, it is useful to operate a scaling that transposes the problem onto a fixed domain. Therefore, we define the operator π_ε by $(\pi_\varepsilon f)(x^1, x^2, x^3) = f(x^1, x^2, \varepsilon x^3)$ and for every function f^ε and every functional G^ε , we define $f(\varepsilon) = \pi_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon$ and $G(\varepsilon)(\psi) = G_\varepsilon(\pi_\varepsilon^{-1} \psi)$. Moreover we define $\Omega = \Omega^1$, $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^1$, $\Gamma_\phi = \Gamma_\phi^1$, $\Gamma_\pm = \Gamma_\pm^1$ and $x = (x_H, \xi) \in \omega \times [-1, 1]$. Scaled in this fashion, problem (P^ε) is equivalent to finding solutions to the problem

$$\inf\{J(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)); \psi(\varepsilon) \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3) \text{ such that } \det \nabla \psi(\varepsilon) > 0 \text{ and } \psi(\varepsilon)|_{\Gamma_\phi} = \overline{\phi(\varepsilon)}|_{\Gamma_\phi}\}. \tag{P(\varepsilon)}$$

Furthermore we assume that the data of the problem as well as the deformations admit expansions in positive powers of ε . For a function $f(\varepsilon)$, we write $f(\varepsilon) = f^0 + \varepsilon f^1 + \varepsilon^2 f^2 + \dots$. Now, the above assumptions induce expansions on the functionals in powers of ε . For a functional $G(\varepsilon)$, we write $G(\varepsilon)(\psi) = \varepsilon^{-1} G^{-1} + G^0(\psi) + \varepsilon G^1(\psi) + \varepsilon^2 G^2(\psi) + \dots$, where ψ stands from now on for the sequence $(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \dots)$. The local orientation-preserving condition $\det \nabla \psi(\varepsilon) > 0$ translates as follows

$$(\psi^0 + \varepsilon \psi^1 + \dots)_{,1} \wedge (\psi^0 + \varepsilon \psi^1 + \dots)_{,2} \cdot (\psi^0 + \varepsilon \psi^1 + \dots)_{,\xi} > 0, \tag{3}$$

and should be understood for ε small enough. Finally, we make one last ansatz which is to suppose that $\overline{\phi(\varepsilon)}(x_H, \xi) = \overline{\varphi}(x_H)$ to avoid boundary layer-regions which are not encompassed by our asymptotic analysis.

We can now break problem $P(\varepsilon)$ into a sequence of ε -independent minimization problems as follows:

Proposition 2.1. *The solution $\varphi(\varepsilon) = \varphi^0 + \varphi^1 \varepsilon + \dots$ to problem $P(\varepsilon)$ is such that*

$$\varphi \in \bigcap_{n=-1}^{\infty} \mathcal{M}_n, \quad \text{where } \mathcal{M}_{n+1} = \left\{ \psi \in \mathcal{M}_n: J^n(\psi) = \inf_{\check{\psi} \in \mathcal{M}_n} J^n(\check{\psi}) \right\} \text{ and } \mathcal{M}_{-1} = \mathcal{M}(\varepsilon). \tag{4}$$

In other words, if we call P_n the problem consisting of minimizing functional J^n over the set \mathcal{M}_n , then solving problem $P(\varepsilon)$ is equivalent to solving the sequence of minimization problems $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. This procedure proposed by Pantz [10] is equivalent to that of Fox, Raoult and Simo [8] where they solve a sequence of local boundary-value problems.

Solving problems P_n for $n \leq 0$ rises the additional requirement that $g_+^0 + g_-^0 = 0$ which is legitimate as one cannot expect a plate whose thickness tends to zero to endure a non-vanishing resultant surface load. For convenience, we make the stronger assumption that $g_\pm^0 = 0$.

3. The nonlinear membrane plate model

Solving problem P_1 yields a nonlinear membrane model in the sense that the two-dimensional stored energy function obtained below depends only on the first fundamental form of the deformed plate’s mid-surface. In practice, we show the following

Theorem 3.1. *If $\psi = (\varphi^0, \psi^1, \psi^2, \dots)$ is a solution of problem P_1 , then the leading term of the expansion φ^0 minimizes the functional*

$$J_m^1(\phi^0) = \int_{\omega} W_m(\nabla\phi^0) dx_H - \int_{\omega} f^0 \cdot \phi^0 dx_H - \int_{\omega_{\sigma}} \bar{f}^0 \cdot \phi^0 ds, \quad \text{where} \tag{5}$$

$$W_m(F) = 2a \operatorname{tr} F^t F + 2b \det F^t F + 2d \ln \left\{ \frac{a + b \operatorname{tr} F^t F}{\det F^t F} + c \right\} + e' \quad \forall F = (F_1, F_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \tag{6}$$

$$f^0 = \int_{-1}^1 b^0 d\xi + g_+^1 + g_-^1, \quad \bar{f}^0 = \int_{-1}^1 h^0 d\xi \quad \text{and} \quad e' = 2e + 2d(1 - \ln d), \tag{7}$$

on the set of deformations $\phi^0 : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that $\phi^0|_{\partial\omega_{\phi}} = \bar{\varphi}|_{\partial\omega_{\phi}}$.

The above model generalizes the classical membrane model for a Saint Venant–Kirchhoff material as for certain values of constants a , b and c , the leading terms of the expansion of W_m near a natural state agree with the expression of the said model. Moreover, the normal to the plate $F_1 \wedge F_2$ is prevented from vanishing by the logarithm term. Namely, $W_m(F) \rightarrow +\infty$ when $\det F^t F = |F_1 \wedge F_2|^2 \rightarrow 0$; the relevance of this behaviour will be discussed in Trabelsi [11]. This property is a consequence of the behaviour of the Ciarlet–Geymonat material that precludes the annihilation of volumes. The model also inherits the frame-indifference property of the three-dimensional model.

Remark 2. The relaxation of minimization problems of the kind above has been studied by Ben Belgacem [2] and the computation of the integral representation of the relaxed functional for the weak topology of $W^{1,4}(\omega; \mathbb{R}^3)$ is a work in progress; we refer to Trabelsi [11].

4. The nonlinear bending plate model

Solving problem P_2 leads us to require other assumptions on the setting of our problem. These assumptions agree with our attempt to obtain a pure bending plate model and are therefore justified. Mainly, we choose a vanishing membrane loading and accordingly restrict the leading order term of our deformations to nontrivial isometric deformations of the mid-surface which we suppose possible. In order to fully exclude membrane effects, we suppose the loading to be of pure bending type. Once these requirements are taken into account, problem P_2 becomes trivial and problem P_3 produces a bending plate two-dimensional model in the sense that its stored energy function depends only on the second fundamental form the deformed plate’s mid-surface. More precisely, we prove the following

Theorem 4.1. For external loadings satisfying $b^0 = 0$, $g^1 = 0$, $h^0 = 0$, $f^1 = 0$ and $\bar{f}^1 = 0$, if $\psi = (\varphi^0, \psi^1, \psi^2, \dots)$ is a solution of problem P_3 , then the leading term φ^0 minimizes the energy defined by

$$J_b^3(\phi^0) = \int_{\omega} W_b(\phi^0) dx_H - \int_{\omega} (f^2 \cdot \phi^0 + p^1 \cdot n) dx_H - \int_{\omega_{\sigma}} (\bar{f}^2 \cdot \phi^0 + \bar{p}^1 \cdot n) ds, \quad \text{where} \tag{8}$$

$$W_b(\phi^0) = \frac{4}{3}(a + b)(b_{11}^2(\phi^0) + b_{22}^2(\phi^0) + 2b_{12}^2(\phi^0)) + \frac{4}{3} \frac{(a + b)(b + c)}{d} (b_{11}(\phi^0) + b_{22}(\phi^0))^2, \tag{9}$$

$$b_{\alpha\beta}(\phi^0) = -n(\phi^0) \cdot \phi_{,\alpha\beta}^0, \quad n(\phi^0) = \varphi_{,1 \wedge 2}^0, \tag{10}$$

$$f^2 = \int_{-1}^1 b^2 d\xi + g_+^3 + g_-^3, \quad \bar{f}^2 = \int_{-1}^1 h^2 d\xi, \quad p^1 = \int_{-1}^1 \xi b^1 d\xi + g_+^2 + g_-^2, \quad \text{and} \quad \bar{p}^1 = \int_{-1}^1 \xi h^1 d\xi, \tag{11}$$

on the set of deformations $\phi^0 : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that $\phi_{,\alpha}^0 \cdot \phi_{,\beta}^0 = \delta_{\beta}^{\alpha}$ and $\phi^0|_{\partial\omega_{\phi}} = \bar{\varphi}|_{\partial\omega_{\phi}}$.

Again, the above model generalizes the classical bending plate model for a Saint Venant–Kirchhoff material since for certain values of constants a , b and c we get exactly the same stored energy function.

Remark 3. The existence theory is identical to the one performed by Ciarlet and Coutand [5] for the case of flexural shells made of Saint Venant–Kirchhoff material; see also Ciarlet [4] and Coutand [7].

References

- [1] J.M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* 63 (4) (1976) 337–403.
- [2] H. Ben Belgacem, Relaxation of singular functionals defined on Sobolev spaces, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 5 (2000) 71–85.
- [3] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I. Three-Dimensional Elasticity*, in: *Stud. Math. Appl.*, Vol. 20, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [4] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. III. Theory of Shells*, in: *Stud. Math. Appl.*, Vol. 29, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [5] P. Ciarlet, D. Coutand, An existence theorem for nonlinearly elastic “flexural” shells, *J. Elasticity* 50 (3) (1998) 261–277.
- [6] P.G. Ciarlet, G. Geymonat, Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre* 295 (4) (1982) 423–426.
- [7] D. Coutand, Existence d’un minimiseur pour le modèle proprement invariant de plaque en flexion non linéairement élastique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* 324 (2) (1997) 245–248.
- [8] D.D. Fox, A. Raoult, J.C. Simo, A justification of nonlinear properly invariant plate theories, *Arch. Rational Mech. Anal.* 124 (2) (1993) 157–199.
- [9] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, *J. Math. Pures Appl.* (9) 74 (6) (1995) 549–578.
- [10] O. Pantz, *Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire*, Doctoral Dissertation, Université Pierre et Marie Curie, 2001, Paris.
- [11] K. Trabelsi, *Nonlinear thin plate models for a family of Ogden materials*, preprint.