

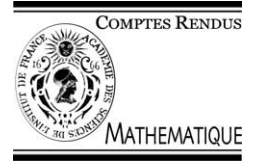


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 771–776



Optimal Control

Differentiability of the L^1 -tracking functional linked to the Robin inverse problem

S. Chaabane^{a,b,c}, J. Ferchichi^{c,d}, K. Kunisch^c

^a ENIT-LAMSIN, campus Universitaire, BP 37, 1002 Tunis, Tunisia

^b Faculté des sciences de Sfax, 3038, Sfax, Tunisia

^c Department of Mathematics, University of Graz, Austria

^d Faculté des sciences de Monastir, Monastir, Tunisia

Received 2 October 2003; accepted 13 October 2003

Presented by Gilles Lebeau

Abstract

We investigate the inverse problem of identifying the Robin parameter φ_{inv} by measuring the electrostatic potential f on a part M of the accessible boundary of a two-dimensional domain. After proving an identifiability result, the inverse problem is formulated as an optimization problem in a non-standard way: the cost functional \mathcal{F} measures L^1 -gap between the solution u_φ of the direct Robin problem and the measurement f on M , and thus it is more robust against outliers than least-squares formulations (Huber, 1969). Positivity, monotonicity and control properties of the state derivative u_φ^1 are proved. Tools of complex analysis allow differentiability of \mathcal{F} in spite of the fact that we work with the L^1 -norm. **To cite this article:** S. Chaabane et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003)*.

© 2003 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Différentiabilité d'une L^1 fonctionnelle écart liée au problème inverse de Robin. On s'intéresse dans ce travail à l'étude d'un problème inverse d'identification du coefficient de Robin φ_{inv} par la mesure du potentiel électrostatique f sur une surface de mesure M du bord accessible dans le cas 2D. Après avoir prouvé un résultat d'identifiabilité, on transforme ce problème inverse en un problème d'optimisation dans un cas non standard : la fonction coût \mathcal{F} modélise l'écart L^1 entre la solution u_φ du problème direct de Robin et les mesures f sur M . L'avantage de cette méthode est qu'elle est plus robuste au bruit que celle du moindre-carré (Huber, 1969). Après avoir prouvé quelques propriétés de positivité, de monotonie et de contrôle de la dérivée u_φ^1 de l'état, on démontre en utilisant des outils d'analyse complexe que la fonctionnelle \mathcal{F} est différentiable bien qu'on travaille avec la norme L^1 . **Pour citer cet article :** S. Chaabane et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003)*.

© 2003 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

E-mail addresses: slim.chaabane@fsm.rnu.tn (S. Chaabane), jamel.ferchichi@uni-graz.at (J. Ferchichi), karl.kunisch@uni-graz.at (K. Kunisch).

1631-073X/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2003.10.023

Version française abrégée

Soit Ω un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 dont la frontière $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^{1,\beta}$; $\beta \in]0, 1[$ (voir Fig. 1). Soient Γ_1 et Γ_2 deux ouverts non vides connexes et disjoints de $\partial\Omega$, satisfaisant $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$. On désigne par M un ouvert connexe non vide de Γ_1 tel que $\partial M \cap \partial\Gamma_1 = \emptyset$.

Considérons le problème inverse suivant :

Étant donné un flux $\Phi \in \mathcal{C}_0^0(\Gamma_1)$ vérifiant $\Phi \geq 0$, $\Phi \not\equiv 0$ et la mesure f sur M ; déterminer une fonction φ_{inv} telle que la solution u du problème :

$$(RP) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi_{\text{inv}} u = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

vérifie aussi $u|_M = f$.

On se place dans le cas où la fonction φ_{inv} appartient à l'ensemble des paramètres φ admissibles donné par :

$$\Phi_{\text{ad}} = \{ \varphi \in L^\infty(\Gamma_2), \varphi \not\equiv 0 \text{ et } \varphi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_2 \}.$$

La première partie de ce travail est consacrée à étendre le résultat d'identifiabilité prouvé dans [3] aux fonctions $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$. La démonstration se base essentiellement sur des propriétés de positivité et de monotonie de la solution du problème de Robin (RP).

Dans la deuxième partie de ce travail, on transforme le problème inverse en un problème d'optimisation par la construction d'une fonctionnelle \mathcal{F} définie sur Φ_{ad} par :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_M |u_\varphi - f|,$$

avec u_φ désigne la solution du problème (RP) en remplaçant φ_{inv} par φ . On démontre dans ce cas que φ_{inv} est l'unique minimum de \mathcal{F} . Notons que les fonctionnelles L^1 sont plus robustes aux bruits que les fonctionnelles moindres-carrés [7] ce qui motive notre travail.

Pour $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$, la fonction $(u_\varphi - f)$ peut être positive dans une partie M_1 de M et négative dans une autre partie M_2 . Ce changement de signe entraîne en général des problèmes de différentiabilité de la fonctionnelle \mathcal{F} . Pour surmonter cette difficulté, on commence par prouver que l'ensemble :

$$S_\varphi = \{ x \in M \text{ telle que } u_\varphi(x) = f(x) \},$$

est fini pour tout $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$; $\varphi \neq \varphi_{\text{inv}}$. On démontre ensuite les deux théorèmes suivants :

Théorème 0.1. Pour $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ et $h_1, h_2 \in L^\infty(\Gamma_2)$ telle que $h_1 \leq h_2$, on a :

$$u_\varphi^1(h_1) \geq u_\varphi^1(h_2),$$

avec $u_\varphi^1(h)$; $h \in L^\infty(\Gamma_2)$, désigne la dérivée de l'état u_φ dans la direction h .

Théorème 0.2. La dérivée u_φ^1 de l'état vérifie les propriétés suivantes :

- Monotonie : Soit $\varphi, \psi \in \Phi_{\text{ad}}$ telle que $\psi \leq \varphi$. On a alors : $u_\psi^1(1) \leq u_\varphi^1(1)$.
- Positivité : $u_\varphi^1(1)(x) < 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.
- Contrôle : Pour tout $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ et $h \in L^\infty(\Gamma_2)$, on a : $|u_\varphi^1(h)| \leq \|h\|_{L^\infty(\Gamma_2)} u_\varphi^1(1)$.

Ces propriétés de positivité, de monotonie et de contrôle de la dérivée u_φ^1 de l'état ainsi la caractérisation de l'ensemble S_φ , jouent un rôle important pour l'étude de la différentiabilité de la fonctionnelle \mathcal{F} formulée en norme L^1 .

Théorème 0.3. Pour $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ on a :

$$\lim_{\substack{\|\psi - \varphi\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \rightarrow 0^+ \\ \psi \in \Phi_{\text{ad}}}} \frac{\mathcal{F}(\psi) - \mathcal{F}(\varphi)}{\|\psi - \varphi\|_{L^\infty(\Gamma_2)}} = \int_M u_\varphi^1(\psi - \varphi) \text{sign}(u_\varphi - f),$$

avec $\text{sign}(u_\varphi - f)$ représente la fonction signe de $(u_\varphi - f)$.

1. Introduction

We investigate the inverse problem of identification of a Robin coefficient φ_{inv} from the knowledge of data f on some part M of the accessible boundary Γ_1 . The Robin inverse problem studied in this work might be viewed as a model for corrosion detection problem (see, for example, [6,8,9]) and it was studied previously by many authors. We cite for example the works of [6,8] on uniqueness, stability and an identification process in the case that Ω of a thin 2D strip domain. More recently, a local isotropic stability result together with a logarithmic estimate for the mapping of the parameters φ to the data f in case Ω is a 2D rectangular domain was established in [5] and a global logarithmic stability result between Robin's parameters φ and measurements f was proved in [4] in the case of a $C^{1,\beta}$ Jordan domain of \mathbb{R}^2 . Numerical implementation for identification of the Robin parameter φ by using the Kohn–Vogelius method was studied in [1] and by using tools of complex analysis and analytic data extension was studied in [2].

2. Problem formulation and identifiability result

We consider a simply connected bounded Jordan domain Ω in \mathbb{R}^2 with $C^{1,\beta}$ boundary $\partial\Omega$ and $\beta \in]0, 1[$ (see Fig. 1). Let Γ_1 and Γ_2 be two nonempty connected disjoint open subsets of $\partial\Omega$, satisfying $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$ and let M be a nonempty connected open subset of Γ_1 such that $\partial M \cap \partial\Gamma_1 = \emptyset$.

We study the following inverse problem:

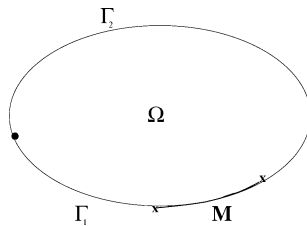


Fig. 1. The domain and its boundary.

Fig. 1. Le domaine et sa frontière.

Given a prescribed flux $\Phi \in C_0^0(\Gamma_1)$ with $\Phi \geq 0$, $\Phi \not\equiv 0$, and a measurement f of u on M , recover the function φ_{inv} such that the solution u to the problem:

$$(RP) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \Phi & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi_{\text{inv}} u = 0 & \text{on } \Gamma_2, \end{cases}$$

also satisfies $u|_M = f$.

The function φ_{inv} is assumed to belong to the set of admissible parameters Φ_{ad} defined by:

$$\Phi_{\text{ad}} = \{\varphi \in L^\infty(\Gamma_2): \varphi \not\equiv 0 \text{ and } \varphi \geq 0 \text{ a.e. on } \Gamma_2\}. \quad (1)$$

For $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$, we denote by u_φ the solution of (RP) with φ_{inv} replaced by φ .

If the admissible parameter set is chosen to be $\mathcal{A} = \{\varphi \in C_0^0(\overline{\Gamma_2}): \varphi \geq 0 \text{ and } \varphi \not\equiv 0\}$ uniqueness of the coefficient φ_{inv} from the knowledge of f on M was established in [2,3]. The following identifiability theorem represents an extension of that result for the set Φ_{ad} :

Theorem 2.1. *Let $\varphi, \psi \in \Phi_{\text{ad}}$ and assume that $u_{\varphi|_M} = u_{\psi|_M}$. Then $\varphi = \psi$ a.e. on Γ_2 .*

The proof of this theorem is based on positivity and monotonicity properties of the solution u_φ with respect to the parameter φ . For $\varphi \in \mathcal{A}$, these properties are proved in [2,3] by the Hopf Maximum principle. If the parameters φ are only nonnegative in the L^∞ sense, as required by Φ_{ad} , then the Hopf maximum principle is not applicable. A modified proof can be based on the following monotonicity lemma:

Lemma 2.2. *Let $\mathcal{S} = \{\varphi \in L^2(\Gamma_2): \varphi \not\equiv 0 \text{ and } \varphi \geq 0 \text{ a.e. on } \Gamma_2\}$. Then the mapping:*

$$\begin{aligned} \eta: \mathcal{S} &\longrightarrow H^1, \\ \varphi &\longmapsto u_\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

is well defined, locally Lipschitzian and a decreasing function on \mathcal{S} , i.e., $0 \leq \varphi \leq \psi$ implies $0 \leq u_\psi \leq u_\varphi$. Moreover, $\inf_{x \in \overline{\Omega}} u_\varphi(x) > 0$.

3. Differentiability of the cost function \mathcal{F}

Because f is attainable and due to Theorem 2.1, the function φ_{inv} is the unique solution of the following optimization problem:

$$\begin{cases} \min \int_M |u_\varphi - f|, \\ \text{subject to } \varphi \in \Phi_{\text{ad}}. \end{cases}$$

It will be convenient to introduce the functional $\mathcal{F}: \Phi_{\text{ad}} \subset L^\infty(\Gamma_2) \rightarrow \mathbb{R}$ by $\mathcal{F}(\varphi) = \int_M |u_\varphi - f|$. The motivation for using the L^1 -functional rather than a last squares functional is given by the fact that \mathcal{F} is robust against outliers in noisy data [7]. For a given parameter $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$, the function $u_\varphi - f$ can be positive in some part M_1 of M and negative in another part M_2 resulting in possible lack of differentiability of \mathcal{F} . We first establish the following lemma:

Lemma 3.1. *The set $S_\varphi = \{x \in M: u_\varphi(x) = f(x)\}$ is finite for every $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ such that $\varphi \neq \varphi_{\text{inv}}$.*

For $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$, and $h \in L^\infty(\Gamma_2)$, let $u_\varphi^1(h)$ denote the solution of the problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi u = -hu_\varphi & \text{on } \Gamma_2. \end{cases} \tag{3}$$

This lemma allows to verify the following result on the asymptotic behavior of the difference quotient.

Theorem 3.2. *The linear mapping $h \mapsto u_\varphi^1(h)$ is continuous and for every $\varphi, \psi \in \Phi_{\text{ad}}$, we have:*

$$\lim_{\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \rightarrow 0} \frac{\|u_\psi - u_\varphi - u_\varphi^1(\psi - \varphi)\|_{H^1(\Omega)}}{\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(\Gamma_2)}} = 0.$$

Moreover the mapping: $\varphi \mapsto u_\varphi^1$ from Φ_{ad} equipped with the L^∞ norm to $\mathcal{L}(L^\infty(\Gamma_2), H^1(\Omega))$ is well defined and locally Lipschitzian.

We prove then the two following theorems providing positivity, monotonicity and control properties of the state derivative u_φ^1 .

Theorem 3.3. *For $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ and $h_1, h_2 \in L^\infty(\Gamma_2)$ with $h_1 \leq h_2$, we have:*

$$u_\varphi^1(h_1) \geq u_\varphi^1(h_2).$$

Theorem 3.4. *The following properties hold:*

- Monotonicity: Let $\varphi, \psi \in \Phi_{\text{ad}}$ such that $\psi \leq \varphi$. Then: $u_\psi^1(1) \leq u_\varphi^1(1)$.
- Positivity: $u_\varphi^1(1)(x) < 0$ for every $x \in \bar{\Omega}$.
- Control: For every $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ and $h \in L^\infty(\Gamma_2)$, we have: $|u_\varphi^1(h)| \leq -\|h\|_{L^\infty(\Gamma_2)} u_\varphi^1(1)$.

Lemma 3.1 and Theorems 3.2–3.4 imply that the functional \mathcal{F} is differentiable in $\text{Int}(\Phi_{\text{ad}})$:

Theorem 3.5. *For $\varphi \in \Phi_{\text{ad}}$ we have*

$$\lim_{\substack{\|\psi - \varphi\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \rightarrow 0^+ \\ \psi \in \Phi_{\text{ad}}}} \frac{\mathcal{F}(\psi) - \mathcal{F}(\varphi)}{\|\psi - \varphi\|_{L^\infty(\Gamma_2)}} = \int_M u_\varphi^1(\psi - \varphi) \text{sign}(u_\varphi - f),$$

where $u_\varphi^1(\psi - \varphi)$ is the solution of (3) with $h = \psi - \varphi$. Moreover, the function \mathcal{F} is differentiable in $\text{Int}(\Phi_{\text{ad}})$.

4. Conclusion

We have established the differentiability of the function \mathcal{F} by using mainly some tools of complex analysis in the case of no error on the data f . Next we shall study differentiability properties of the function \mathcal{F} in the case of a L^1 -perturbed data.

The functional \mathcal{F} and its differential expression permit to define a Newton-type method in order to solve numerically the Robin inverse problem. This will be the next step of our work.

References

- [1] S. Chaabane, C. Elhechmi, M. Jaoua, A stable recovery method for the Robin inverse problem, Rapport de Recherche LAMSIN, No. 03-02, 2003, submitted for publication.
- [2] S. Chaabane, M. Jaoua, J. Leblond, Parameter identification for Laplace equation and approximation in analytic classes, *J. Inv. Ill-Posed Problems* 11 (1) (2003) 1–25.
- [3] S. Chaabane, M. Jaoua, Identification of Robin coefficients by the means of boundary measurements, *Inverse Problems* 15 (1999) 1425–1438.
- [4] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua, J. Leblond, Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in 2D Laplace inverse problems, *Inverse Problems* (2003), in press.
- [5] M. Choulli, An inverse problem in corrosion detection: stability estimates (2001), submitted for publication.
- [6] D. Fasino, G. Inglese, An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods, *Inverse Problems* 15 (1999) 41–48.
- [7] J. Huber, *Théorie de l'Inférence Statistique Robuste*, Les presses de l'Université de Montréal, 1969.
- [8] G. Inglese, An inverse problem in corrosion detection, *Inverse Problem* 13 (1997) 977–994.
- [9] P. Kaup, F. Santosa, M. Vogelius, A method for imaging corrosion damage in thin plates from electrostatic data, *Inverse Problem* 12 (1996) 279–293.