

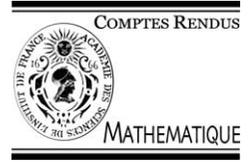


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 41–46



Géométrie algébrique

Interprétation motivique de la formule d'excès d'intersection

Frédéric Déglise

Institut de mathématique, Université Paris 7, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 13 février 2003 ; accepté après révision le 7 octobre 2003

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Suivant Voevodsky, on sait associer un triangle de Gysin dans la catégorie des motifs triangulés à tout couple (X, Z) formé d'un schéma lisse X et d'un sous-schéma fermé lisse Z de X . Nous étudions la functorialité de ce triangle de Gysin : si l'on se donne un morphisme $f : Y \rightarrow X$ transverse à Z , cette functorialité est simple. Nous nous intéressons au cas où le morphisme f n'est pas tout à fait transverse à Z , obtenant ainsi une formule motivique d'excès d'intersection et une formule qui fait intervenir la ramification au sens des anneaux de valuations discrètes d'égale caractéristique. **Pour citer cet article : F. Déglise, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Motivic interpretation of the excess intersection formula. Following Voevodsky, one can associate a Gysin triangle in the category of triangulated motives to every couple (X, Z) such that X is a smooth scheme and Z is a smooth closed subscheme of X . We study the functoriality of this triangle: if one considers a morphism $f : Y \rightarrow X$ which is transversal to Z , this functoriality is simple. We are rather interested in the case where f is not quite transversal to Z . In that case, one obtains a motivic excess intersection formula and a ramification formula in the sense of equicharacteristic discrete valuation rings. **To cite this article: F. Déglise, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let k be a perfect field. In this Note, the word scheme always means separated k -scheme of finite type. We say that a scheme is smooth when it is smooth over the base field. We use the notation and definitions of [3], Chapter 5. Recall also from [9] that for a smooth scheme X , we get a canonical isomorphism $H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \simeq CH^n(X)$, where the right-hand side is the usual Chow group of cycles of codimension n of X .

In this Note, we study the Gysin triangle in the category $DM_{-}^{\text{eff}}(k)$, and particularly its functoriality.

First, we adopt a different method than the one used in [3], Chapter 5 to construct the Gysin triangle. We call closed pair every couple (X, Z) such that X is a smooth scheme and Z is a closed subscheme of X . A morphism of closed pairs $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ is a commutative square of schemes such that the associated square of topological spaces is Cartesian – we say that such a morphism is Cartesian if the square is Cartesian in the category of schemes. To a closed pair (X, Z) we associate, with the notation of loc. cit., the motivic complex $C^*(L(X)/L(X - Z))$, denoted by $M(X, Z)$. This complex is functorial with respect to morphisms of closed pairs.

Adresse e-mail : deglise@math.univ-paris13.fr (F. Déglise).

Let (X, Z) be a closed pair such that Z is smooth. Following [6], one uses the deformation to the normal cone to obtain an explicit isomorphism $M(X, Z) \simeq M(N_Z X, Z)$. The motivic complex at the right hand side is also denoted by $M\text{Th}(N_Z X)$ and called the Thom motive of the fiber bundle $N_Z X$ over Z .

Moreover, as we work with motives, we get a canonical isomorphism $M\text{Th}(N_Z X) \rightarrow M(Z)(n)[2n]$ when Z is of pure codimension n in X . This isomorphism is obtained from the Thom class of $N_Z X$ in the Chow group $CH^n(\mathbb{P}(N_Z X \oplus 1))$ (cf. formula (2.3) for definition).

Thus, one obtain a canonical isomorphism $M(X, Z) \rightarrow M\text{Th}(N_Z X) \rightarrow M(Z)(n)[2n]$ when Z is smooth of pure codimension n in X . This isomorphism allows one to obtain the Gysin triangle: $M(X - Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M(Z)(n)[2n] \xrightarrow{+1}$.

Let now (X, Z) and (Y, T) be closed pairs such that Z (resp. T) is smooth of pure codimension n in X (resp. m in Y). Let $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ be a morphism of closed pairs. It induces a morphism $M(Y, T) \rightarrow M(X, Z)$, and with the isomorphisms described above, a morphism $M(f, g)_! : M(T)(m)[2m] \rightarrow M(Z)(n)[2n]$. The main purpose of this note is to understand this morphism:

Proposition 0.1. *With the above hypothesis:*

- (1) *If f is transversal to Z (i.e., $n = m$ and $T = Z \times_X Y$), then $M(f, g)_! = M(g)(n)[2n]$.*
- (2) *Suppose (f, g) is Cartesian. Put $\xi = g^* N_Z X / N_T Y$; it is called the excess intersection bundle, and has dimension $e = n - m$. Let Δ_T be the diagonal embedding of T/k and $c_e(\xi) : M(T) \rightarrow \mathbb{Z}(e)[2e]$ be the morphism corresponding to the top Chern class of ξ in $CH^e(T) \simeq \text{Hom}_{DM_{\text{eff}}(k)} M(T)\mathbb{Z}(e)[2e]$. Then*

$$M(f, g)_! = (M(g) \otimes c_e(\xi)) \circ M(\Delta_T)(m)[2m].$$

- (3) *Suppose $n = m = 1$. Let \mathfrak{J} denote the ideal of T in Y , and suppose that the ideal of $Z \times_X Y$ in Y is equal to \mathfrak{J}^r for $r \in \mathbb{N}^*$. Then $M(f, g)_! = r \cdot M(g)(1)[2]$.*

Formula (2) is a generalisation of a particular case of the excess intersection formula of [4], Theorem 6.3 to the case of motives. Indeed, the Gysin triangle induces in motivic cohomology the long exact sequence of localisation for higher Chow groups using the isomorphism in [9]. Finally, formula (3) in the case of an extension of discrete valuation rings over k gives a ramification formula for the residue homomorphism.

1. Introduction

On fixe un corps parfait k . Les schémas que l'on considère sont toujours supposés munis d'une structure de k -schéma séparé de type fini ; on dit simplement qu'un schéma est lisse lorsqu'il est lisse sur k . On note $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts, abrégeant ainsi la notation de [3], Chapitre 5. Pour le reste, on conserve les notations de loc. cit. On utilise enfin l'isomorphisme $H^p(X; \mathbb{Z}(q)) \simeq CH^q(X, 2q - p)$ de [9],¹ où le deuxième désigne le groupe de Chow supérieur défini par Bloch dans [1].

2. Isomorphisme de pureté et triangle de Gysin

2.1. Motifs à supports

Définition 2.1. On appelle paire fermée tout couple (X, Z) tel que X est un schéma lisse et Z un sous-schéma fermé de X . On appelle morphisme de paires fermées tout couple $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ de morphismes de schémas s'inscrivant dans le carré commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

¹ Le lecteur constatera que cet isomorphisme ne nécessite pas le théorème de pureté que nous réétablissons ici.

Un tel morphisme est cartésien (resp. excisif) si le carré ci-dessus est cartésien (resp. f est étale et g_{red} est un isomorphisme).

Rappelons que d’après [3], Chapitre 5, à tout schéma lisse X est associé un faisceau avec transferts $L(X)$ représenté par X . Rappelons aussi que Voevodsky a construit un foncteur « complexe des chaînes singulières » $C^* : \mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow DM_-^{\text{eff}}(k)$ (cf. loc. cit., 3.2).

Définition 2.2. Soit (X, Z) une paire fermée.

On note $L(X, Z)$ le conoyau du monomorphisme $L(X - Z) \rightarrow (X)$ dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$. On définit le motif relatif associé à (X, Z) en posant $M(X, Z) = C^*(X, Z)$.

On déduit de cette définition un triangle distingué naturel :

$$M(X - Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M(X, Z) \rightarrow M(X - Z)[1]. \tag{1}$$

Remarque 1. Il résulte de la définition que les motifs relatifs sont naturels par rapport aux morphismes de paires fermées. Par ailleurs, ils sont aussi contravariants par rapport aux inclusions des sous-schémas fermés en jeu.

Proposition 2.3.

- (Red) Réduction : Si (X, Z) est une paire fermée, le morphisme canonique $(X, Z_{\text{red}}) \rightarrow (X, Z)$ induit l’identité $M(X, Z_{\text{red}}) \rightarrow M(X, Z)$.
- (Add) Additivité : Soit X un schéma lisse, et Z, Z' des sous-schémas fermés de X disjoints. Alors, le morphisme induit $M(X, Z \sqcup Z') \rightarrow M(X, Z) \oplus M(X, Z')$ est un isomorphisme.
- (Exc) Excision : Tout morphisme excisif $(Y, T) \rightarrow (X, Z)$ induit un isomorphisme $M(Y, T) \rightarrow M(X, Z)$.
- (MV) Mayer-Vietoris : Soient X un schéma algébrique lisse, U et V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$, et Z un sous-schéma fermé de X . On a alors un triangle distingué

$$M(U \cap V, Z \cap U \cap V) \xrightarrow{j_U - j_V} M(U, Z \cap U) \oplus M(V, Z \cap V) \xrightarrow{i_U + i_V} M(X, Z) \xrightarrow{+1} \gg,$$

où j_U et i_V désignent les morphismes cartésiens induits par les immersions ouvertes évidentes.

- (Htp) Homotopie : Le morphisme cartésien $\pi : (\mathbb{A}_X^1, \mathbb{A}_Z^1) \rightarrow (X, Z)$ induit par les projections canoniques induit un isomorphisme $M(\pi) : M(\mathbb{A}_X^1, \mathbb{A}_Z^1) \rightarrow M(X, Z)$.

Démonstration. La première propriété est évidente, et les deux dernières résultent des propriétés analogues des motifs de Voevodsky. La propriété (Add) découle de (MV). La propriété (Exc) quant à elle est déjà vraie pour le faisceau avec transferts $L(X, Z)$ d’après les propriétés de la topologie de Nisnevich. \square

2.2. Déformation au cône normal

Soit (X, Z) une paire fermée. On note $B_Z X$ l’écclaté de X en Z . Rappelons alors la construction de l’espace de déformation au cône normal. Avec une convention un peu différente de celle de [4], Chapitre 5, on pose $D_Z X = B_{0 \times Z}(\mathbb{A}_k^1 \times X) - B_Z X$. Ce schéma est alors naturel par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées. Par ailleurs, il est plat sur \mathbb{A}_k^1 et $D_Z X|_1 = X$. Enfin, $D_Z X|_0 = C_Z X$, cône normal de Z dans X . On en déduit des morphismes de déformation au cône normal : $(X, Z) \xrightarrow{(d, s_1)} (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xrightarrow{(d', s_0)} (C_Z X, Z)$, qui sont des morphismes cartésiens de paires fermées. On note par ailleurs $N_Z X$ le fibré normal de Z dans X . Le résultat sur lequel s’appuie cette note est alors :

Proposition 2.4. Soit (X, Z) une paire fermée telle que Z soit lisse.

Alors, les morphismes $M(X, Z) \xrightarrow{M(d, s_1)} M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{M(d', s_0)} M(N_Z X, Z)$ induits dans $DM_-^{\text{eff}}(k)$ par la déformation au cône normal sont des isomorphismes.

Démonstration. Dans le cas où $X = \mathbb{A}_Z^c$, pour un entier naturel c , Z étant vu comme sous-schéma fermé à travers la section nulle, le théorème est évident d’après le calcul de l’espace de déformation et la propriété **(Htp)**.

Plus généralement, comme X et Z sont lisses, on obtient localement pour la topologie de Zariski une paramétrisation $(X, Z) \rightarrow (\mathbb{A}_k^{n+c}, \mathbb{A}_k^n)$, morphisme cartésien étale (cf. [5], 17.12.2 d). Muni d’une telle paramétrisation, on voit par la propriété **(Exc)** que la proposition pour la paire (X, Z) est équivalente à la proposition pour la paire (\mathbb{A}_Z^c, Z) , cas déjà réglé ci-dessus.

On peut alors conclure grâce à la propriété **(MV)**. \square

2.3. Motif de Thom

Grâce à la proposition précédente, on a réduit l’étude des motifs relatifs dont le fermé est lisse au cas du motif $M(E, X)$ où E/X est un fibré vectoriel et X est vu comme sous-schéma fermé à travers la section nulle. On note $MTh(E)$ ce motif relatif, et on l’appelle le *motif de Thom* de E/X . Le but de ce qui suit est de dégager un isomorphisme canonique pour ce motif, lorsque E/X est de rang n .

Or, en utilisant le même procédé que dans [6], Proposition 2.17, on obtient un triangle distingué canonique $M(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{i} M(\mathbb{P}(E \oplus 1)) \rightarrow MTh(E) \xrightarrow{+1}$, où $E \oplus 1 = E \times_X \mathbb{A}_X^1$ en tant que fibré vectoriel sur X , et le morphisme i est engendré par l’immersion fermée correspondant à l’hyperplan à l’infini.

D’après le Théorème 3.5.1 de [3], Chapitre 5, il existe un isomorphisme canonique $M(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{l(E)} \bigoplus_{0 \leq i < n} M(X)(i)[2i]$. Il résulte de la définition de cet isomorphisme que le morphisme i correspond à travers les isomorphismes $l(E)$ et $l(E \oplus 1)$ à l’inclusion canonique des n premiers facteurs ; on en déduit que le triangle ci-dessus est scindé. Il induit donc un isomorphisme canonique $\alpha_E : M(X)(n)[2n] \xrightarrow{\sim} MTh(E)$ dont nous allons expliciter un inverse.

Rappelons pour cela la définition de la classe de Thom du fibré E/X . Notant p (resp. λ) la projection canonique (resp. le fibré inversible) de $\mathbb{P}(E \oplus 1)$, il s’agit de la classe dans $CH^n(\mathbb{P}(E \oplus 1))$ égale à $t(E) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} p^*(c_{n-i}(E)) \cdot c_1(\lambda)^i$, où les c_i désignent les classes de Chern classiques.

Remarque 2. Il arrive que l’on considère plutôt cette classe multipliée par $(-1)^n$. Notre convention de signe sera justifiée dans le paragraphe suivant.

On peut utiliser l’isomorphisme $H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \simeq CH^n(X)$ rappelé au début de cette Note ; la classe de Thom correspond alors à un morphisme $t(E) : M(\mathbb{P}(E \oplus 1)) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$ dans $DM_{-}^{\text{eff}}(k)$.

Soit p la projection canonique du fibré projectif $\mathbb{P}(E \oplus 1)/X$ et Δ l’immersion diagonale du k -schéma $\mathbb{P}(E \oplus 1)$. Considérons le morphisme $(t(E) \otimes M(p)) \circ M(\Delta) : M(\mathbb{P}(E \oplus 1)) \rightarrow M(X)(n)[2n]$. Comme par définition $t(E)|_{\mathbb{P}(E)} = 0$, et que l’isomorphisme utilisé ci-dessus est compatible au pullback, ce morphisme induit, grâce au triangle distingué scindé ci-dessus, un unique morphisme $\varepsilon_E : MTh(E) \rightarrow M(X)(n)[2n]$.

Lemme 2.5. Soit X un schéma lisse, et E/X un fibré vectoriel de rang n . Alors, le morphisme ε_E est un isomorphisme de réciproque α_E .

Démonstration. Posons $\mathcal{L} = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} M(X)(i)[2i]$. On peut expliciter le morphisme α_E comme la composée suivante $\varepsilon'_E : M(X)(n)[2n] \xrightarrow{(1)} \mathcal{L} \xrightarrow{l(E \oplus 1)^{-1}} M(\mathbb{P}(E \oplus 1)) \xrightarrow{-\pi_E} MTh(E)$, où (1) est le monomorphisme canonique.

Il résulte alors de la définition de ε_E que la relation suivante est vérifiée : $\varepsilon_E \circ \alpha_E = \text{Id}$, ce qui permet de conclure. \square

2.4. Triangle de Gysin

Soit (X, Z) une paire fermée. Les deux isomorphismes explicités ci-dessus nous permettent de définir à partir de (1) un triangle distingué canonique, appelé triangle de Gysin : $M(X - Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M(Z)(n)[2n] \xrightarrow{+1}$. La fin de cette Note a pour but d’élucider en partie la functorialité de ce triangle.

Remarque 3. On peut voir que ce triangle distingué coïncide avec celui défini dans [3], Chapitre 5, puisque l’isomorphisme exhibé avant la Proposition 3.5.4 de loc. cit. est égal à ε_E .

Ceci justifie notre convention de signe concernant la classe de Thom. Remarquons par ailleurs que ce choix est justifié par la remarque de loc. cit. qui précède la Proposition 3.5.4.

3. Défauts de transversalité

On considère maintenant deux paires fermées (X, Z) et (Y, T) telles que Z (resp. T) est lisse et de codimension n dans X (resp. m dans Y). On se donne de plus un morphisme $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$.

Celui-ci induit donc un morphisme $M(Y, T) \rightarrow M(X, Z)$. On s’intéresse au problème de déterminer le morphisme $M(f, g)_! : M(T)(m)[2m] \rightarrow M(Z)(n)[2n]$ qui s’en déduit grâce aux isomorphismes de la section précédente.

3.1. Cas d’un morphisme cartésien

On suppose que (f, g) est cartésien. Le morphisme $M(f, g)_!$ est alors bien défini. On remarque que si de plus $n = m$, par définition, le morphisme f est transverse à Z . La formule suivante est toutefois valable même si $m < n$:

Théorème 3.1. *On note $\xi = g^*N_Z X/N_T Y$ vu comme fibré vectoriel sur T , et on pose $e = n - m$. On note $c_e(\xi) : M(T) \rightarrow \mathbb{Z}(e)[2e]$ le morphisme correspondant à la classe de Chern maximale de ξ . On considère enfin Δ_T la diagonale de T/k . Alors, $M(f, g)_! = (M(g) \otimes c_e(\xi)) \circ M(\Delta_T)(m)[2m]$.*

Remarque 4. En particulier, si f est transverse à Z , $M(f, g)_! = M(g)(n)[2n]$.

Indication de preuve. La déformation au cône normal étant naturelle par rapport aux carrés cartésiens, le morphisme $M(f, g)$ est isomorphe à travers celle-ci au morphisme $M(N_g f, g)$ où $N_g f : N_T Y \xrightarrow{i} g^*N_Z X \xrightarrow{g'} N_Z X$ est le morphisme induit par (f, g) sur le fibré normal. Le morphisme i est une immersion fermée, et il reste à montrer le lemme :

Lemme 3.2. *Soit $i : F \rightarrow E$ une immersion fermée, morphisme de fibrés vectoriels sur T de rangs respectifs m et n . On pose $e = n - m$ et $\xi = E/F$. Alors, le morphisme $M\text{Th}(i) : M\text{Th}(F) \rightarrow M\text{Th}(E)$ correspond à travers les isomorphismes respectifs ε_F et ε_E à $M(T)(m)[2m] \xrightarrow{(M(1_T) \otimes c_e(\xi)) \circ M(\Delta_T)(m)[2m]} M(T)(n)[2n]$.*

Soit $\iota : \mathbb{P}(F \oplus 1) \rightarrow \mathbb{P}(E \oplus 1)$ l’immersion fermée induite par i . On note q la projection de $\mathbb{P}(F \oplus 1)$ sur T . Le lemme découle alors de la formule suivante dans $CH^*(\mathbb{P}(F \oplus 1)) : \iota^*(t(E)) = q^*(c_e(\xi)).t(F)$.² □

Remarque 5. Compte tenu de l’isomorphisme $H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \simeq CH^n(X)$, et du fait que le triangle de Gysin induit sur la cohomologie motivique la suite exacte longue de localisation pour les groupes de Chow supérieurs, on voit que ce théorème est une interprétation motivique du Théorème 6.3 de [4] (et le contient comme cas particulier lorsque tous les schémas en jeu sont lisses). Ainsi, ce théorème généralise la formule de Fulton au cas des groupes de Chow supérieurs tels qu’ils sont définis par Bloch.

3.2. Ramification et codimension 1

On suppose maintenant que $n = m = 1$. Notons \mathcal{J} l’idéal de T dans Y . D’après la définition des morphismes de paires fermées dans 2.1 et puisque T est réduit par hypothèse, $T = (Z \times_X Y)_{\text{red}}$. On ajoute de plus l’hypothèse que l’idéal de $Z \times_X Y$ dans Y est égal à \mathcal{J}^r où $r \in \mathbb{N}^*$.

² On a utilisé le fait que l’isomorphisme $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \simeq CH^*(X)$ est naturel et que le produit sur les groupes de Chow correspond au cup-produit en cohomologie motivique. Pour cette dernière vérification, on renvoie à [2], Théorème 8.3.4.

Théorème 3.3. Dans la situation ci-dessus, $M(f, g)_! = r.M(g)(1)[2]$.

Indication de preuve. Rappelons que si \mathcal{J} est l'idéal de Z dans X , $D_Z X = \text{Spec}(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}^n . t^{-n})$, t désignant le paramètre de la déformation.

On associe dès lors au morphisme (f, g) le morphisme $D_g f : D_T Y \rightarrow D_Z X$, spectre du morphisme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}^n . t^{-n} & \xrightarrow{(1)} & \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{J}^r)^n . t^{-n} & \xrightarrow{(2)} & \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}^m . t^{-m} \\ x . t^{-n} & \mapsto & \varphi(x) . t^{-n} & \mapsto & \varphi(x) . t^{-rn}. \end{array}$$

Dans le morphisme (1), $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ est induit par le morphisme f . Le morphisme (2) est l'élévation à la puissance r sur le paramètre de la déformation. Par ailleurs, ce morphisme induit un morphisme $(D_g f, h) : (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) \rightarrow (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)$ qui est égal à (f, g) sur la fibre au-dessus de 1. Notons $N_g f : N_T Y \rightarrow N_Z X$ le morphisme induit par $D_g f$ sur la fibre au-dessus de 1. Donc, à travers l'isomorphisme de déformation au cône normal, le morphisme $M(f, g)$ correspond au morphisme $M(N_g f, g)$. Par ailleurs, le morphisme $N_g f$ est composé des morphismes $N_T Y \xrightarrow{\nu} N_T Y \xrightarrow{\mu} N_Z X$, où le morphisme μ est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de g , et ν est un morphisme homogène de degré r .

Soient $\hat{\mu} : \mathbb{P}(N_T Y \oplus 1) \rightarrow \mathbb{P}(N_T Y \oplus 1)$ le morphisme induit par μ sur les complétions projectives et λ le fibré inversible canonique sur $\mathbb{P}(N_T Y \oplus 1)$. Alors, $\hat{\mu}^*(\lambda) = \lambda^r$. On peut en déduire qu'à travers l'isomorphisme de Thom, $M\text{Th}(\mu)$ correspond à la multiplication par r , ce qui permet de conclure. \square

Remarque 6. Cette proposition s'applique en particulier pour une extension d'anneaux de valuations discrètes d'égale caractéristique. L'entier r n'est rien d'autre que l'indice de ramification au sens de [8] de l'extension considérée. On notera en particulier que la formule est valable même dans le cas de ramification sauvage. Compte tenu de l'isomorphisme entre cohomologie motivique et groupes de Chow, cette formule s'interprète à nouveau en affirmant qu'un certain morphisme de Gysin raffiné est la multiplication par r .

Nous avons particulièrement utilisé cette formule dans [2], Théorème 9.2.1, pour interpréter les formules des modules de cycles de Rost (cf. [7]) dans la catégorie des motifs triangulés. Nous projetons par ailleurs d'utiliser cette formule afin de prolonger la suite spectrale définie par Rost dans loc. cit. au cas de la cohomologie motivique.

Remerciements

Je remercie F. Morel pour m'avoir fait connaître la classe de Thom, J. Wildeshaus pour m'avoir aidé dans la rédaction finale de cette note et le rapporteur de cette note pour ces nombreuses remarques qui m'ont permis d'améliorer significativement la version définitive.

Références

- [1] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K -theory, Adv. Math. 61 (3) (1986) 267–304.
- [2] F. Déglise, Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques, Thèse de doctorat, Université Paris VII, 2002.
- [3] E.M. Friedlander, A. Suslin, V. Voevodsky, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories, in: Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton University Press, 2000.
- [4] W. Fulton, Intersection Theory, Second edition, Springer, 1998.
- [5] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (32) (1967) 361.
- [6] F. Morel, V. Voevodsky, \mathbf{A}^1 -homotopy theory of schemes, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (90) (2001) 45–143.
- [7] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. 1 (16) (1996) 319–393 (electronic).
- [8] J.-P. Serre, Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [9] V. Voevodsky, Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic, Internat. Math. Res. Notices (7) (2002) 351–355.