

SEMI-CENTRE DE L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE D'UNE SOUS-ALGÈBRE PARABOLIQUE D'UNE ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLE [☆]

PAR FLORENCE FAUQUANT-MILLET ET ANTHONY JOSEPH

RÉSUMÉ. – Nous nous intéressons au semi-centre de l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} de dimension finie sur le corps des complexes. Tandis que [F. Fauquant-Millet, A. Joseph, *Transformation Groups* 6 (2) (2001) 125–142] décrit explicitement le semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} , la spécialisation en $q = 1$ ne donne qu'une partie du semi-centre classique recherché, même quand \mathfrak{p} est un Borel. Pareillement le gradué d'une sous-algèbre de polynômes du dual de Hopf de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} , associé à la filtration de Kostant, fournit une borne inférieure pour le semi-centre recherché. Puis par une méthode développée à partir de [A. Joseph, *Amer. J. Math.* 99 (6) (1977) 1151–1165; *J. Algebra* 48 (1977) 241–289] nous obtenons une borne supérieure. Enfin, lorsque \mathfrak{g} est un produit d'algèbres de Lie simples de type A_n ou C_n , nous montrons que ces bornes coïncident et concluons que, dans ce cas, le semi-centre de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{p} est une algèbre de polynômes.

© 2005 Elsevier SAS

ABSTRACT. – Our aim is to describe the semicentre of the enveloping algebra of a parabolic subalgebra \mathfrak{p} of a semisimple finite dimensional complex Lie algebra \mathfrak{g} . Whilst [F. Fauquant-Millet, A. Joseph, *Transformation Groups* 6 (2) (2001) 125–142] describes explicitly the semicentre of the quantized enveloping algebra associated to \mathfrak{p} , specialization at $q = 1$ gives only part of the required classical semicentre, even when \mathfrak{p} is a Borel. Similarly the graded of a polynomial subalgebra of the Hopf dual of the enveloping algebra of \mathfrak{g} , associated to the Kostant filtration, gives a lower bound on the required semicentre. Then by a method developed from [A. Joseph, *Amer. J. Math.* 99 (6) (1977) 1151–1165; *J. Algebra* 48 (1977) 241–289] we obtain an upper bound. Finally when \mathfrak{g} is a product of simple Lie algebras of type A_n or C_n we show that these bounds coincide and conclude that in this case the semicentre of the enveloping algebra of \mathfrak{p} is a polynomial algebra.

© 2005 Elsevier SAS

1. Introduction

1.1. Depuis cent ans déjà, un problème phare dans la théorie des algèbres de Lie, et peut-être des mathématiques en général, est la recherche d'invariants. Ici, considérant une sous-algèbre de Lie parabolique \mathfrak{p} d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} de dimension finie sur le corps des complexes, nous décrivons le plus finement possible l'espace $U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ des invariants de l'algèbre

[☆] Work supported in part by Minerva Foundation, Germany, Grant No. 8466 and in part by the European Community RTN network "Liegrits" Grant No. MRTN-CT-2003-505078.

enveloppante universelle $U(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} par la représentation adjointe de l'algèbre dérivée $\mathfrak{p}' := [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Compte tenu de la définition de [6, 4.3.2], l'espace $U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ n'est autre que le semi-centre de $U(\mathfrak{p})$.

1.2. Le semi-centre de l'algèbre enveloppante de sous-algèbres paraboliques particulières a déjà été étudié dans le passé comme par exemple celui correspondant à \mathfrak{g} lui-même ou à une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b} . Dans le cas où $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ le semi-centre de $U(\mathfrak{p}) = U(\mathfrak{g})$ n'est autre que le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ puisque $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'ailleurs on sait, grâce à l'isomorphisme de Harish-Chandra et au théorème de Chevalley (cf. [6, 7.4.5, 11.1.14]), que ce centre est une algèbre de polynômes en rang de \mathfrak{g} générateurs. De plus la recette de Shapiro-Steinberg pour calculer le degré de ces générateurs a été démontrée par Kostant (cf. [15]). Dans le cas où $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ le semi-centre de $U(\mathfrak{b})$ – qui n'est autre que l'espace $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ des invariants de $U(\mathfrak{b})$ par la représentation adjointe du radical nilpotent \mathfrak{n} de \mathfrak{b} – est également une algèbre de polynômes en rang de \mathfrak{g} générateurs (cf. [13, 4.16]). Ainsi on pourrait penser que le centre de $U(\mathfrak{g})$ et le semi-centre de $U(\mathfrak{b})$ sont naturellement isomorphes par exemple grâce à l'application, suggérée par W. Borho (cf. [13, 4.18]), que nous allons expliciter ci-dessous. Or il n'en est rien en général, ce qui permet d'augurer de la difficulté de l'étude plus générale de $U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$.

1.3. Pour plus de détails rappelons que, d'après [13], l'ensemble des poids \mathcal{B} de $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ est égal à l'ensemble des poids du centre de $U(\mathfrak{n})$. De plus si $\nu \in \mathcal{B}$ alors, à un scalaire près, il existe un unique élément dans le centre de $U(\mathfrak{n})$ de poids ν donc, par un anti-automorphisme de Chevalley convenable, un unique élément $b_{-\nu}$, à un scalaire près, dans le centre de $U(\mathfrak{n}^-)$ de poids $-\nu$ (où \mathfrak{n}^- est l'image de \mathfrak{n} , qui satisfait à $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{b}$). Soit $\{a_\nu^i\}$ une base de l'espace des vecteurs de poids ν dans $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$, M_ν^i le $U(\mathfrak{g})$ -module engendré par a_ν^i grâce à l'action adjointe et N_ν le $U(\mathfrak{g})$ -module engendré par $b_{-\nu}$. Pour tout i , les modules M_ν^i et N_ν sont duaux l'un de l'autre donc l'espace des \mathfrak{g} -invariants du produit tensoriel $M_\nu^i \otimes N_\nu$ est de dimension un. Considérons maintenant l'image, notée z_ν^i , d'un générateur de l'espace des \mathfrak{g} -invariants de $M_\nu^i \otimes N_\nu$ dans l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} , obtenue par multiplication des éléments du produit tensoriel : alors cette image est dans le centre de $U(\mathfrak{g})$. On prolonge $a_\nu^i \mapsto z_\nu^i$ en une application linéaire φ de $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ dans $Z(\mathfrak{g})$. Soit φ^0 la restriction de φ à la sous-algèbre de $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ obtenue par spécialisation de son analogue quantique, cette sous-algèbre s'obtenant également par restriction des poids de $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ au sous-semi-groupe libre \mathcal{B}^0 de \mathcal{B} engendré par les générateurs de \mathcal{B} (voir 3.1.1) qui ne sont pas des poids fondamentaux et par le double des générateurs de \mathcal{B} lorsque ceux-ci sont des poids fondamentaux. Nous montrons dans [10] que φ^0 est injectif.

On dira que \mathfrak{g} est de type A , resp. C , resp. AC , lorsque \mathfrak{g} n'a que des facteurs de type A , resp. C , resp. A ou C . Lorsque \mathfrak{g} est de type AC , on a $\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}$ et nous montrons dans [10] que φ^0 est aussi surjectif. Cependant il semble peu probable que φ^0 soit un isomorphisme d'algèbres même en choisissant plus soigneusement les scalaires. Donc on ne peut pas en déduire que $Z(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynômes en sachant que $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ l'est. Cependant, lorsque \mathfrak{g} est de type AC , l'isomorphisme d'espaces vectoriels φ^0 "respecte" les degrés (c'est-à-dire obéit à une règle simple de calcul pour les degrés, consistant à écrire, avec les notations ci-dessus, que $\deg(z_\nu^i) = \deg(a_\nu^i) + \deg(b_{-\nu})$). Ceci nous permet de redémontrer, dans [10], pour le type AC , que $Z(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynômes et de calculer d'une nouvelle manière les degrés de ses générateurs homogènes qui sont étroitement liés aux degrés des générateurs de $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$. Par exemple en type C on retrouve que les degrés sont tout simplement doublés.

La différence entre le type AC et les autres cas est marquée par l'égalité (ou non-égalité) de \mathcal{B} et \mathcal{B}^0 . Lorsque \mathfrak{g} n'est pas de type AC , on démontre dans [10] que φ n'est pas injectif. De plus il n'est pas du tout certain que, dans ce cas, φ^0 soit surjectif. Pire encore, les degrés sont peu respectés. Par exemple si \mathfrak{g} est simple de type G_2 , les générateurs de la sous-algèbre de $U(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$

définie par \mathcal{B}^0 sont tous deux de degré 2 alors que les générateurs de l'algèbre $U(\mathfrak{b})^n$ tout entière sont de degrés 1 et 2. Si la règle de calcul des degrés s'appliquait encore au type G_2 alors les degrés des générateurs de $Z(\mathfrak{g})$ seraient 2 et 4. Or il est bien connu qu'en réalité ces degrés sont 2 et 6. Ainsi la règle simple de calcul des degrés qui marche en type AC est en décalage pour les autres cas et ceci augure un décalage similaire pour un parabolique quelconque. Ceci devrait être le sujet d'une publication ultérieure.

1.4. Ces problèmes ne font qu'empirer lorsqu'il s'agit d'un parabolique \mathfrak{p} quelconque. Nous ne pouvons donner que les bornes inférieure et supérieure de $U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ qui, fort heureusement, coïncident lorsque \mathfrak{g} est de type AC . D'autre part, notons \mathfrak{m} le radical nilpotent de \mathfrak{p} . Il existe dans $U(\mathfrak{m})$ au moins un vecteur $b_{-\nu}$ de plus bas poids $-\nu$ pour la sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p} . Supposons qu'il existe alors un vecteur a_ν de plus haut poids ν pour la sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p} dans l'algèbre enveloppante du Levi. Alors une construction analogue à celle décrite ci-dessus ne donne, même en type AC , qu'un élément de $U(\mathfrak{p})$ invariant par la représentation adjointe de la sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p} . Finalement on est capable de dire que $U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ est une algèbre de polynômes (en type AC) mais on ne sait pas décrire les générateurs, sauf très implicitement.

1.5. Notons enfin que, lorsque \mathfrak{g} est simple de type A , certains invariants particuliers ont déjà été étudiés. D'après Dixmier (cf. [5]) les générateurs du centre de $U(\mathfrak{n})$ sont dans ce cas les mineurs au-dessus de la diagonale dans un coin en haut à droite. Plus généralement certains des invariants que nous allons classifier sont encore de cette forme sans la contrainte que le mineur en question se trouve au-dessus de la diagonale. Cependant ce cas est plutôt exceptionnel. Dans [7] ou [12] on trouvera également une description du semi-centre de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{p} dans le cas où \mathfrak{g} est simple de type A_n et où le Levi de \mathfrak{p} est simple de type A_{n-1} : dans ce cas le semi-centre de $U(\mathfrak{p})$ est une algèbre de polynômes en une indéterminée. De plus cette indéterminée est obtenue (un peu miraculeusement) par la méthode citée plus haut en prenant pour $b_{-\nu}$ un élément de plus bas poids (pour \mathfrak{sl}_n) dans le \mathfrak{sl}_{n+1} -module simple formé de la n -ième puissance symétrique de la dernière colonne et pour a_ν un élément harmonique de plus haut poids d'un \mathfrak{sl}_n -module simple inclus dans l'algèbre enveloppante du Levi de \mathfrak{p} . Enfin cette indéterminée est elle-même un élément harmonique de $U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ et est, à un scalaire près, l'unique vecteur de plus haut poids de la composante isotypique dans l'espace des éléments harmoniques de $U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ isomorphe au dual de la $n+1$ -ième puissance symétrique de la représentation standard de \mathfrak{sl}_{n+1} agissant sur les vecteurs-colonnes de \mathbb{C}^{n+1} (cf. par exemple [12, 7.4]).

1.6. Jusqu'à présent le semi-centre (classique) de $U(\mathfrak{p})$ dans le cas général n'avait pas encore été étudié. En revanche dans le cas quantique, le semi-centre convenablement défini de l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{p})$ associée à \mathfrak{p} a été étudié en détail (cf. [8] ou [9]). On a démontré que le semi-centre de $U_q(\mathfrak{p})$ est une algèbre de polynômes (cf. [9, Théorème 1]) et que les dimensions de Gelfand–Kirillov des semi-centres dans les cas classique et quantique coïncident (cf. [9, Proposition 3.2]). Cependant l'étude du semi-centre de $U_q(\mathfrak{p})$ s'est faite avec des méthodes spécifiques au cas quantique qui utilisent en particulier l'application de Rosso. Grâce à cette application il suffit en effet de chercher les invariants dans le dual de Hopf de l'algèbre enveloppante quantifiée et donc dans le produit tensoriel de représentations irréductibles de cette dernière, ce qui est beaucoup plus aisé (cf. [8, Théorème du par. 3.1]). Malheureusement une application analogue à l'application de Rosso n'existe pas dans le cas classique. D'autre part on pourrait spécialiser les résultats du quantique au classique mais on sait déjà qu'on n'y retrouve pas tout le semi-centre (cf. [14, 7.5.5]).

1.7. Signalons tout d'abord qu'avant de déterminer le semi-centre $U(\mathfrak{p})^{p'}$ il est plus aisé de chercher l'espace $S(\mathfrak{p})^{p'}$ des invariants de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} par la représentation adjointe de p' . Par une extension de l'application de Duflo on sait (cf. [17]) que ces deux algèbres sont isomorphes. Dans [16] Moeglin a démontré que le semi-centre $U(\mathfrak{p})^{p'}$ est un anneau factoriel, grâce à l'isomorphisme de Duflo et à des arguments de géométrie algébrique utilisant la finitude d'une application projective ainsi que le fait que, pour l'action d'un groupe algébrique irréductible, toute orbite finie est réduite à un élément. Plus aisément soit A une algèbre commutative intègre sur un corps de caractéristique nulle, X une famille de dérivations de A localement nilpotentes et $A^X := \{a \in A \mid \delta a = 0, \forall \delta \in X\}$. L'argument quasi trivial donné dans [13, 3.5] montre que, si $a, b \in A \setminus \{0\}$ et $ab \in A^X$, alors $a, b \in A^X$. Par conséquent A^X est factorielle si A l'est. Comme toute algèbre dérivée p' d'une algèbre de Lie \mathfrak{p} de dimension finie est engendrée par des éléments localement ad-nilpotents dans $S(\mathfrak{p})$ et que l'algèbre $S(\mathfrak{p})$ est factorielle, cet argument permet d'affirmer que l'algèbre $S(\mathfrak{p})^{p'}$ est factorielle. D'autre part nous montrons dans cet article (pour \mathfrak{g} simple à l'exception du cas $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$) que les sous-espaces de poids de $S(\mathfrak{p})^{p'}$ sont de dimension finie (voir proposition 4.2.8 et corollaire 5.4.3). Lorsque tous les sous-espaces de poids ont une dimension inférieure ou égale à un, ce qui n'arrive néanmoins que très rarement, il résulte de [13, 4.2] que $S(\mathfrak{p})^{p'}$ est polynomial.

1.8. Nous rappelons dans la section 3 des résultats de [13] concernant l'espace $S(\mathfrak{b})^n$ des invariants de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{b})$ de \mathfrak{b} par la représentation adjointe de \mathfrak{n} et démontrons un résultat combinatoire (voir proposition 3.2.11) concernant les poids de ces invariants.

Dans la section 4 nous décrivons les invariants d'un localisé de $S(\mathfrak{p})$ par la représentation adjointe de \mathfrak{n} et en déduisons que, pour certaines filtrations bien choisies de $S(\mathfrak{p})$, le gradué de $S(\mathfrak{p})^{p'}$ est inclus (voir proposition 4.2.8) dans une certaine algèbre S^J . Ceci fait appel à une décomposition assez subtile de la sous-algèbre de Cartan.

Dans la section 5 nous montrons (voir corollaire 5.4.2) que S^J est une algèbre de polynômes dont le nombre de générateurs est le même que celui du semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{p})$ associée à \mathfrak{p} mais dont les poids des générateurs diffèrent, dans certains cas, d'un facteur $\frac{1}{2}$ de celui des générateurs du semi-centre de $U_q(\mathfrak{p})$.

Dans la section 6, après avoir décrit la filtration de Kostant, nous montrons que $S(\mathfrak{p})^{p'}$ contient le gradué, pour cette filtration, d'une sous-algèbre A de l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe de Lie connexe, simplement connexe, associé à \mathfrak{g} . D'après [9, Proposition 3.1] on sait que A est une algèbre de polynômes dont le nombre de générateurs et leur poids sont les mêmes que ceux du semi-centre de $U_q(\mathfrak{p})$.

Dans la section 7, les inclusions précédentes encadrant les gradués de $S(\mathfrak{p})^{p'}$ nous permettent de redémontrer, par une méthode un peu plus élémentaire que dans [9, Prop. 3.2], que les dimensions de Gelfand–Kirillov des semi-centres des algèbres enveloppantes (classique ou quantifiée) de \mathfrak{p} sont égales, lorsque $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ et que \mathfrak{g} est simple. D'autre part dans le cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple de type A_n ou C_n , et lorsque $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{g}$, nous montrons que les caractères de A et S^J sont égaux – ce qui est encore vrai d'ailleurs pour d'autres cas particuliers d'algèbres de Lie simples \mathfrak{g} et de certaines sous-algèbres paraboliques \mathfrak{p} . De ceci et du fait que, lorsque $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, le semi-centre de $U(\mathfrak{p})$ est une algèbre de polynômes, on en déduit que, lorsque \mathfrak{g} est de type AC et lorsque \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique quelconque de \mathfrak{g} , ou bien dans les cas particuliers signalés ci-dessus, l'algèbre $S(\mathfrak{p})^{p'}$, et donc aussi l'algèbre $U(\mathfrak{p})^{p'}$, est une algèbre de polynômes ayant le même nombre de générateurs que le semi-centre de $U_q(\mathfrak{p})$, avec les mêmes poids.

2. Notations

2.1. Index de notations

\mathbb{N}, \mathbb{N}^*	2.2	\mathfrak{g}_π	2.3	$\mathfrak{g}_{\pi'}$	2.4	$s_\alpha^{\pi'}, s_\alpha^\pi$	2.6
\mathbb{Z}, \mathbb{C}	2.2	\mathfrak{n}_π	2.3	$\mathfrak{b}_{\pi'}$	2.4	$w_0^{\pi'}, w_0^\pi$	2.6
$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$	2.2	\mathfrak{n}_π^-	2.3	$\mathfrak{b}_{\pi'}^-$	2.4	$w_{\pi'}, w_\pi$	2.6
Δ	2.2	\mathfrak{h}_π	2.3	$\mathfrak{m}_{\pi'}$	2.4	$(,)_{\pi'}, (,)_\pi$	2.6
π	2.2	\mathfrak{b}_π	2.3	$\mathfrak{m}_{\pi'}^-$	2.4	$\mathcal{H}_{\pi'}, \mathcal{H}_\pi$	2.6
α_i	2.2	\mathfrak{b}_π^-	2.3	$\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}, \mathfrak{r}_{\pi'}$	2.4	$h_{\pi'}(\alpha), h_\pi(\alpha)$	2.6
Δ^\pm	2.2	Δ_π	2.3	$\varpi_\alpha^{\pi'}, \varpi_\alpha^\pi$	2.5	$\mathfrak{h}_{\pi'}^\perp, \mathfrak{h}_\pi^\perp$	2.6
\mathfrak{g}_α	2.2	π'	2.4	$P(\pi'), P(\pi)$	2.5	$U(\mathfrak{a})$	2.7
$\check{\alpha}$	2.2	$\mathfrak{p}_{\pi'}$	2.4	$P^+(\pi'), P^+(\pi)$	2.5	M_μ	2.7
x_α	2.3	$\mathfrak{p}_{\pi'}^-$	2.4	λ'	2.5	$V_{\pi'}(\lambda), V_\pi(\lambda)$	2.7
κ	2.3	\mathfrak{p}	2.4	$\varpi_\alpha, \varpi'_\alpha$	2.5	$V_{\pi'}^-(\lambda), V_{\pi'}^+(\lambda)$	2.7
\mathfrak{n}	2.3	\mathfrak{p}^-	2.4	$\Delta_{\pi'}$	2.6	$c_{\xi, v}^{\pi'}, c_{\xi, v}^\pi$	2.7
\mathfrak{n}^-	2.3	$\mathfrak{n}_{\pi'}^-$	2.4	$\Delta_{\pi'}^+, \Delta_\pi^+$	2.6	$C_{\pi'}(\lambda), C_\pi(\lambda)$	2.7
\mathfrak{b}	2.3	$\mathfrak{n}_{\pi'}$	2.4	$\Delta_{\pi'}^-, \Delta_\pi^-$	2.6	$U(\mathfrak{g}_{\pi'})^*, U(\mathfrak{g}_\pi)^*$	2.7
\mathfrak{b}^-	2.3	$\mathfrak{h}_{\pi'}$	2.4	$W_{\pi'}, W_\pi$	2.6	$S(\mathfrak{a})$	2.8
$\text{ad } x$	2.8	$\varepsilon_{\pi'}, \varepsilon_\pi$	3.1.1	$\Pi_i, \Pi'_i (i = 1, 2)$	3.2.3		
$\text{ad}_\mathfrak{a} x$	2.8	$a_{\rho_\alpha^{\pi'}}, a_{\rho_\alpha^\pi}$	3.1.3	$\Pi''_i, \Pi_i^* (i = 1, 2)$	3.2.3		
$S(\mathfrak{a})^\dagger$	2.8	$b_{\rho_\alpha^{\pi'}}, b_{\rho_\alpha^\pi}$	3.1.3	$\Pi_1 / \langle w_\pi \rangle, \Pi'_1 / \langle w_\pi \rangle$	3.2.3		
$U(\mathfrak{a})^\dagger$	2.8	$c_{\rho_\alpha^{\pi'}}, c_{\rho_\alpha^\pi}$	3.1.3	$\Pi / \langle w_\pi \rangle, \Pi' / \langle w_\pi \rangle$	3.2.3		
\mathfrak{a}'	2.8	$a_{-\rho_\alpha^{\pi'}}$	3.1.4	d_Γ, d'_Γ	3.2.7		
$Z(\mathfrak{a})$	2.8	$c_{-\rho_\alpha^{\pi'}}$	3.1.4	$\mathcal{D}^{\pi'}$	3.2.7		
$Sz(\mathfrak{a})$	2.8	$b_{-\rho_\alpha^{\pi'}}$	3.1.4	ε_Γ^π	3.2.7		
$Y(\mathfrak{a})$	2.8	$\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-$	3.1.4	$\mathcal{D}_{\varepsilon_\pi}^{\pi'}$	3.2.7		
$Sy(\mathfrak{a})$	2.8	$\check{w}_{\pi'}$	3.2.1	E	4.1.1		

$\langle w_{\pi'} \rangle, \langle w_{\pi} \rangle$	3.1.1	$\langle w_{\pi} \check{w}_{\pi'} \rangle$	3.2.1	\mathfrak{k}	4.1.2
$\pi' / \langle w_{\pi'} \rangle, \pi / \langle w_{\pi} \rangle$	3.1.1	Γ_{α}	3.2.1	\mathfrak{h}^{\perp}	4.1.2
$\mathcal{B}_{\pi'}, \mathcal{B}_{\pi}$	3.1.1	r_{α}	3.2.1	$\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}$	4.1.2
$\beta_{\pi'}, \beta_{\pi}$	3.1.1	γ_{α}	3.2.1	Φ	4.1.4
$\rho_{\alpha}^{\pi'}, \rho_{\alpha}^{\pi}$	3.1.1	Π', Π''	3.2.1	\mathfrak{h}^{Γ}	4.1.5
$\varepsilon_{\alpha}^{\pi'}, \varepsilon_{\alpha}^{\pi}$	3.1.1	Π, Π^*	3.2.1	m	4.2.1
gr'	4.2.1, 4.2.2	H'_{Γ}	5.3.1		
$P_{\pi'}^+(\pi)$	4.2.4	H''_{Γ}	5.3.5		
gr''	4.2.6	H_{Γ}	5.3.5		
S^J	4.2.8	\mathfrak{h}_{Π}	5.3.5		
$\Omega(S^J)$	5.1	\mathfrak{p}_{Π}	5.3.5		
\mathcal{B}^{δ}	5.1	\mathfrak{h}^J	5.3.6		
$S_{\delta}^{J, \nu}$	5.1	$a_{\Gamma}^{-\pi'}$	5.3.8		
a_{Γ}^{π}	5.2.1	$c_{\Gamma}^{-\pi'}$	5.3.9		
$\Gamma^{w_{\pi}}$	5.2.1	δ_{Γ}	5.4.2		
$\Gamma_{w_{\pi}}$	5.2.1	\mathcal{F}_K	6.1		
\mathfrak{h}_{Γ}	5.2.2	ψ_k	6.2		
c_{Γ}^{π}	5.2.3	\mathfrak{m}	6.3		
$\Gamma^{w_{\pi'}}$	5.3.1	${}^m\text{U}(\mathfrak{g})^*$	6.3		
$\Gamma_{w_{\pi'}}$	5.3.1	$C_{\mathfrak{p}}(\lambda)$	6.3		
$\mathfrak{h}_{\Gamma}^{\pi'}$	5.3.1	$\text{gr}_{\mathcal{F}_K}$	6.5		

2.2. On notera \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* celui des entiers naturels non nuls et \mathbb{Z} celui des entiers relatifs. Rappelons d'abord certains résultats ou définitions de [6, 1.10.2] ou de [2, VI]. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur le corps des complexes \mathbb{C} , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ le système des racines de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} (\mathfrak{h}^* désigne l'espace vectoriel dual de \mathfrak{h}). Dans Δ on choisit une base $\pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de racines simples : lorsque \mathfrak{g} est simple, l'indexation des racines simples de π est celle donnée par [2, VI, planches I à IX]. Alors $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ où Δ^+ , l'ensemble des racines positives relativement à π , est un ensemble fini inclus dans $\sum_{\alpha \in \pi} \mathbb{N}\alpha \setminus \{0\}$ et $\Delta^- = -\Delta^+$ est l'ensemble des racines négatives relativement à π . L'ensemble π est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathfrak{h}^* puisque Δ engendre \mathfrak{h}^* . Pour $h \in \mathfrak{h}$ et $\xi \in \mathfrak{h}^*$, on pose $\langle h, \xi \rangle := \xi(h)$. Pour $\alpha \in \Delta$, l'espace

radiciel associé à la racine α est $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = \langle h, \alpha \rangle x \forall h \in \mathfrak{h}\}$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie de \mathfrak{g} . Chaque espace radiciel est de dimension un. Pour tous sous-espaces vectoriels V et W de \mathfrak{g} on note $[V, W]$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{[x, y] \mid x \in V, y \in W\}$. Alors, pour tout $\alpha \in \Delta$, l'espace $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est un sous-espace vectoriel de dimension un de \mathfrak{h} et contient un et un seul élément $\check{\alpha}$ tel que $\langle \check{\alpha}, \alpha \rangle = 2$, qui est appelé la coracine associée à α . L'espace vectoriel \mathfrak{h} est alors engendré par la famille $(\check{\alpha})_{\alpha \in \pi}$. On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante universelle de \mathfrak{g} (cf. [6, 2.1.1]).

2.3. Soient $\{x_\alpha, \alpha \in \Delta; \check{\alpha}, \alpha \in \pi\}$ une base de Chevalley de \mathfrak{g} (cf. [4, 4.2.1]) et $\kappa: x_\alpha \mapsto x_{-\alpha}$ l'anti-automorphisme de Chevalley de $U(\mathfrak{g})$ correspondant. On a $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = \check{\alpha}$, donc $\kappa|_{\mathfrak{h}} = \text{Id}_{\mathfrak{h}}$. On note \mathfrak{n} , resp. \mathfrak{n}^- , la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les x_α , resp. $x_{-\alpha}$, pour $\alpha \in \pi$. On a la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ et \mathfrak{n} et \mathfrak{n}^- sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes de \mathfrak{g} . On note $\mathfrak{b} := \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$, resp. $\mathfrak{b}^- := \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}$, la sous-algèbre de Borel positive, resp. négative, de \mathfrak{g} . Pour rappeler que la décomposition triangulaire de \mathfrak{g} dépend du choix du système de racines simples π , on notera parfois aussi \mathfrak{g} par \mathfrak{g}_π , les sous-algèbres de Lie \mathfrak{n} , \mathfrak{n}^- , \mathfrak{h} , \mathfrak{b} et \mathfrak{b}^- resp. par \mathfrak{n}_π , \mathfrak{n}_π^- , \mathfrak{h}_π , \mathfrak{b}_π et \mathfrak{b}_π^- et le système Δ des racines de \mathfrak{g}_π relativement à \mathfrak{h}_π par Δ_π .

2.4. Tout sous-ensemble π' de π définit deux sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\pi$, que nous notons $\mathfrak{p}_{\pi'}$ et $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$, ou plus simplement \mathfrak{p} et \mathfrak{p}^- , s'il n'y a pas d'ambiguïté, à savoir $\mathfrak{p}_{\pi'} := \mathfrak{b}_\pi \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$ et $\mathfrak{p}_{\pi'}^- := \mathfrak{b}_\pi^- \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}$ où $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$, resp. $\mathfrak{n}_{\pi'}$, est la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{n}_π^- , resp. de \mathfrak{n}_π , engendrée par les $x_{-\alpha}$, resp. par les x_α , pour $\alpha \in \pi'$. On pose $\mathfrak{h}_{\pi'} := [\mathfrak{n}_{\pi'}^-, \mathfrak{n}_{\pi'}^-] \cap \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{\pi'} := \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$, $\mathfrak{b}_{\pi'} = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}$ et $\mathfrak{b}_{\pi'}^- = \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}$. Alors on vérifie aisément (puisque la forme de Killing de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ est non dégénérée) que $\mathfrak{g}_{\pi'}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{p}_{\pi'}$ et de $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$, qui est semi-simple et que $\mathfrak{h}_{\pi'}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ engendrée comme espace vectoriel par les coracines $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \pi'$. L'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}_{\pi'}$ est la sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}_{\pi'}$ ou de $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$ (cf. [2, I, §6, n° 8]). On note $\mathfrak{m}_{\pi'}$, resp. $\mathfrak{m}_{\pi'}^-$, le radical nilpotent de $\mathfrak{p}_{\pi'}$, resp. de $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$ (cf. [6, 1.7.2]). On a $\mathfrak{g}_\pi = \mathfrak{m}_{\pi'} \oplus \mathfrak{p}_{\pi'}^- = \mathfrak{m}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{p}_{\pi'}$. On pose $\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} := \{h \in \mathfrak{h}_\pi; \langle h, \pi' \rangle = 0\}$. On vérifie que $\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{h}_{\pi'}$ dans \mathfrak{h}_π et que $\mathfrak{r}_{\pi'} := \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} \oplus \mathfrak{g}_{\pi'}$ est le facteur réductif de Levi de $\mathfrak{p}_{\pi'}$ ou de $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$, c'est-à-dire que c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{p}_{\pi'}$ ou $\mathfrak{p}_{\pi'}^-$, qui est réductive et maximale (pour l'inclusion) parmi de telles sous-algèbres (cf. [6, 1.7.3]). De plus $\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ est le centre de $\mathfrak{r}_{\pi'}$. Remarquons que, dans le cas particulier où $\pi' = \pi$, on a $\mathfrak{p}_\pi = \mathfrak{p}_\pi^- = \mathfrak{g}_\pi = \mathfrak{g}$ et dans le cas particulier où $\pi' = \emptyset$, on a $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{b}_\pi$ et $\mathfrak{p}_\emptyset^- = \mathfrak{b}_\pi^-$ et $\mathfrak{g}_\emptyset = \{0\}$.

2.5. Quel que soit $\pi' \subset \pi$, on note $(\varpi_\alpha^{\pi'})_{\alpha \in \pi'}$ la base de $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$ duale de la base $(\check{\alpha})_{\alpha \in \pi'}$. On dit que $(\varpi_\alpha^{\pi'})_{\alpha \in \pi'}$ est la famille des poids fondamentaux correspondant à π' . On note $P(\pi') := \sum_{\alpha \in \pi'} \mathbb{Z} \varpi_\alpha^{\pi'}$ le réseau des poids de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ et $P^+(\pi') := \sum_{\alpha \in \pi'} \mathbb{N} \varpi_\alpha^{\pi'}$ l'ensemble des poids entiers dominants correspondant à π' . On démontre aisément que, étant donné $\pi' \subset \pi$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(1) \quad P(\pi) \subset P(\pi') \oplus \frac{1}{r} \sum_{\alpha \in \pi \setminus \pi'} \mathbb{Z} \varpi_\alpha^\pi$$

et la projection de ϖ_α^π , pour $\alpha \in \pi'$, dans $P(\pi')$ par cette décomposition (1) est égale à $\varpi_\alpha^{\pi'}$. Pour $\lambda = \sum_{\alpha \in \pi} m_\alpha \varpi_\alpha^\pi \in P(\pi)$ ($m_\alpha \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \pi$) on note $\lambda' = \sum_{\alpha \in \pi'} m_\alpha \varpi_\alpha^{\pi'}$ sa projection dans $P(\pi')$ par la décomposition (1) ci-dessus. Par souci de simplicité on notera souvent, s'il n'y a pas d'ambiguïté, ϖ_α au lieu de ϖ_α^π , pour $\alpha \in \pi$ et donc, vu la notation ci-dessus de la projection d'un élément de $P(\pi)$ dans $P(\pi')$ par la décomposition (1), on notera ϖ'_α au lieu de $\varpi_\alpha^{\pi'}$, pour $\alpha \in \pi'$.

2.6. Quel que soit $\pi' \subset \pi$, notons $\Delta_{\pi'}$ le système des racines de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ relativement à $\mathfrak{h}_{\pi'}$ et $\Delta_{\pi'}^+$, resp. $\Delta_{\pi'}^-$, le sous-ensemble de $\Delta_{\pi'}$ formé des racines positives, resp. négatives, relativement à π' . Le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_{\pi'}, \mathfrak{h}_{\pi'})$ que l'on note $W_{\pi'}$, est le groupe des automorphismes de $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$ engendré par les réflexions $s_{\alpha}^{\pi'}$, $\alpha \in \pi'$, où $s_{\alpha}^{\pi'}$ est définie par $s_{\alpha}^{\pi'}(\lambda) = \lambda - \langle \alpha, \lambda \rangle \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}_{\pi'}^*$. On a $s_{\alpha}^{\pi'}(\Delta_{\pi'}) = \Delta_{\pi'}$ (cf. [2, VI, §1, n° 1]). Le groupe $W_{\pi'}$ est fini, on note $w_0^{\pi'}$ son plus long élément et on pose $w_{\pi'} := -w_0^{\pi'}$ (la longueur d'un élément w de $W_{\pi'}$ étant définie comme le nombre minimal de réflexions $s_{\alpha}^{\pi'}$, $\alpha \in \pi'$, dont la composée est égale à w). On a $w_{\pi'}(\pi') = \pi'$ et $(w_{\pi'})^2 = \text{Id}$. À partir de la forme de Killing, l'espace vectoriel $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$ peut être muni d'une \mathbb{C} -forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par $W_{\pi'}$ (cf. [2, VI, §1, n° 1, Prop. 3]) que l'on note $(,)_{\pi'}$. Grâce à cette forme non dégénérée, les espaces vectoriels $\mathfrak{h}_{\pi'}$ et $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$ sont isomorphes par l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\pi'}$ défini par $\langle \mathcal{H}_{\pi'}^{-1}(x), y \rangle = (x, y)_{\pi'}$ pour tous $x, y \in \mathfrak{h}_{\pi'}^*$. On a alors $\mathcal{H}_{\pi'}(\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)_{\pi'}}$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\pi'}$. Remarquons que $(\mathcal{H}_{\pi'}^{-1}(\varpi_{\alpha}^{\pi}))_{\alpha \in \pi}$ est la base duale dans $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\pi}$ de la base $(\frac{2}{(\alpha, \alpha)_{\pi}}\alpha)_{\alpha \in \pi}$ de \mathfrak{h}^* . On vérifie que $\sum_{\alpha \in \pi \setminus \pi'} \mathbb{C}\mathcal{H}_{\pi'}^{-1}(\varpi_{\alpha}^{\pi}) = \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ (voir section 2.4). Pour tout $\alpha \in \pi'$, on pose $h_{\pi'}(\alpha) := \mathcal{H}_{\pi'}^{-1}(\varpi_{\alpha}^{\pi'} - \varpi_{w_{\pi'}(\alpha)}^{\pi'}) \in \mathfrak{h}_{\pi'}$. Notons $\mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp}$ le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}_{\pi'}$ engendré par les $h_{\pi'}(\alpha)$ pour $\alpha \in \pi'$. On remarque que, pour $h \in \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp}$, on a l'équivalence

$$h \in \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp} \iff \forall \alpha \in \pi', \langle h, \alpha + w_{\pi'}(\alpha) \rangle = 0.$$

2.7. Pour toute algèbre de Lie \mathfrak{a} , on note $U(\mathfrak{a})$ l'algèbre enveloppante universelle de \mathfrak{a} (cf. [6, 2.1.1]). Pour tout $\pi' \subset \pi$, un élément μ de $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$ est un poids du $U(\mathfrak{h}_{\pi'})$ -module M lorsque l'espace $M_{\mu} := \{m \in M \mid h.m = \langle h, \mu \rangle m \ \forall h \in \mathfrak{h}_{\pi'}\}$ des vecteurs de poids μ est non nul. Dans $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$, on définit la relation d'ordre $\lambda \leq \mu \iff \mu - \lambda \in \mathbb{N}\pi'$. Pour $\lambda \in P^+(\pi')$, nous notons (cf. [14, 4.2.8]) $V_{\pi'}(\lambda)$ le $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$ -module simple de plus haut poids λ , quotient du module de Verma de plus haut poids λ . L'espace $V_{\pi'}(\lambda)$ est de dimension finie et tous les poids de $V_{\pi'}(\lambda)$ sont dans l'ensemble fini $(\lambda - \mathbb{N}\pi') \cap (w_0^{\pi'}\lambda + \mathbb{N}\pi')$. De plus l'espace $V_{\pi'}(\lambda)_{\lambda}$ des vecteurs de $V_{\pi'}(\lambda)$ de poids λ est de dimension un ainsi que l'espace $V_{\pi'}(\lambda)_{w_0^{\pi'}\lambda}$ des vecteurs de $V_{\pi'}(\lambda)$ de poids $w_0^{\pi'}\lambda$. De façon plus générale, pour tout $w \in W_{\pi'}$, l'espace vectoriel $V_{\pi'}(\lambda)_{w\lambda}$ est de dimension un (cf. [14, 4.4.1]). On choisit un vecteur non nul, que l'on note $v_{\lambda, \lambda}^{\pi'}$, dans $V_{\pi'}(\lambda)_{\lambda}$ et un vecteur non nul, que l'on note $v_{\lambda, w_0^{\pi'}\lambda}^{\pi'}$, dans $V_{\pi'}(\lambda)_{w_0^{\pi'}\lambda}$. On pose alors, pour $\lambda \in P^+(\pi)$, $V_{\pi'}^-(\lambda) := U(\mathfrak{n}_{\pi'}^-).v_{\lambda, \lambda}^{\pi'}$ et $V_{\pi'}^+(\lambda) := U(\mathfrak{n}_{\pi'}^+).v_{\lambda, w_0^{\pi'}\lambda}^{\pi'}$. On a alors les isomorphismes de $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$ -modules suivants. $V_{\pi'}^-(\lambda) \simeq V_{\pi'}(\lambda')$ et $V_{\pi'}^+(\lambda) \simeq V_{\pi'}(w_0^{\pi'}(w_0^{\pi'}\lambda)')$ où λ' est la projection de λ dans $P(\pi')$ par la décomposition (1) et $(w_0^{\pi'}\lambda)'$ la projection de $w_0^{\pi'}\lambda$ dans $P(\pi')$ par (1) (voir section 2.5). On remarque que $V_{\pi'}^+(\lambda) = V_{\pi'}^-(\lambda) = V_{\pi'}(\lambda)$. Pour $\lambda \in P^+(\pi')$, nous notons $C_{\pi'}(\lambda)$ l'espace des coefficients matriciels de $V_{\pi'}(\lambda)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$, notées $c_{\xi, v}^{\pi'}$ où $\xi \in V_{\pi'}(\lambda)^*$ et $v \in V_{\pi'}(\lambda)$, définies par $c_{\xi, v}^{\pi'}(u) = \xi(u.v)$ pour tout $u \in U(\mathfrak{g}_{\pi'})$. Le dual de Hopf de $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$, noté $U(\mathfrak{g}_{\pi'})^*$, est alors $U(\mathfrak{g}_{\pi'})^* := \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi')} C_{\pi'}(\lambda)$.

LEMME. – Pour tout $\lambda \in P^+(\pi)$ et tout $\pi' \subset \pi$, on a

$$V_{\pi'}^-(\lambda) = \{v \in V_{\pi}(\lambda) \mid \mathfrak{m}_{\pi'}v = 0\}.$$

Preuve. – Le côté droit est un sous- $\mathfrak{r}_{\pi'}$ -module de $V_{\pi}(\lambda)$, donc est somme directe de $\mathfrak{r}_{\pi'}$ -modules simples. Chacun de ces $\mathfrak{r}_{\pi'}$ -modules simples est engendré comme $U(\mathfrak{r}_{\pi'})$ -module par son vecteur v de plus haut poids, en particulier $\mathfrak{n}_{\pi'}v = 0$. Comme $\mathfrak{m}_{\pi'}v = 0$ aussi, il en résulte que $v = v_{\lambda, \lambda}^{\pi}$, à un scalaire près. D'où l'assertion. \square

2.8. Si \mathfrak{a} est une algèbre de Lie et \mathfrak{l} une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{a} , la représentation adjointe de \mathfrak{l} dans \mathfrak{a} se prolonge en une représentation (dite encore adjointe) de \mathfrak{l} dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} de sorte que, pour tout $x \in \mathfrak{l}$, le prolongement $\text{ad } x$ à $S(\mathfrak{a})$ de $\text{ad}_{\mathfrak{a}} x := (y \in \mathfrak{a} \mapsto [x, y])$ soit une dérivation de $S(\mathfrak{a})$. On obtient de façon analogue une représentation adjointe de \mathfrak{l} dans l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} . Notons $S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{l}} := \{y \in S(\mathfrak{a}) \mid (\text{ad } x)y = 0 \ \forall x \in \mathfrak{l}\}$, resp. $U(\mathfrak{a})^{\mathfrak{l}} := \{y \in U(\mathfrak{a}) \mid (\text{ad } x)y = 0 \ \forall x \in \mathfrak{l}\}$, l'espace des invariants de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a})$, resp. de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{a})$, par la représentation adjointe de \mathfrak{l} dans $S(\mathfrak{a})$, resp. dans $U(\mathfrak{a})$. D'après ce qui précède $S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{l}}$ et $U(\mathfrak{a})^{\mathfrak{l}}$ sont des \mathbb{C} -algèbres. Pour toute algèbre de Lie \mathfrak{a} , on pose $\mathfrak{a}' := [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ (avec la notation du crochet de deux espaces vectoriels donnée dans la section 2.2), $Z(\mathfrak{a}) := U(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$, $Sz(\mathfrak{a}) := U(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}'}$, $Y(\mathfrak{a}) := S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ et $Sy(\mathfrak{a}) := S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}'}$.

Dans toutes les notations définies ci-dessus, nous omettons parfois l'indice π' lorsque $\pi' = \pi$ et qu'il n'y a pas de confusion possible.

3. Le Borel

3.1. Rappels sur le semi-centre de l'algèbre enveloppante du Borel

Nous rappelons dans cette partie quelques résultats de [13] qui vont nous être utiles pour la suite. On considère π' un sous-ensemble de π .

3.1.1. D'après [13, 4.15] et parce que les calculs dans [13] sont valables à la fois dans l'algèbre enveloppante et dans l'algèbre symétrique on a, avec les notations de 2.6 et de 2.8, $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}) = S(\mathfrak{b}_{\pi'})^{n_{\pi'}} = S(\mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp})^{n_{\pi'}}$ et $Sz(\mathfrak{b}_{\pi'}) = U(\mathfrak{b}_{\pi'})^{n_{\pi'}} = U(\mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp})^{n_{\pi'}}$. On note $\langle w_{\pi'} \rangle$ le sous-groupe des permutations de π' engendré par la permutation $w_{\pi'}$ qui agit sur π' et $\pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$ l'ensemble des classes d'équivalence de π' modulo l'action de ce sous-groupe. Cependant, pour tout $\langle w_{\pi'} \rangle$ -ensemble S , on entend par $S / \langle w_{\pi'} \rangle$ un système de représentants de l'ensemble quotient $S / \langle w_{\pi'} \rangle$ dans S . Posons $l_{\pi'} := \text{Card}(\pi' / \langle w_{\pi'} \rangle)$. D'après [13, 4.6] l'algèbre des invariants $Y(\mathfrak{n}_{\pi'}) = S(\mathfrak{n}_{\pi'})^{n_{\pi'}}$ est une algèbre de polynômes en $l_{\pi'}$ générateurs et d'après [13, 4.16] l'algèbre des invariants $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'})$ est une algèbre de polynômes en rang de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ (égal au cardinal de π') générateurs, tous homogènes pour la graduation naturelle de l'algèbre symétrique. De plus $Y(\mathfrak{n}_{\pi'})$ et $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'})$ ont le même ensemble de poids, que nous notons $\mathcal{B}_{\pi'}$. D'après [13, 4.12] il existe un système (déterminé de façon canonique) de racines positives fortement orthogonales $\beta_{\pi'} := \{\beta_i^{\pi'}\}_{i=1}^{l_{\pi'}}$ tel que $\mathcal{B}_{\pi'} = P^+(\pi') \cap \mathbb{N}\beta_{\pi'}$. Pour tout $\alpha \in \pi'$, posons $\rho_{\alpha}^{\pi'} := \varepsilon_{\alpha}^{\pi'} (\varpi_{\alpha}^{\pi'} + \varpi_{w_{\pi'}(\alpha)}^{\pi'})$, avec

$$\varepsilon_{\alpha}^{\pi'} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = w_{\pi'}(\alpha) \text{ et } \varpi_{\alpha}^{\pi'} \in \mathbb{N}\beta_{\pi'} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après [13, 4.12 et 2.8], le semi-groupe $\mathcal{B}_{\pi'}$ est libre engendré par les $\rho_{\alpha}^{\pi'}$ pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$. Grâce à l'invariance de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(\cdot, \cdot)_{\pi'}$ sur $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$ par le groupe de Weyl $W_{\pi'}$, on montre aisément que $\mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp}$ est aussi l'orthogonal (pour la dualité) dans $\mathfrak{h}_{\pi'}$ du semi-groupe libre $\mathcal{B}_{\pi'} \subset \mathfrak{h}_{\pi'}^*$. On pourra consulter [13, Tables I et II] pour connaître précisément les valeurs de $\varepsilon_{\alpha}^{\pi'}$ selon les racines simples α de π' et la nature de π' et on trouvera également dans ces tables les degrés des générateurs de $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'})$, degrés par rapport à la graduation naturelle de l'algèbre symétrique. D'après ces tables on constate que l'on a l'équivalence $\{\varepsilon_{\alpha}^{\pi'} = 1 \ \forall \alpha \in \pi'\} \iff \{\mathfrak{g}_{\pi'} \text{ est de type } AC\}$. Nous verrons (dans la septième partie) que c'est grâce à cette équivalence que le type AC est plus facile. On pose donc $\varepsilon_{\pi'} = 1$ si $\mathfrak{g}_{\pi'}$ est de type AC et $\varepsilon_{\pi'} = \frac{1}{2}$ sinon. Plusieurs erreurs s'étant glissées dans [13, Table II], on trouvera en annexe un erratum de cette table.

3.1.2. D'après [14, 7.5.5], les générateurs du semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{b}_{\pi'})$ ne se spécialisent pas toujours en les générateurs du semi-centre de l'algèbre enveloppante classique $U(\mathfrak{b}_{\pi'})$, mais parfois en leurs carrés. Plus précisément les vecteurs de $Sz(\mathfrak{b}_{\pi'})$, et donc aussi ceux de $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'})$, de poids $\frac{1}{\varepsilon_{\pi'}}\rho_{\alpha}^{\pi'}$ peuvent s'obtenir par spécialisation et ceux de poids $\rho_{\alpha}^{\pi'}$ sont les racines carrées de ces derniers lorsque $\varepsilon_{\alpha}^{\pi'} = \frac{1}{2}$. Malheureusement l'analogie naturelle de ceci n'est plus valable pour $Sy(\mathfrak{p})$ lorsque \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique quelconque. Ceci vient du fait que la borne supérieure (voir proposition 4.2.8) que nous allons obtenir dans la quatrième partie pour $Sy(\mathfrak{p})$ n'est pas toujours atteinte.

3.1.3. D'après [13, 4.4], l'espace vectoriel formé des éléments de $Y(\mathfrak{n}_{\pi'})$ de poids $\rho_{\alpha}^{\pi'}$, pour $\alpha \in \pi'$, est de dimension un. Choisissons dans cet espace un élément non nul $a_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}$. Il est homogène pour la graduation naturelle de l'algèbre symétrique. Alors l'algèbre $Y(\mathfrak{n}_{\pi'})$ est une algèbre de polynômes engendrée par les $a_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}$, pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$. De plus $\rho_{\alpha}^{\pi'}$ est combinaison linéaire (à coefficients dans \mathbb{N}) des $\beta_i^{\pi'}$, $1 \leq i \leq l_{\pi'}$, et le degré de $a_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}$ est égal à la somme de ces coefficients, d'après [13, 2.9 et 4.12].

Enfin, d'après [13, 4.15, 4.16], lorsque $\alpha = w_{\pi'}(\alpha)$, l'espace vectoriel formé des éléments de $S(\mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp})^{\mathfrak{n}_{\pi'}} = S(\mathfrak{b}_{\pi'})^{\mathfrak{n}_{\pi'}}$ de poids $\rho_{\alpha}^{\pi'}$ est égal à $Y(\mathfrak{n}_{\pi'})_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}$ et est donc de dimension un. Lorsque $\alpha \neq w_{\pi'}(\alpha)$, le sous-espace $S(\mathfrak{b}_{\pi'})^{\mathfrak{n}_{\pi'}}$ de poids $\rho_{\alpha}^{\pi'}$ est de dimension deux, le deuxième générateur $c_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha}$, étant de la forme

$$c_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha} = a_{\rho_{\alpha}^{\pi'}} h_{\pi'}(\alpha) + b_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha} \quad \text{où } b_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'})_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}$$

et $b_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha}$ est homogène (pour la graduation naturelle de l'algèbre symétrique) de degré égal à $\deg(a_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}) + 1$.

Comme $\rho_{\alpha}^{\pi'} = \rho_{w_{\pi'}(\alpha)}^{\pi'}$ et que $h_{\pi'}(w_{\pi'}(\alpha)) = -h_{\pi'}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \pi'$, on a $c_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha} = -c_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{w_{\pi'}(\alpha)}$ et $b_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha} = -b_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{w_{\pi'}(\alpha)}$. Finalement l'algèbre $S(\mathfrak{b}_{\pi'})^{\mathfrak{n}_{\pi'}}$ est une algèbre de polynômes engendrée par les $a_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}$ pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$ et par les $c_{\rho_{\alpha}^{\pi'}}^{\alpha}$ pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$ tel que $w_{\pi'}(\alpha) \neq \alpha$.

3.1.4. Grâce à l'anti-automorphisme κ de Chevalley (voir 2.3), on montre facilement que le centre $Z(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ de $U(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ et donc aussi l'algèbre $Y(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) = S(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$ qui lui est isomorphe (d'après [6, 10.4.5]) sont des algèbres de polynômes, la dernière étant engendrée par les $a_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}$, pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$ où $a_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-} \in Y(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-} \setminus \{0\}$. Par cet anti-automorphisme de Chevalley on déduit également que l'algèbre des invariants $Sz(\mathfrak{b}_{\pi'}^-)$ est égale à l'algèbre des invariants $U(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp})^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$ et que c'est une algèbre de polynômes en rang de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ variables. Comme les algèbres $Sz(\mathfrak{b}_{\pi'}^-)$ et $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}^-)$ sont isomorphes (cf. [17, 4.4 et Introduction]), on en déduit que $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}^-) = S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}_{\pi'}^{\perp})^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$ et que $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}^-)$ est une algèbre de polynômes en rang de $\mathfrak{g}_{\pi'}$ générateurs, ceux-ci étant $a_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}$ pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$ et $c_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha}$ pour $\alpha \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$ tel que $w_{\pi'}(\alpha) \neq \alpha$ qui est le deuxième générateur de l'espace de poids $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}^-)_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}$ lorsque $w_{\pi'}(\alpha) \neq \alpha$. L'élément $c_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha}$ est de la forme $c_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha} = a_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-} h_{\pi'}(\alpha) + b_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha}$ où $b_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}$. Comme dans la section 3.1.3, on a $c_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha} = -c_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{w_{\pi'}(\alpha)}$ et $b_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{\alpha} = -b_{-\rho_{\alpha}^{\pi'}^-}^{w_{\pi'}(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \pi'$. Enfin posons $\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^- := \mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{b}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ (voir section 2.4). Comme $\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} = \{h \in \mathfrak{h}; \langle h, \pi' \rangle = 0\}$ on a $Sy(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-) = S(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-)^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-} = Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}^-) \otimes S(\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'})$ et donc $Sy(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-)$ est une algèbre de polynômes en rang de \mathfrak{g}_{π} (égal au cardinal de π) générateurs. L'ensemble des poids de $Sy(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-)$ est aussi l'ensemble des poids de $Y(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)$ et de $Sy(\mathfrak{b}_{\pi'}^-)$, qui est donc $-\mathcal{B}_{\pi'}$.

3.2. Un résultat combinatoire

3.2.1. Fixons dans ce paragraphe un sous-ensemble π' de l'ensemble des racines simples π de \mathfrak{g} . Notons encore w_π (voir 2.6) la restriction à π de $w_\pi = -w_0^\pi$. Puis on note $\check{w}_{\pi'}$ la permutation de π prolongeant la permutation $w_{\pi'} = -w_0^{\pi'}$ de π' par $\check{w}_{\pi'}(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \pi \setminus \pi'$. On a $w_\pi^2 = \check{w}_{\pi'}^2 = \text{Id}_\pi$ et on note $\langle w_\pi \check{w}_{\pi'} \rangle$ le sous-groupe des permutations de π engendré par la permutation composée $w_\pi \check{w}_{\pi'}$. On a $(w_\pi \check{w}_{\pi'})^{-1} = \check{w}_{\pi'} w_\pi$. Pour $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ posons $\Gamma_\alpha := \{(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)\}_{s=0}^{r_\alpha}$ où $r_\alpha = 0$ si $w_\pi(\alpha) \notin \pi'$ et sinon r_α est le plus grand entier tel que, pour tout $1 \leq s \leq r_\alpha$, $(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha) \in \pi'$. On pose $\gamma_\alpha := (\check{w}_{\pi'} w_\pi)^{r_\alpha}(\alpha)$. Remarquons que Γ_α est la partie maximale d'une $\langle \check{w}_{\pi'} w_\pi \rangle$ -orbite telle que $\Gamma_\alpha \cap (\pi \setminus \pi') = \{\alpha\}$. Lorsque $w_\pi(\gamma_\alpha) = \alpha$, Γ_α est une $\langle \check{w}_{\pi'} w_\pi \rangle$ -orbite. Sinon $\Gamma_\alpha \sqcup \Gamma_{w_\pi(\gamma_\alpha)}$ est une $\langle \check{w}_{\pi'} w_\pi \rangle$ -orbite et nous allons montrer que les deux parties ont le même cardinal. Notons Π' l'ensemble des $\langle w_\pi \check{w}_{\pi'} \rangle$ -orbites incluses dans π' et $\Pi'' := \{\Gamma_\alpha; \alpha \in \pi \setminus \pi'\}$. On pose $\Pi := \Pi' \sqcup \Pi''$ et $\Pi^* := \{\Gamma \in \Pi \mid \exists \alpha \in \pi \setminus \pi'; \Gamma = \{\alpha\}\}$. Π^* est donc le sous-ensemble de Π'' constitué des Γ_α , avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ tel que $w_\pi(\alpha) \in \pi \setminus \pi'$.

Dans le cas particulier où $-\text{Id} \in W_\pi$, c'est-à-dire où $w_\pi = \text{Id}_\pi$, on a $\Pi' = \{\{\alpha, w_\pi(\alpha)\}; \alpha \in \pi'\}$ et $\Pi'' = \{\{\alpha\}; \alpha \in \pi \setminus \pi'\} = \Pi^*$.

3.2.2.

LEMME. – Soient $\Gamma, \Gamma' \in \Pi$ et $\alpha \in \pi \setminus \pi'$. On a

- (i) Si $\Gamma \neq \Gamma'$ alors $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.
- (ii) Si $\Gamma \in \Pi'$ alors $w_\pi(\Gamma) = w_{\pi'}(\Gamma) \in \Pi'$.
- (iii) $w_\pi(\gamma_\alpha) \in \pi \setminus \pi'$ et $w_\pi(\Gamma_\alpha) = \Gamma_{w_\pi(\gamma_\alpha)} \in \Pi''$.
- (iv) $w_\pi(\Gamma) \cap \pi' = w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')$.
- (v) $\check{w}_{\pi'} w_\pi(\Gamma_\alpha) = (\Gamma_\alpha \cap \pi') \cup \{w_\pi(\gamma_\alpha)\}$.
- (vi) Si $w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi') = \Gamma \cap \pi'$ et $\Gamma \cap \pi' \neq \emptyset$ alors $w_\pi(\Gamma) = \Gamma$.

Preuve. – La première assertion est claire, vu les définitions des éléments de Π' et Π'' . Si $\Gamma \in \Pi'$ on a $w_\pi w_{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$ d'où la deuxième assertion. Par définition de r_α on a $w_\pi(\gamma_\alpha) \in \pi \setminus \pi'$. Si $r_\alpha = 0$ alors $\gamma_\alpha = \alpha$, $r_{w_\pi(\alpha)} = 0$ car $w_\pi(w_\pi(\alpha)) = \alpha \notin \pi'$, $w_\pi(\Gamma_\alpha) = \{w_\pi(\alpha)\} = \Gamma_{w_\pi(\alpha)}$ et $w_\pi(\Gamma_\alpha) \setminus \{w_\pi(\alpha)\} = w_{\pi'}(\Gamma_\alpha \setminus \{\alpha\}) = \emptyset$. Supposons $r_\alpha \geq 1$. Alors pour tout $0 \leq s \leq r_\alpha$, on a

$$(2) \quad (\check{w}_{\pi'} w_\pi)^{r_\alpha - s}(w_\pi(\gamma_\alpha)) = w_\pi((\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)).$$

Or, pour $0 \leq s \leq r_\alpha - 1$, $w_\pi((\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)) \in \pi'$ par définition de r_α donc, pour tout $1 \leq k \leq r_\alpha$, l'égalité (2) implique que $(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^k(w_\pi(\gamma_\alpha)) \in \pi'$. De plus $(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^{r_\alpha + 1}(w_\pi(\gamma_\alpha)) = \check{w}_{\pi'} w_\pi(w_\pi(\alpha)) = \check{w}_{\pi'}(\alpha) = \alpha$ donc $(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^{r_\alpha + 1}(w_\pi(\gamma_\alpha)) \notin \pi'$ et donc $r_{w_\pi(\gamma_\alpha)} = r_\alpha$. D'autre part de l'égalité (2) on déduit que $w_\pi(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_{w_\pi(\gamma_\alpha)}$ d'où l'égalité de ces deux ensembles puisqu'ils ont le même cardinal et la troisième assertion du lemme.

De plus $w_\pi(\Gamma_\alpha) \cap \pi' = w_\pi(\Gamma_\alpha) \setminus \{w_\pi(\gamma_\alpha)\} = \{w_\pi((\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)); 0 \leq s \leq r_\alpha - 1\}$ d'après l'égalité (2) et

$$\begin{aligned} w_{\pi'}(\Gamma_\alpha \cap \pi') &= w_{\pi'}(\Gamma_\alpha \setminus \{\alpha\}) \\ &= \{\check{w}_{\pi'}((\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)); 1 \leq s \leq r_\alpha\} \\ &= w_\pi(\Gamma_\alpha) \cap \pi' \end{aligned}$$

car, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $w_\pi((\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)) = \check{w}_{\pi'}((\check{w}_{\pi'} w_\pi)^{s+1}(\alpha))$. D'où la quatrième assertion du lemme puisqu'elle est claire pour $\Gamma \in \Pi'$ grâce à la deuxième assertion. Pour la cinquième assertion, il suffit de remarquer que $\check{w}_{\pi'}(w_\pi(\Gamma_\alpha) \cap \pi') = w_{\pi'}(w_\pi(\Gamma_\alpha) \cap \pi') = w_\pi(w_\pi(\Gamma_\alpha)) \cap \pi'$ d'après la quatrième assertion et $\check{w}_{\pi'}(w_\pi(\gamma_\alpha)) = w_\pi(\gamma_\alpha)$ puisque $w_\pi(\gamma_\alpha) \notin \pi'$. Enfin la dernière assertion découle de (i) et (iv). \square

3.2.3. Posons $\Pi_1 := \{\Gamma \in \Pi; \Gamma \neq w_\pi(\Gamma)\}$ et $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$. On pose aussi, pour $1 \leq i \leq 2$, $\Pi'_i := \Pi' \cap \Pi_i$, $\Pi''_i := \Pi'' \cap \Pi_i$ et $\Pi^*_i := \Pi^* \cap \Pi_i$. Le lemme 3.2.2 montre que le groupe $\langle w_\pi \rangle = \{\text{Id}_\pi, w_\pi\}$ agit sur Π' , Π'' et Π^* et donc aussi sur Π , Π_i , Π'_i , Π''_i et Π^*_i pour $1 \leq i \leq 2$.

On note $\Pi_1/\langle w_\pi \rangle$, $\Pi'_1/\langle w_\pi \rangle$, etc., l'ensemble des classes d'équivalence de Π_1 , Π'_1 , etc., modulo l'action du groupe $\langle w_\pi \rangle$ et comme dans 3.1.1 on utilise cette notation de façon abusive pour désigner un système de représentants de ces classes d'équivalence. On pose $\Pi/\langle w_\pi \rangle := (\Pi_1/\langle w_\pi \rangle) \sqcup \Pi_2$ et on utilise des notations analogues pour $\Pi'/\langle w_\pi \rangle$, $\Pi''/\langle w_\pi \rangle$ et $\Pi^*/\langle w_\pi \rangle$.

3.2.4.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi_2$. Alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma = w_\pi(\gamma)$ ou bien il existe $\gamma \in \Gamma \cap \pi'$ tel que $\gamma = w_{\pi'}(\gamma)$.

Preuve. – Supposons d'abord que $\Gamma \in \Pi'$. Comme $w_\pi(\Gamma) = w_{\pi'}(\Gamma)$ d'après le lemme 3.2.2, on a aussi $w_{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$. Soit donc $\beta \in \Gamma$. Alors $w_{\pi'}(\beta) \in \Gamma$ donc il existe un entier naturel k tel que $w_{\pi'}(\beta) = (w_\pi w_{\pi'})^k(\beta)$. Si k est pair alors $\gamma = (w_\pi w_{\pi'})^{\frac{k}{2}}(\beta)$ est tel que $\gamma \in \Gamma$ et $w_\pi(\gamma) = \gamma$. Si k est impair alors $\gamma = w_{\pi'}((w_\pi w_{\pi'})^{\frac{k-1}{2}}(\beta))$ est tel que $\gamma \in \Gamma$ et $w_\pi(\gamma) = \gamma$.

Supposons que $\Gamma \in \Pi''$, c'est-à-dire $\Gamma = \Gamma_\alpha = \{(w_{\pi'} w_\pi)^s(\alpha)\}_{s=0}^{r_\alpha}$ où $\alpha \in \pi \setminus \pi'$. Si pour tout $\gamma \in \Gamma_\alpha$ on avait $w_\pi(\gamma) \neq \gamma$ alors, puisque $w_\pi(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$, le cardinal de Γ_α , c'est-à-dire $r_\alpha + 1$, serait pair. Si pour tout $\gamma \in \Gamma_\alpha \setminus \{\alpha\}$ on avait $w_{\pi'}(\gamma) \neq \gamma$ alors le cardinal de $\Gamma_\alpha \setminus \{\alpha\}$, c'est-à-dire r_α , serait pair, puisque d'après le lemme 3.2.2 on a

$$w_{\pi'}(\Gamma_\alpha \setminus \{\alpha\}) = w_{\pi'}(\Gamma_\alpha \cap \pi') = w_\pi(\Gamma_\alpha) \cap \pi' = \Gamma_\alpha \cap \pi' = \Gamma_\alpha \setminus \{\alpha\}. \quad \square$$

3.2.5.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi' \cup \Pi''_2$. Alors il existe un entier naturel non nul r_Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, r_Γ est le plus petit entier naturel non nul s tel que $(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^s(\gamma) = \gamma$. De plus, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\Gamma = \{(\check{w}_{\pi'} w_\pi)^k(\gamma)\}_{0 \leq k \leq r_\Gamma - 1} = \{(w_\pi \check{w}_{\pi'})^k(\gamma)\}_{0 \leq k \leq r_\Gamma - 1}.$$

Preuve. – L'assertion est claire car, dans ce cas, Γ est une $\langle \check{w}_{\pi'} w_\pi \rangle$ -orbite. En effet, c'est évident par définition lorsque $\Gamma \in \Pi'$. De plus si $\Gamma = \Gamma_\alpha \in \Pi''_2$, avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$, on a $w_\pi(\gamma_\alpha) = \alpha$ grâce au (iii) du lemme 3.2.2 puisque ce sont les seuls éléments resp. de $w_\pi(\Gamma_\alpha)$ et de Γ_α qui ne sont pas dans π' et que $w_\pi(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$. Compte tenu du (v) du lemme 3.2.2 il vient alors $\check{w}_{\pi'} w_\pi(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$. \square

3.2.6.

Remarque. – Le lemme précédent n'est plus vrai lorsque $\Gamma \in \Pi''_1$. En effet pour \mathfrak{g} de type A_4 et $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ on vérifie que l'assertion n'est pas vraie pour $\Gamma_{\alpha_3} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$.

3.2.7. Rappelons les notations de la section 3.1 et rappelons également que l'on note λ' la projection dans $P(\pi')$ de $\lambda \in P(\pi)$ par la décomposition (1) définie dans 2.5. Pour tout $\Gamma \in \Pi$, on pose $d_\Gamma := \sum_{\gamma \in \Gamma} \varpi_\gamma^\pi$, la somme des poids fondamentaux relativement à π correspondant à tous les éléments de Γ . Comme deux éléments distincts de Π sont disjoints (voir lemme 3.2.2), il en résulte que les d_Γ , pour $\Gamma \in \Pi$, sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants. Soit

$$\mathcal{D}^{\pi'} := \{\lambda \in P^+(\pi) \mid (w_0^\pi \lambda - w_0^\pi \lambda, \pi')_\pi = 0\}.$$

Dans [9, Théorème 1] il a été démontré que $\mathcal{D}^{\pi'}$ est un semi-groupe libre engendré par l'ensemble $\{d_\Gamma; \Gamma \in \Pi\}$ et que le semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée associée à la sous-algèbre

parabolique $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$ de \mathfrak{g} est une algèbre de polynômes en rang de $\mathcal{D}^{\pi'}$ générateurs, c'est-à-dire en cardinal de Π générateurs. Pour $\Gamma \in \Pi$, on pose

$$\varepsilon_{\Gamma}^{\pi} := \begin{cases} \varepsilon_{\pi} & \text{si } \Gamma \in \Pi_2 \text{ et } d_{\Gamma} \in \mathcal{B}_{\pi} \text{ et } d'_{\Gamma} \in \mathcal{B}_{\pi'} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $\mathcal{D}_{\varepsilon_{\pi}}^{\pi'} := \sum_{\Gamma \in \Pi} \mathbb{N} \varepsilon_{\Gamma}^{\pi} d_{\Gamma}$.

3.2.8.

LEMME. – Soient $\Gamma \in \Pi$ et $\lambda \in \varepsilon_{\pi} \mathcal{D}^{\pi'}$ tel que $\lambda - w_0^{\pi} \lambda \in \mathcal{B}_{\pi}$ et $(\lambda - w_0^{\pi} \lambda)' \in \mathcal{B}_{\pi'}$. Alors

- (i) $\varepsilon_{\Gamma}^{\pi} (d_{\Gamma} + d_{w_{\pi}(\Gamma)}) \in \mathcal{B}_{\pi}$.
- (ii) $\varepsilon_{\Gamma}^{\pi} (d'_{\Gamma} + d'_{w_{\pi}(\Gamma)}) \in \mathcal{B}_{\pi'}$.
- (iii) $\lambda \in \mathcal{D}_{\varepsilon_{\pi}}^{\pi'}$.
- (iv) $(\lambda - w_0^{\pi} \lambda)' = \lambda - w_0^{\pi'} \lambda$.

Preuve. – Pour plus de simplicité, notons ϖ_{α} au lieu de ϖ_{α}^{π} pour tout $\alpha \in \pi$ et ϖ'_{α} au lieu de $\varpi_{\alpha}^{\pi'}$ pour tout $\alpha \in \pi'$ (voir section 2.5). Posons encore, pour toute partie L de π (pas forcément égale à un élément de Π), $d_L := \sum_{\gamma \in L} \varpi_{\gamma}$. Comme $d_{\Gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varpi_{\gamma}$, on a $d'_{\Gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} \varpi'_{\gamma} = d'_{\Gamma \cap \pi'}$ et $d'_{w_{\pi}(\Gamma)} = d'_{w_{\pi}(\Gamma) \cap \pi'} = d'_{w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')}$ d'après le lemme 3.2.2. Or $-w_0^{\pi}(\varpi_{\alpha}) = \varpi_{w_{\pi}(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \pi$, $-w_0^{\pi'}(\varpi'_{\alpha}) = \varpi'_{w_{\pi'}(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \pi'$ et enfin $w_0^{\pi}(\varpi_{\alpha}) = \varpi_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \pi \setminus \pi'$. Donc on a $d_{\Gamma} - w_0^{\pi} d_{\Gamma} = d_{\Gamma} + d_{w_{\pi}(\Gamma)}$ et

$$\begin{aligned} d_{\Gamma} - w_0^{\pi'} d_{\Gamma} &= d'_{\Gamma} - w_0^{\pi'} d'_{\Gamma} = d'_{\Gamma \cap \pi'} - w_0^{\pi'} d'_{\Gamma \cap \pi'} \\ &= d'_{\Gamma \cap \pi'} + d'_{w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')} = (d_{\Gamma} - w_0^{\pi} d_{\Gamma})'. \end{aligned}$$

Les assertions (i) et (ii) résultent alors de la définition de \mathcal{B}_{π} ou $\mathcal{B}_{\pi'}$ (voir 3.1.1) lorsque $\varepsilon_{\Gamma}^{\pi} = 1$ et, lorsque $\varepsilon_{\Gamma}^{\pi} = \frac{1}{2}$, elles résultent de l'égalité $d_{\Gamma} + d_{w_{\pi}(\Gamma)} = 2d_{\Gamma}$ et de $d'_{\Gamma} + d'_{w_{\pi}(\Gamma)} = 2d'_{\Gamma}$. De plus des égalités ci-dessus on déduit que l'on a $(\lambda - w_0^{\pi} \lambda)' = \lambda' - w_0^{\pi'} \lambda' = \lambda - w_0^{\pi'} \lambda$. D'où le (iii) grâce encore à la définition de \mathcal{B}_{π} ou $\mathcal{B}_{\pi'}$ et le (iv). \square

3.2.9.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi_2$ tel que $d_{\Gamma} \in \mathcal{B}_{\pi}$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma = w_{\pi}(\gamma)$ on a $\varpi_{\gamma}^{\pi} \in \mathcal{B}_{\pi}$.

Preuve. – Posons $\Gamma^0 := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \neq w_{\pi}(\gamma) \text{ ou } \varepsilon_{\gamma}^{\pi} = \frac{1}{2}\}$. On a

$$d_{\Gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma^0 / \langle w_{\pi} \rangle} \rho_{\gamma}^{\pi} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma^0} \rho_{\gamma}^{\pi}.$$

Compte tenu de la définition de \mathcal{B}_{π} , il vient donc que $\Gamma^0 = \Gamma$. \square

3.2.10.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi_2$ tel que $d'_{\Gamma} \in \mathcal{B}_{\pi'}$. Alors pour tout $\gamma \in \Gamma \cap \pi'$ tel que $\gamma = w_{\pi'}(\gamma)$ on a $\varpi_{\gamma}^{\pi'} \in \mathcal{B}_{\pi'}$.

Preuve. – Elle est analogue à la preuve précédente. \square

3.2.11. On peut montrer maintenant la proposition suivante.

PROPOSITION. – Soit $B \in \mathcal{B}_\pi$ tel que sa projection B' dans $P(\pi')$ par la décomposition (1) définie dans la section 2.5 appartienne à $\mathcal{B}_{\pi'}$.

(i) Pour tout $\Gamma \in \Pi$, il existe un unique $n_\Gamma \in \varepsilon_\pi^\pi \mathbb{N}$ tel que $n_\Gamma = n_{w_\pi(\Gamma)}$ et tel que

$$B = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle w_\pi \rangle} n_\Gamma (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)}).$$

(ii) Il existe exactement $\prod_{\Gamma \in \Pi_1 / \langle w_\pi \rangle} (n_\Gamma + 1)$ éléments $\lambda \in \mathcal{D}_{\varepsilon_\pi}^{\pi'}$ tels que $B = \lambda - w_0^\pi \lambda$ et $B' = \lambda - w_0^{\pi'} \lambda$.

Preuve. – On reprend dans cette preuve les notations simplifiées pour les poids fondamentaux utilisées également dans la preuve du lemme 3.2.8. Remarquons que, avec les notations de la section 3.1, si $\varepsilon_\pi = 1$ alors $\varepsilon_{\pi'} = 1$ aussi. De la définition des semi-groupes libres \mathcal{B}_π et $\mathcal{B}_{\pi'}$ et des ρ_α^π ou $\rho_{\alpha'}^{\pi'}$, il découle qu'il existe $\lambda_1 \in \varepsilon_\pi P^+(\pi)$ et $\lambda_2' \in \varepsilon_{\pi'} P^+(\pi')$ tels que $B = \lambda_1 - w_0^\pi \lambda_1$ et $B' = \lambda_2' - w_0^{\pi'} \lambda_2'$. De plus, grâce à la remarque ci-dessus, on peut choisir $\lambda_2 \in \varepsilon_\pi P^+(\pi)$ tel que $\frac{1}{\varepsilon_{\pi'}} \lambda_2'$ soit la projection de $\frac{1}{\varepsilon_{\pi'}} \lambda_2$ dans $P(\pi')$ par la décomposition (1) et tel que l'on ait $\lambda_2 = \sum_{\alpha \in \pi} n_\alpha \varpi_\alpha$ avec $n_\alpha \in \varepsilon_\pi^\pi \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \pi'$ et $n_\alpha \in \varepsilon_\alpha^\pi \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \pi \setminus \pi'$. Alors $B' = \lambda_2 - w_0^{\pi'} \lambda_2$. Posons $\lambda_1 = \sum_{\alpha \in \pi} m_\alpha \varpi_\alpha$ où $m_\alpha \in \varepsilon_\alpha^\pi \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \pi$. Rappelons que $-w_0^\pi(\varpi_\alpha) = \varpi_{w_\pi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \pi$ et $-w_0^{\pi'}(\varpi'_\alpha) = \varpi'_{w_{\pi'}(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \pi'$. On a donc

$$(3) \quad B = \sum_{\alpha \in \pi} (m_\alpha + m_{w_\pi(\alpha)}) \varpi_\alpha \quad \text{et} \quad B' = \sum_{\alpha \in \pi'} (n_\alpha + n_{w_{\pi'}(\alpha)}) \varpi'_\alpha.$$

Comparant les égalités dans (3) ci-dessus on obtient

$$(4) \quad \forall \alpha \in \pi', \quad m_\alpha + m_{w_\pi(\alpha)} = n_\alpha + n_{w_{\pi'}(\alpha)}.$$

Appliquant l'égalité (4) à $\alpha \in \pi'$ puis à $w_{\pi'}(\alpha)$ qui est aussi dans π' et comparant les résultats obtenus, on en déduit

$$(5) \quad \forall \alpha \in \pi', \quad m_\alpha + m_{w_\pi(\alpha)} = m_{w_{\pi'}(\alpha)} + m_{w_\pi w_{\pi'}(\alpha)}.$$

Appliquant l'égalité (5) à $w_\pi(\alpha)$ pour $\alpha \in \pi$ tel que $w_\pi(\alpha) \in \pi'$, on obtient

$$(6) \quad \forall \alpha \in \pi \text{ tel que } w_\pi(\alpha) \in \pi', \quad m_{w_\pi(\alpha)} + m_\alpha = m_{w_{\pi'} w_\pi(\alpha)} + m_{w_\pi w_{\pi'} w_\pi(\alpha)}.$$

Soient $\Gamma \in \Pi'$ et $\alpha \in \Gamma$. Il existe $r_\Gamma \in \mathbb{N}^*$ (indépendant de l'élément α dans Γ d'après le lemme 3.2.5) tel que $\Gamma = \{(w_\pi w_{\pi'})^s(\alpha)\}_{s=0}^{r_\Gamma-1}$. Compte tenu de l'égalité (5) on montre donc, par récurrence sur s , que le coefficient $m_\alpha + m_{w_\pi(\alpha)}$ ne dépend pas de α dans Γ . De même, pour $\Gamma \in \Pi''$, l'égalité (6) permet de montrer par récurrence que le coefficient ci-dessus est indépendant de l'élément choisi dans Γ . Autrement dit on a, grâce aussi à l'égalité (4),

$$(7) \quad \forall \Gamma \in \Pi \mid \Gamma \cap \pi' \neq \emptyset, \exists m_\Gamma \in \varepsilon_\pi \mathbb{N} \cap \varepsilon_{\pi'} \mathbb{N} \mid \forall \alpha \in \Gamma, \forall \beta \in \Gamma \cap \pi', \\ m_\Gamma = m_\alpha + m_{w_\pi(\alpha)} = n_\beta + n_{w_{\pi'}(\beta)}$$

Enfin

$$(8) \quad \forall \Gamma \in \Pi \mid \Gamma \cap \pi' = \emptyset, \exists m_\Gamma \in \varepsilon_\pi \mathbb{N} \mid \forall \alpha \in \Gamma, \quad m_\Gamma = m_\alpha + m_{w_\pi(\alpha)}$$

car de tels Γ sont réduits à un singleton. Comme Π est une partition de π et que $m_\Gamma = m_{w_\pi(\Gamma)}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$, on déduit des égalités (7), (8) et (3) l'égalité suivante.

$$(9) \quad B = \sum_{\Gamma \in \Pi} m_\Gamma d_\Gamma = \sum_{\Gamma \in \Pi_1 / \langle w_\pi \rangle} m_\Gamma (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)}) + \sum_{\Gamma \in \Pi_2} \frac{m_\Gamma}{2} (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)}).$$

Or $B \in P(\pi)$ donc on a nécessairement $m_\Gamma \in \mathbb{N}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$. Posons pour tout $\Gamma \in \Pi_1$, $n_\Gamma = m_\Gamma$ et pour tout $\Gamma \in \Pi_2$, $n_\Gamma = \frac{m_\Gamma}{2}$. D'après les égalités (7), (8) et le lemme 3.2.4, pour tout $\Gamma \in \Pi_2$, $\frac{m_\Gamma}{2} \in \varepsilon_\pi \mathbb{N}$. De plus, de l'égalité (9), il vient

$$(10) \quad B = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle w_\pi \rangle} n_\Gamma (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)})$$

et les n_Γ sont uniques puisque les d_Γ , pour $\Gamma \in \Pi$, sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants. Soit enfin $\lambda = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle w_\pi \rangle} n_\Gamma d_\Gamma$. D'après les considérations ci-dessus, on a $\lambda \in \varepsilon_\pi \mathcal{D}^{\pi'}$. Comme $-w_0^\pi d_\Gamma = d_{w_\pi(\Gamma)}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$, on obtient $\lambda - w_0^\pi \lambda = B$ grâce à l'égalité (10). Comme de plus $B' \in \mathcal{B}_{\pi'}$, le lemme 3.2.8 permet de déduire les assertions suivantes. Tout d'abord $\lambda \in \mathcal{D}_{\varepsilon_\pi}^{\pi'}$ donc $n_\Gamma \in \varepsilon_\pi^\pi \mathbb{N}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$. De plus $\lambda - w_0^{\pi'} \lambda = B'$.

Réciproquement on vérifie que tout $\lambda = \sum_{\Gamma \in \Pi} k_\Gamma \varepsilon_\Gamma^\pi d_\Gamma \in \mathcal{D}_{\varepsilon_\pi}^{\pi'}$ (avec $k_\Gamma \in \mathbb{N}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$) tel que $B = \lambda - w_0^\pi \lambda$ satisfait à $k_\Gamma \varepsilon_\Gamma^\pi = n_\Gamma$ pour tout $\Gamma \in \Pi_2$ et $k_\Gamma + k_{w_\pi(\Gamma)} = n_\Gamma$ pour tout $\Gamma \in \Pi_1 / \langle w_\pi \rangle$. De plus un tel λ vérifie aussi $B' = \lambda - w_0^{\pi'} \lambda$ d'après le lemme 3.2.8. Enfin le nombre de tels λ est égal à $\prod_{\Gamma \in \Pi_1 / \langle w_\pi \rangle} (n_\Gamma + 1)$. \square

4. Recherche d'une borne supérieure pour $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$

Dans toute cette partie on fixe un sous-ensemble π' de l'ensemble des racines simples π de \mathfrak{g} . Soit \mathfrak{p} la sous-algèbre parabolique déterminée par π' contenant la sous-algèbre de Borel positive de \mathfrak{g} (voir section 2.4). Rappelons (voir les notations des sections 2.2 et 2.8) que $\mathfrak{p}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ et que $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ est l'algèbre des invariants de $S(\mathfrak{p})$ par la représentation adjointe de \mathfrak{p}' .

Nous allons montrer que tout élément de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ admet comme terme principal (au sens que nous expliciterons par la suite) un élément de $Y(\mathfrak{n})Y(\mathfrak{n}_{\pi'})$ lorsque $\mathfrak{h}_\pi^\perp = \{0\}$. Plus généralement nous allons donner une décomposition convenable de \mathfrak{h}_π^\perp de sorte qu'un résultat analogue soit encore vrai (voir la proposition 4.2.8).

4.1. Description d'un localisé de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}}$

Nous allons donner, dans 4.1.5 et 4.1.6, une description d'un certain localisé de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}}$, qui nous permettra d'en déduire (voir proposition 4.2.8) les "termes principaux", dont nous avons parlé plus haut, des éléments de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$.

4.1.1. Rappelons, avec les notations de la section 3.1, que $Y(\mathfrak{n}) = S(\mathfrak{n})^{\mathfrak{n}}$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont les $a_{\rho_\alpha^\pi}$ (ou plus simplement a_{ρ_α}) pour $\alpha \in \pi / \langle w_\pi \rangle$. Notons E la partie multiplicative de $S(\mathfrak{n})$ engendrée par les a_{ρ_α} ($\alpha \in \pi / \langle w_\pi \rangle$) et $T := S(\mathfrak{p})_E$ le localisé par la partie multiplicative E de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} . La représentation adjointe de \mathfrak{n} , resp. \mathfrak{h} , dans $S(\mathfrak{p})$ (voir section 2.8) se prolonge en une représentation adjointe de \mathfrak{n} , resp. \mathfrak{h} , dans $S(\mathfrak{p})_E$ de sorte que, pour tout $x \in \mathfrak{n}$, resp. $x \in \mathfrak{h}$, le prolongement, noté encore $\text{ad } x$, de $\text{ad } x$ défini sur $S(\mathfrak{p})$ soit une dérivation de T . Remarquons d'ailleurs que, pour tous $a \in E$ et $b \in S(\mathfrak{p})$ et pour tout $x \in \mathfrak{n}$, on a $(\text{ad } x)(a^{-1}b) = a^{-1}(\text{ad } x)(b)$. De plus, comme

la représentation adjointe de \mathfrak{n} dans \mathfrak{g} est nilpotente, la dérivation $\text{ad } x$ pour $x \in \mathfrak{n}$ est une dérivation localement nilpotente de T . On définit alors, comme dans la section 2.8, l'espace T^n des invariants de T par la représentation adjointe de \mathfrak{n} . On pose $N := \dim(\mathfrak{n})$. L'algèbre de Lie \mathfrak{n} étant nilpotente, il existe d'après [2, I, §4, 1] une suite décroissante d'idéaux $(\mathfrak{n}_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ de \mathfrak{n} avec $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_{N+1} = \{0\}$ telle que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i] \subset \mathfrak{n}_{i+1}$ et $\dim(\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i+1}) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Ordonnons l'ensemble $\Delta^+ = \{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq N}$ des racines positives relativement à π de sorte que l'on ait $\mathfrak{n}_i = \bigoplus_{i \leq j \leq N} \mathbb{C}x_j$ où pour tout i , $1 \leq i \leq N$, on a posé $x_i := x_{\gamma_i}$ (voir notation de la section 2.3). Posons, pour tout $1 \leq i \leq N+1$, $T_i := T^{\mathfrak{n}_i} = (S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}_i})_E$ car $E \subset Y(\mathfrak{n})$. On notera donc $S(\mathfrak{p})_E^n$ sans parenthèse au lieu de $(S(\mathfrak{p})_E)^n = (S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{n}})_E$. Pour tout $1 \leq i \leq N+1$ et $1 \leq j \leq N$, on a $(\text{ad } x_j)(T_i) \subset T_i$ étant donné que \mathfrak{n}_i est un idéal de \mathfrak{n} . De plus, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $T_i \subset T_{i+1}$ puisque $\mathfrak{n}_i \supset \mathfrak{n}_{i+1}$.

4.1.2. Soit \mathfrak{k} un supplémentaire dans \mathfrak{h} de $\mathfrak{h}^\perp := \mathfrak{h}_\pi^\perp$ (voir section 2.6) et posons $\mathfrak{b}_\mathfrak{k} := \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k}$. Notons GKdim la dimension de Gelfand–Kirillov d'une algèbre de type fini définie par exemple comme dans [14, A.3.6]. Grâce à la structure de $\text{Sy}(\mathfrak{b})$ décrite dans la section 3.1.1, on sait que $S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})^{\mathfrak{n}} = Y(\mathfrak{n})$. Donc on a

$$\begin{aligned} \text{GKdim}(S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})) - \text{GKdim}(S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})^{\mathfrak{n}}) &= \dim \mathfrak{b}_\mathfrak{k} - \text{GKdim}(Y(\mathfrak{n})) \\ (11) \qquad \qquad \qquad &= \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{k} - \text{GKdim}(Y(\mathfrak{n})) \\ &= \dim \mathfrak{n} \end{aligned}$$

car de plus

$$\begin{aligned} \text{GKdim}(Y(\mathfrak{n})) &= \text{Card}(\pi/\langle w_\pi \rangle) = \text{Card}(\pi) - \dim(\mathfrak{h}^\perp) \\ &= \dim \mathfrak{h} - \dim(\mathfrak{h}^\perp) = \dim \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

4.1.3. Posons $S := S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})_E$ le localisé par la partie multiplicative E de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})$ de $\mathfrak{b}_\mathfrak{k}$ et, pour tout $1 \leq i \leq N+1$, $S_i := S^{\mathfrak{n}_i} = (S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})^{\mathfrak{n}_i})_E$. Comme précédemment on notera $S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})_E^{\mathfrak{n}}$ au lieu de $(S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})^{\mathfrak{n}})_E = (S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})_E)^{\mathfrak{n}}$ et pour tout $1 \leq i \leq N+1$ et $1 \leq j \leq N$, on a $(\text{ad } x_j)(S_i) \subset S_i$. De plus pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $S_i \subset S_{i+1}$. D'après [11, Théorème 2.6], soit on a $S_i = S_{i+1}$, soit il existe $y_i \in S_{i+1}$ vecteur de poids $-\gamma_i$ vérifiant $(\text{ad } x_i)y_i = 1$. Alors, dans ce dernier cas, d'après le lemme de Taylor (cf. [11, 2.2]) on a $S_{i+1} = S_i[y_i]$ et donc $\text{GKdim}(S_{i+1}) = 1 + \text{GKdim}(S_i)$. Or $\text{GKdim}(S) = \text{GKdim}(S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k}))$ et $\text{GKdim}(S^{\mathfrak{n}}) = \text{GKdim}((S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})^{\mathfrak{n}})_E) = \text{GKdim}(S(\mathfrak{b}_\mathfrak{k})^{\mathfrak{n}})$. Compte tenu de l'égalité (11) et du fait que $S_1 = S^{\mathfrak{n}}$ et $S_{N+1} = S$, il vient $S_i \subsetneq S_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et donc, pour tout $1 \leq i \leq N$, il existe $y_i \in S_{i+1}$ vecteur de poids $-\gamma_i$ tel que $(\text{ad } x_i)y_i = 1$. De plus $S = S^{\mathfrak{n}}[y_1, \dots, y_N]$. Comme $y_i \in T_{i+1}$ et que $(\text{ad } x_i)y_i = 1$, il découle aussi du lemme de Taylor l'égalité suivante. Pour tout $1 \leq i \leq N$, $T_{i+1} = T_i[y_i]$.

4.1.4. On note Φ_i , pour $1 \leq i \leq N$, l'endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel T_{i+1} défini par

$$(12) \qquad \Phi_i(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} y_i^n (\text{ad } x_i)^n(a) \quad \forall a \in T_{i+1}.$$

Pour tout $a \in T_{i+1}$ le nombre de termes non nuls dans $\Phi_i(a)$ est fini car $\text{ad } x_i$ est une dérivation localement nilpotente de T_{i+1} . Comme de plus $(\text{ad } x_i)y_i = 1$, on vérifie facilement que $(\text{ad } x_i)(\Phi_i(a)) = 0$ pour tout $a \in T_{i+1}$. Donc Φ_i est un homomorphisme de $\text{ad } \mathfrak{h}$ -modules

de T_{i+1} dans T_i . De plus l'image de Φ_i est égale à T_i car pour tout $a \in T_i$ on a $\Phi_i(a) = a$. On vérifie également que $\Phi_i(S_{i+1}) = S_i$. Enfin puisque les algèbres T et donc aussi T_{i+1} sont commutatives il s'ensuit que $y_i(\text{ad } x_i)$ est une dérivation de T_{i+1} . Il en résulte alors aisément que Φ_i est un homomorphisme de l'algèbre T_{i+1} dans l'algèbre T_i . Notons Φ l'homomorphisme obtenu par la composition des Φ_i à savoir $\Phi := \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_N$. On a alors le lemme suivant.

LEMME. – *L'application $\Phi : S(\mathfrak{p})_E \longrightarrow S(\mathfrak{p})_E^n$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres et de $\text{ad } \mathfrak{h}$ -modules. De plus $\Phi(S(\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}})_E) = S(\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}})_E^n = Y(\mathfrak{n})_E$.*

Preuve. – Provient des considérations précédentes et du fait que $T_{N+1} = T = S(\mathfrak{p})_E$ et que $T_1 = T^n = S(\mathfrak{p})_E^n$. \square

4.1.5. Rappelons les notations des sections 2.4 et 2.6 et posons

$$\mathfrak{h}^I := \{h \in \mathfrak{h}^\perp \mid \langle h, \pi' \rangle = 0\} = \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}.$$

LEMME. – *Quel que soit le sous-espace \mathfrak{h}^J supplémentaire de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp on a $S(\mathfrak{p})_E^n = S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)_E^n \Phi(S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J))$.*

Preuve. – Vu la description (voir section 3.1.3) des $c_{\rho_\alpha}^\alpha \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{C}h_\pi(\alpha))^n$, l'algèbre $S(\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{h}^I)_E^n$ est engendrée sur $Y(\mathfrak{n})_E$ par les $c_{\rho_\alpha}^\alpha$ tels que $h_\pi(\alpha) \in \mathfrak{h}^I$. Donc $S(\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{h}^I)_E^n = S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)_E^n = \Phi(S(\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{h}^I)_E)$. Enfin

$$S(\mathfrak{p})_E^n = \Phi(S(\mathfrak{p})_E) = \Phi(S(\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{h}^I)_E) \Phi(S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)) = S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)_E^n \Phi(S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)). \quad \square$$

4.1.6. Vu la forme de Φ on obtient également le lemme suivant.

LEMME. – *Soit \mathfrak{h}^J un sous-espace supplémentaire de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp , $\gamma \in \Delta_{\pi'}^+$, $x_{-\gamma} \in (\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{-\gamma}$ et $h \in \mathfrak{h}^J$. Alors*

(i) $\Phi(x_{-\gamma}) - x_{-\gamma} \in \sum_{\delta \in \Delta_{\pi'}^+ \cup \{0\}, \delta < \gamma} S(\mathfrak{b})_E x_{-\delta}$ où l'on pose $x_0 = 1$ et où la relation d'ordre dans $\Delta_{\pi'}^+ \subset \mathfrak{h}_{\pi'}^*$ est celle définie dans 2.7.

(ii) $\Phi(h) - h \in S(\mathfrak{n})_E$.

Preuve. – Le (i) provient de la définition de Φ . Pour montrer (ii), il suffit de constater que d'une part $\Phi(h) \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}^J)_E^n = S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^J)_E^n$ et que d'autre part $\Phi(h) - h \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k})_E$ puis que $S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^J)_E \cap S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k})_E = S(\mathfrak{n})_E$. \square

4.2. Termes principaux des éléments de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$

4.2.1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et V_1, \dots, V_k une famille de sous-espaces vectoriels de $S(\mathfrak{p})$. On note m l'application obtenue par multiplication des facteurs du produit tensoriel $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ dans $S(\mathfrak{p})$.

Ayant choisi un sous-espace vectoriel supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp , on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S'_n(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{s=0}^n m(S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}^I) \otimes (\mathfrak{n}_{\pi'}^-)^{\otimes s} \otimes (\mathfrak{h}^J)^{\otimes n-s})$. Alors on a $S(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S'_n(\mathfrak{p})$ et $(S'_n(\mathfrak{p}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une graduation de l'algèbre $S(\mathfrak{p})$ qui est invariante par l'action adjointe de \mathfrak{h} . Pour tout élément a de $S(\mathfrak{p}) \setminus \{0\}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = \sum_{s=0}^n a_s$ où, pour tout $0 \leq s \leq n$, $a_s \in S'_s(\mathfrak{p})$ et $a_n \neq 0$. Nous posons $\text{gr}'(a) = \text{gr}'_n(a) := a_n$: c'est le terme de plus haut degré de a pour cette graduation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments non nuls de $S'_n(\mathfrak{p})$ sont dits homogènes de degré n . On note $(S^m(\mathfrak{p}))_{m \in \mathbb{N}}$ la filtration de $S(\mathfrak{p})$ définie par $S^m(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{s=0}^m S'_s(\mathfrak{p})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2.2. L'algèbre dérivée $\mathfrak{p}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ de \mathfrak{p} est égale à $\mathfrak{p}' = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}_{\pi'} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$. Rappelons (voir section 2.8) que nous notons $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ l'espace des invariants de $S(\mathfrak{p})$ par la représentation adjointe de \mathfrak{p}' . Soit V un sous-espace vectoriel de $S(\mathfrak{p})$. Nous notons $\text{gr}'(V)$ le sous-espace vectoriel de $S(\mathfrak{p})$ engendré par les termes de plus haut degré des éléments de V pour la graduation définie dans 4.2.1. C'est-à-dire $\text{gr}'(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{gr}'_n(V)$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{gr}'_n(V) := \{b \in S'_n(\mathfrak{p}) \mid \exists a \in V; b - a \in S'^{n-1}(\mathfrak{p})\},$$

où l'on convient que $S'^{-1}(\mathfrak{p}) = \{0\}$. L'espace $\text{gr}'_n(V)$ correspond à un choix de représentants de $((V \cap S'^n(\mathfrak{p})) + S'^{n-1}(\mathfrak{p}))/S'^{n-1}(\mathfrak{p})$, qui, à son tour, est isomorphe à $(V \cap S'^n(\mathfrak{p}))/ (V \cap S'^{n-1}(\mathfrak{p}))$.

4.2.3. Rappelons la relation d'ordre dans $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$, définie dans la section 2.7. Pour $\mu \in \mathbb{N}\pi'$, on pose $K_\mu := \{\nu \in \mathbb{N}\pi' \mid \nu < \mu\}$ si $\mu \neq 0$ et $K_\mu := \{0\}$ si $\mu = 0$. Rappelons également l'homomorphisme Φ défini en 4.1.4.

LEMME. – On choisit un sous-espace vectoriel supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp . Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \mathbb{N}\pi'$ et $u_{-\mu} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\mu} \cap (S^n(\mathfrak{p}) \setminus S'^{n-1}(\mathfrak{p}))$. Alors il existe I et J finis et pour tout $i \in I$, $v_i \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\mu} \cap S'^{n-1}(\mathfrak{p})$ et, pour tout $j \in J$, $v_j \in K_\mu$ et $w_j \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{-\nu_j}$ tels que

$$\Phi(u_{-\mu}) - u_{-\mu} \in \sum_{i \in I} S(\mathfrak{n})_E v_i + \sum_{j \in J} S(\mathfrak{b})_E w_j.$$

Preuve. – Découle du lemme 4.1.6 et de la définition de la filtration $(S'^s(\mathfrak{p}))_{s \in \mathbb{N}}$ de $S(\mathfrak{p})$ donnée dans 4.2.1. \square

4.2.4. On pose $P_{\pi'}^+(\pi) := \{\nu \in P^+(\pi) \mid (\nu, \pi')_\pi = 0\}$. Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}\pi$ rappelons que $S(\mathfrak{p})_\nu$ est le sous-espace de poids ν de $S(\mathfrak{p})$ (voir section 2.7). On pose $\text{Sy}(\mathfrak{p})_\nu := \text{Sy}(\mathfrak{p}) \cap S(\mathfrak{p})_\nu$. Il est clair que l'on a le lemme suivant.

LEMME. – On a $\text{Sy}(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{\nu \in P_{\pi'}^+(\pi)} \text{Sy}(\mathfrak{p})_\nu$.

4.2.5. On note $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'}$ le sous-espace $\text{Sy}(\mathfrak{p}) \cap S(\mathfrak{b})$.

LEMME. – $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'} \subset S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)^{\mathfrak{n}}$.

Preuve. – Pour tout $\nu \in \mathbb{N}\pi$, posons $S(\mathfrak{b})_\nu^{\mathfrak{p}'} := \text{Sy}(\mathfrak{p})_\nu \cap S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'} \cap S(\mathfrak{b})_\nu$ où l'on note $S(\mathfrak{b})_\nu$ le sous-espace de poids ν de $S(\mathfrak{b})$. D'après le lemme 4.2.4, on a $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'} = \bigoplus_{\nu \in P_{\pi'}^+(\pi)} S(\mathfrak{b})_\nu^{\mathfrak{p}'}$. Soit $z_\nu \in S(\mathfrak{b})_\nu^{\mathfrak{p}'}$, $z_\nu \neq 0$. Alors $z_\nu \in \text{Sy}(\mathfrak{b})_\nu$ donc $\nu \in \mathcal{B}_\pi$. Or \mathcal{B}_π est un sous-semi-groupe libre de $P^+(\pi)$ engendré par les ρ_α^π pour $\alpha \in \pi / \langle w_\pi \rangle$. Donc, puisque $(\nu, \pi')_\pi = 0$, ν est une somme (avec des coefficients dans \mathbb{N}) des ρ_α^π qui satisfont la relation $(\rho_\alpha^\pi, \pi')_\pi = 0$. Par conséquent z_ν est combinaison linéaire des produits des $a_{\rho_\alpha^\pi}$ et $c_{\rho_\alpha^\pi}^\alpha$ tels que $(\rho_\alpha^\pi, \pi')_\pi = 0$ (voir notations de la section 3.1). Or dans ce cas $a_{\rho_\alpha^\pi}$ et $c_{\rho_\alpha^\pi}^\alpha$ sont dans $S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)^{\mathfrak{n}}$. En effet

$$\begin{aligned} (\rho_\alpha^\pi, \pi')_\pi = 0 &\implies ((\varpi_\alpha^\pi + \varpi_{w_\pi(\alpha)}^\pi), \pi')_\pi = 0 \\ &\implies ((\varpi_\alpha^\pi - \varpi_{w_\pi(\alpha)}^\pi), \pi')_\pi = 0 \\ &\implies h_\pi(\alpha) \in \mathfrak{h}^I. \quad \square \end{aligned}$$

4.2.6. Pour $\nu \in \mathbb{N}\pi'$, $\nu = \sum_{\alpha \in \pi'} k_\alpha \alpha$, $k_\alpha \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \pi'$, posons $o(\nu) := \sum_{\alpha \in \pi'} k_\alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S''_n(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}\pi' | o(\nu)=n} m(S(\mathfrak{b}) \otimes S(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{-\nu})$. Alors $(S''_n(\mathfrak{p}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une nouvelle graduation de l'algèbre $S(\mathfrak{p})$ qui est invariante par l'action adjointe de \mathfrak{h} . On pose également $S''^n(\mathfrak{p}) := \bigoplus_{s=0}^n S''_s(\mathfrak{p})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour un élément a non nul de $S(\mathfrak{p})$ on note $\text{gr}''(a)$ le terme de plus haut degré de a pour cette graduation et pour un sous-espace vectoriel V de $S(\mathfrak{p})$ on note $\text{gr}''(V)$ le sous-espace de $S(\mathfrak{p})$ engendré par les termes de plus haut degré des éléments de V pour cette graduation. On a $\text{gr}''(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{gr}''_n(V)$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{gr}''_n(V) := \{b \in S''_n(\mathfrak{p}) \mid \exists a \in V; b - a \in S''^{n-1}(\mathfrak{p})\}$, où l'on convient que $S''^{-1}(\mathfrak{p}) = \{0\}$.

4.2.7. Remarquons que pour les deux filtrations définies dans 4.2.1 et dans 4.2.6 les éléments non nuls de $S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}^1)$ et donc ceux de E sont homogènes de degré zéro. Ces deux filtrations se prolongent donc de manière évidente au localisé $S(\mathfrak{p})_E$. D'après le lemme 4.1.6, pour un sous-espace supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^1 dans \mathfrak{h}^\perp et si $h \in \mathfrak{h}^J$, alors pour la première filtration $\Phi(h) - h$ est un élément homogène de degré zéro, tandis que, si $\gamma \in \Delta_{\pi'}^+$, alors $\Phi(x_{-\gamma}) - x_{-\gamma}$ a, pour la deuxième filtration, une filtration strictement plus petite que $o(\gamma)$, c'est-à-dire appartient à $S''^n(\mathfrak{p})$ avec $n < o(\gamma)$.

4.2.8. Soit \mathfrak{h}^J un sous-espace supplémentaire de \mathfrak{h}^1 dans \mathfrak{h}^\perp . L'algèbre $m(S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)^n \otimes S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)^{n-\pi'})$ est un $U(\mathfrak{h})$ -module pour la représentation adjointe de \mathfrak{h} (voir 2.8). On note S^J la sous-algèbre de $m(S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)^n \otimes S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)^{n-\pi'})$ engendrée comme espace vectoriel par les vecteurs de poids orthogonal à π' pour la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(\cdot, \cdot)_\pi$ définie dans la section 2.6.

PROPOSITION. – *Quel que soit le sous-espace supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^1 dans \mathfrak{h}^\perp , on a, avec les notations de 4.2.2 et 4.2.6,*

$$\text{gr}'(\text{gr}''(S(\mathfrak{p}))) \subset S^J.$$

Preuve. – Comme $S(\mathfrak{p})$ est somme de ses espaces de poids $S(\mathfrak{p})_\delta$, $\delta \in P_{\pi'}^+(\pi)$, (voir lemme 4.2.4), et comme les graduations sont invariantes par l'action adjointe de \mathfrak{h} , il suffit de montrer l'inclusion pour chaque espace de poids $S(\mathfrak{p})_\delta$.

Le lemme 4.2.5 fournit l'inclusion concernant $\text{gr}'(\text{gr}''(S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'}))$ car, d'après ce lemme,

$$S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'} = \text{gr}'_0(S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'}) = \text{gr}''_0(S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'}) = \text{gr}'_0(\text{gr}''_0(S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'})) \subset S^J$$

puisque de plus, d'après le lemme 4.2.4, les poids des éléments de $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'}$ sont orthogonaux à π' .

Soit maintenant $z_\delta \in S(\mathfrak{p})_\delta \setminus S(\mathfrak{b})$. Alors, d'après le lemme 4.2.4, on a $\delta \in P^+(\pi)$ et $(\delta, \pi')_\pi = 0$. De plus, d'après le lemme 4.1.5, comme $z_\delta \in S(\mathfrak{p})^n$, il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $1 \leq i \leq s$, $e_i \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)_{\nu_i}^n$ linéairement indépendants et $u_{-\mu_i} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\mu_i} \cap (S'^{n_i}(\mathfrak{p}) \setminus S'^{n_i-1}(\mathfrak{p}))$ avec $n_i \in \mathbb{N}$, tels que, pour tout $1 \leq i \leq s$, $\nu_i - \mu_i = \delta$ et $z_\delta = \sum_{i=1}^s e_i \Phi(u_{-\mu_i})$. On suppose de plus que les éléments de cette somme ont été numérotés de telle sorte que si $r := \max\{o(\mu_i)\}_{i=1}^s$, alors ce sont les k premiers μ_i , $k \leq s$, tels que $o(\mu_i) = r$. De plus $r \neq 0$ car sinon z_δ appartiendrait à $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{p}'}$. Rappelons les notations et le lemme de 4.2.3. Pour tout $1 \leq i \leq s$, il existe donc I_i et J_i finis et pour tout $j \in I_i$, $e'_{ij} \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)$, $u'_{ij} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\mu_i} \cap S'^{n_i-1}(\mathfrak{p})$ et pour tout $j \in J_i$, $\nu_{ij} \in K_{\mu_i}$, $u''_{ij} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{-\nu_{ij}}$ et $e''_{ij} \in S(\mathfrak{b})$ tels que

$$(13) \quad z_\delta = \sum_{i=1}^s e_i u_{-\mu_i} + \sum_{i=1}^s \sum_{j \in I_i} e'_{ij} u'_{ij} + \sum_{i=1}^s \sum_{j \in J_i} e''_{ij} u''_{ij}.$$

Alors

$$(14) \quad \text{gr}''(z_\delta) = \sum_{i=1}^k e_i u_{-\mu_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j \in I_i} e'_{ij} u'_{ij}.$$

Comme $u_{-\mu_i} \in S^{n_i}(\mathfrak{p}) \setminus S^{n_i-1}(\mathfrak{p})$, il existe $v_{-\mu_i} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\mu_i} \cap (S'_{n_i}(\mathfrak{p}) \setminus \{0\})$ et $v'_{-\mu_i} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\mu_i} \cap S^{n_i-1}(\mathfrak{p})$ tels que $u_{-\mu_i} = v_{-\mu_i} + v'_{-\mu_i}$. Soit $n := \max\{n_i\}_{i=1}^k$. On suppose que les termes de la somme (14) égale à $\text{gr}''(z_\delta)$ ont été numérotés de sorte que ce sont les t , $t \leq k$, premiers termes $u_{-\mu_i}$ qui ont une filtration n_i , par rapport à la filtration de $S(\mathfrak{p})$ définie dans 4.2.1, égale à n . Alors

$$(15) \quad \text{gr}'(\text{gr}''(z_\delta)) = \sum_{i=1}^t e_i v_{-\mu_i}.$$

Reste à prouver que, pour tout $1 \leq i \leq t$, $v_{-\mu_i}$ est invariant par l'action adjointe de $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$. Soit donc $\alpha \in \pi'$. On a $(\text{ad } x_{-\alpha})(z_\delta) = 0$. Or $(\text{ad } x_{-\alpha})(e_i) \in S(\mathfrak{b})$ vu que $e_i \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)$ pour tout $1 \leq i \leq s$ et par définition de \mathfrak{h}^I . De même $(\text{ad } x_{-\alpha})(e'_{ij}) \in S(\mathfrak{b})$ pour tout $j \in I_i$. Par conséquent appliquant $(\text{ad } x_{-\alpha})$ à l'égalité (13), seuls $\sum_{i=1}^k e_i (\text{ad } x_{-\alpha})(u_{-\mu_i})$ et $\sum_{i=1}^k \sum_{j \in I_i} e'_{ij} (\text{ad } x_{-\alpha})(u'_{ij})$ sont dans $S''_{r+1}(\mathfrak{p})$, les autres termes étant dans $S''_r(\mathfrak{p})$.

Comme $S''_{r+1}(\mathfrak{p}) \cap S''_r(\mathfrak{p}) = \{0\}$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^k e_i (\text{ad } x_{-\alpha})(u_{-\mu_i}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j \in I_i} e'_{ij} (\text{ad } x_{-\alpha})(u'_{ij}) = 0.$$

Or dans cette somme seul $\sum_{i=1}^t e_i (\text{ad } x_{-\alpha})(v_{-\mu_i})$ est dans $S'_n(\mathfrak{p})$, les autres termes étant dans $S^{n-1}(\mathfrak{p})$, puisque la filtration de $S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)$ induite de celle de $S(\mathfrak{p})$ définie dans 4.2.1 est invariante par l'action adjointe de $\mathfrak{n}_{\pi'}^-$. Comme $S'_n(\mathfrak{p}) \cap S^{n-1}(\mathfrak{p}) = \{0\}$, on en déduit que $\sum_{i=1}^t e_i (\text{ad } x_{-\alpha})(v_{-\mu_i}) = 0$. Or, pour tout $1 \leq i \leq t$, les e_i sont dans $S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)$ et linéairement indépendants et $(\text{ad } x_{-\alpha})(v_{-\mu_i}) \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)$ donc $(\text{ad } x_{-\alpha})(v_{-\mu_i}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq t$. La proposition découle alors de l'égalité (15) car les e_i sont de poids ν_i et les $v_{-\mu_i}$ de poids $-\mu_i$ et que l'on a $\nu_i - \mu_i = \delta \in P_{\pi'}^+(\pi)$. \square

4.2.9.

Remarque. – Lorsque $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ (c'est-à-dire lorsque $\pi' = \emptyset$) il est clair que l'on a

$$\text{gr}'(\text{gr}''(\text{Sy}(\mathfrak{b}))) = \text{Sy}(\mathfrak{b}) = S^J.$$

5. Description de la borne supérieure de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$

On fixe encore dans cette partie un sous-ensemble π' de π . On va montrer que, pour un certain sous-espace supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp , l'algèbre S^J (voir 4.2.8) est une algèbre de polynômes ayant le même nombre de générateurs que le semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} . Pour montrer cela, les plus grosses difficultés techniques surgissent lorsque $\mathfrak{h}^\perp \neq \{0\}$.

5.1. Rappelons la notation \mathcal{B}_π et $\mathcal{B}_{\pi'}$ de 3.1.1. On note $\Omega(S^J)$ l'ensemble des poids de S^J et pour $\delta \in \Omega(S^J)$, on pose $\mathcal{B}^\delta := \{\nu \in \mathcal{B}_\pi \mid \nu - \delta \in \mathcal{B}_{\pi'}\}$. Pour $\delta \in \Omega(S^J)$ et $\nu \in \mathcal{B}^\delta$, on pose $S_\delta^{J,\nu} := m(S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^J)^\nu \otimes S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\nu+\delta}^{\pi'})$. Alors le sous-espace S_δ^J de poids δ de S^J vérifie $S_\delta^J = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{B}^\delta} S_\delta^{J,\nu}$. Par conséquent $S^J = \bigoplus_{\delta \in \Omega(S^J)} \bigoplus_{\nu \in \mathcal{B}^\delta} S_\delta^{J,\nu}$.

Dans les sections 5.2 et 5.3, on fixe $\delta \in \Omega(S^J)$ et $\nu \in \mathcal{B}^\delta$, afin de calculer la dimension de l'espace vectoriel $S_\delta^{J,\nu}$ (voir corollaire 5.4.1), pour un certain sous-espace vectoriel supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp . Ceci va nous permettre d'en déduire qu'alors S^J est une algèbre de polynômes (voir corollaire 5.4.2). Comme $(\delta, \pi')_\pi = 0$, que $\mathcal{B}_\pi \subset P(\pi)$ et $\mathcal{B}_{\pi'} \subset P(\pi')$, la projection ν' de ν sur $P(\pi')$ définie en 2.5 est donnée par $\nu' = \nu - \delta$. Donc on peut appliquer la proposition 3.2.11. D'après cette proposition, pour tout $\Gamma \in \Pi$, il existe un unique $n_\Gamma \in \varepsilon_\Gamma^\pi \mathbb{N}$ tel que $n_\Gamma = n_{w_\pi(\Gamma)}$ et $\nu = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle w_\pi \rangle} n_\Gamma (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)})$.

5.2. Calcul de la dimension de l'espace vectoriel $S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^I)^\nu$

5.2.1. Rappelons les notations de 3.1.3 et 3.2.7 et posons, pour tout $\Gamma \in \Pi$, $a_\Gamma^\pi := \prod_{\gamma \in \Gamma} (a_{\rho_\gamma^\pi})^{\varepsilon_\Gamma^\pi}$, $\Gamma^{w_\pi} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma = w_\pi(\gamma)\}$ et $\Gamma_{w_\pi} := (\Gamma \setminus \Gamma^{w_\pi}) / \langle w_\pi \rangle$ si $\Gamma \in \Pi_2$ et $\Gamma_{w_\pi} := \Gamma$ si $\Gamma \in \Pi_1$. Rappelons que $\rho_\gamma^\pi = \rho_{w_\pi(\gamma)}^\pi$, pour tout $\gamma \in \pi$.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi$. Alors l'élément a_Γ^π appartient à $Y(\mathfrak{n})$ et son poids est égal à $\varepsilon_\Gamma^\pi (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)})$. De plus $a_\Gamma^\pi = a_{w_\pi(\Gamma)}^\pi$.

Preuve. – Les deux dernières assertions sont claires, ainsi que la première lorsque $\varepsilon_\Gamma^\pi = 1$. Supposons que $\varepsilon_\Gamma^\pi = \frac{1}{2}$. Alors $\Gamma \in \Pi_2$ et $d_\Gamma \in \mathcal{B}_\pi$ et d'après le lemme 3.2.9 pour tout $\gamma \in \Gamma^{w_\pi}$ on a $\varepsilon_\gamma^\pi = \frac{1}{2}$. Donc, dans ce cas,

$$\begin{aligned} a_\Gamma^\pi &= \prod_{\gamma \in \Gamma^{w_\pi}} a_{\rho_\gamma^\pi} \prod_{\gamma \in \Gamma_{w_\pi}} a_{\rho_\gamma^\pi}^{1/2} a_{\rho_{w_\pi(\gamma)}^\pi}^{1/2} \\ &= \prod_{\gamma \in \Gamma^{w_\pi} \cup \Gamma_{w_\pi}} a_{\rho_\gamma^\pi} \end{aligned}$$

car $\rho_\gamma^\pi = \rho_{w_\pi(\gamma)}^\pi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et donc on a bien $a_\Gamma^\pi \in Y(\mathfrak{n})$. \square

5.2.2. Rappelons les notations de la section 2.6 et, pour $\Gamma \in \Pi$, posons $\mathfrak{h}_\Gamma := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_{w_\pi}} \mathbb{C}h_\pi(\gamma)$. Remarquons que, pour tout $\Gamma \in \Pi$, $\mathfrak{h}_\Gamma = \mathfrak{h}_{w_\pi(\Gamma)}$. De plus, pour $\Gamma \in \Pi_2^*$, on a $\mathfrak{h}_\Gamma = \{0\}$ car, dans ce cas, $\Gamma = \Gamma_\alpha = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ et $\alpha = w_\pi(\alpha)$, d'où $\Gamma_{w_\pi} = \emptyset$. Enfin, pour $\Gamma \in \Pi_1^*$, on a $\Gamma = \Gamma_\alpha = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ tel que $w_\pi(\alpha) \in \pi \setminus \pi'$ et $w_\pi(\alpha) \neq \alpha$ et, dans ce cas, $\mathfrak{h}_\Gamma = \mathbb{C}h_\pi(\alpha)$.

LEMME. – On a

$$\left(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma \right) \cap \mathfrak{h}^I = \bigoplus_{\Gamma \in \Pi_1^* / \langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma.$$

Preuve. – Soit $h \in \left(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma \right) \cap \mathfrak{h}^I$, $h = \sum_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*) / \langle w_\pi \rangle} \sum_{\gamma \in \Gamma_{w_\pi}} k_\Gamma^\gamma h_\pi(\gamma)$ avec $k_\Gamma^\gamma \in \mathbb{C}$ pour tout $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*) / \langle w_\pi \rangle$ et $\gamma \in \Gamma_{w_\pi}$.

Pour tout $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*) / \langle w_\pi \rangle$, et tout $\gamma \in \Gamma \cup w_\pi(\Gamma)$, posons

$$l_\Gamma^\gamma := \begin{cases} \frac{(\gamma, \gamma)_\pi}{2} k_\Gamma^\gamma & \text{si } \gamma \in \Gamma_{w_\pi}, \\ -\frac{(\gamma, \gamma)_\pi}{2} k_\Gamma^{w_\pi(\gamma)} & \text{si } \gamma \in w_\pi(\Gamma_{w_\pi}), \\ 0 & \text{si } \gamma \in \Gamma^{w_\pi}. \end{cases}$$

Remarquons que pour tout $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*)/\langle w_\pi \rangle$ et tout $\gamma \in \Gamma \cup w_\pi(\Gamma)$, on a $l_\Gamma^{w_\pi(\gamma)} = -l_\Gamma^\gamma$ et $\langle h, \gamma \rangle = l_\Gamma^\gamma$.

Pour tout $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*)/\langle w_\pi \rangle$ et tout $\gamma \in \Gamma_{w_\pi} \cap \pi'$, on a $\langle h, \gamma \rangle = 0$ puisque $h \in \mathfrak{h}^1$ et donc $k_\Gamma^\gamma = 0$, ce qui donne la nullité de tous les k_Γ^γ , $\gamma \in \Gamma_{w_\pi}$, lorsque $\Gamma \in \Pi'$. Si $\Gamma \in (\Pi'' \setminus \Pi^*)/\langle w_\pi \rangle$, alors $\Gamma = \Gamma_\alpha$ avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ tel que $w_\pi(\alpha) \in \pi'$ donc on a encore $\langle h, w_\pi(\alpha) \rangle = 0 = l_\Gamma^{w_\pi(\alpha)}$. D'autre part, si $\gamma \in \Gamma_{w_\pi} \setminus \{\alpha, w_\pi(\alpha)\}$, on a $\gamma \in \pi'$. Ceci prouve encore une fois la nullité de tous les k_Γ^γ , $\gamma \in \Gamma_{w_\pi}$, dans ce cas. Finalement on obtient donc

$$h = \sum_{\Gamma \in \Pi_1^*/\langle w_\pi \rangle} \sum_{\gamma \in \Gamma_{w_\pi}} k_\Gamma^\gamma h_\pi(\gamma) \in \bigoplus_{\Gamma \in \Pi_1^*/\langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma.$$

Réciproquement pour tout $\Gamma \in \Pi_1^*$, on a $\Gamma = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$, $\alpha \neq w_\pi(\alpha)$ et $w_\pi(\alpha) \notin \pi'$. Donc on a $\mathfrak{h}_\Gamma = \mathbb{C}h_\pi(\alpha) \subset \mathfrak{h}^1$. \square

5.2.3. Rappelons que $\nu = \sum_{\Gamma \in \Pi/\langle w_\pi \rangle} n_\Gamma (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)})$ où $n_\Gamma = \varepsilon_\Gamma^\pi k_\Gamma$ avec $k_\Gamma \in \mathbb{N}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$. (En particulier pour $\Gamma \in \Pi_1$ on a $k_\Gamma = n_\Gamma$.) Pour tout $\Gamma \in \Pi$, on pose $c_\Gamma^\pi := \prod_{\gamma \in \Gamma} c_{\rho_\gamma^\pi}^\gamma$ (voir notation de 3.1.3). On pose aussi $a_\nu^\pi := \prod_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_1^*)/\langle w_\pi \rangle} (a_\Gamma^\pi)^{k_\Gamma}$.

COROLLAIRE. – *Le système $(a_\nu^\pi \prod_{\Gamma \in \Pi_1^*/\langle w_\pi \rangle} (a_\Gamma^\pi)^{s_\Gamma} (c_\Gamma^\pi)^{n_\Gamma - s_\Gamma})_{0 \leq s_\Gamma \leq n_\Gamma}$ est une base de l'espace vectoriel $S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)_\nu^n$. Donc*

$$\dim(S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)_\nu^n) = \prod_{\Gamma \in \Pi_1^*/\langle w_\pi \rangle} (n_\Gamma + 1).$$

Preuve. – Les éléments du système ci-dessus sont linéairement indépendants étant donné que les $a_{\rho_\gamma^\pi}$ et les $c_{\rho_\gamma^\pi}^\gamma$, pour $\gamma \in \pi/\langle w_\pi \rangle$, sont algébriquement indépendants. Considérons $S(\mathfrak{b})$ comme l'algèbre graduée $S(\mathfrak{b}) = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} m(S(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{h}^{\otimes s})$ et pour $a \in S(\mathfrak{b})$ notons $\text{gr}_\mathfrak{b}(a)$ le terme de plus haut degré de a dans cette algèbre graduée. Soit $a \in S(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^1)_\nu^n$. Vu le poids de a et la structure de $S(\mathfrak{b})^n$ (voir section 3.1), on a $\text{gr}_\mathfrak{b}(a) = h \prod_{\Gamma \in \Pi/\langle w_\pi \rangle} (a_\Gamma^\pi)^{k_\Gamma}$ où $h \in S(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi_2^*)/\langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma) \cap S(\mathfrak{h}^1)$. Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent pour en déduire que $h \in m(\bigotimes_{\alpha \in \pi_1^*} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}h_\pi(\alpha) \oplus \dots \oplus \mathbb{C}h_\pi(\alpha)^{n_{\Gamma_\alpha}}))$ où

$$\pi_1^* := \bigcup_{\Gamma \in \Pi_1^*/\langle w_\pi \rangle} \Gamma = \{\alpha \in \pi \setminus \pi' \mid w_\pi(\alpha) \notin \pi' \text{ et } w_\pi(\alpha) \neq \alpha\}/\langle w_\pi \rangle. \quad \square$$

5.3. Calcul de la dimension de l'espace vectoriel $S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\nu+\delta}^{n_{\pi'}}$

5.3.1. Soit $\Gamma \in \Pi \setminus \Pi^*$. Grâce au lemme 3.2.2 on obtient l'équivalence

$$[\Gamma \cap \pi' = w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')] \iff \Gamma = w_\pi(\Gamma).$$

On pose $\Gamma^{w_{\pi'}} := \{\gamma \in \Gamma \cap \pi' \mid \gamma = w_{\pi'}(\gamma)\}$ et $\Gamma_{w_{\pi'}} := ((\Gamma \cap \pi') \setminus \Gamma^{w_{\pi'}})/\langle w_{\pi'} \rangle$ si $\Gamma \in \Pi_2 \setminus \Pi_2^*$ et $\Gamma_{w_{\pi'}} := \Gamma \cap \pi'$ si $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$, $\mathfrak{h}_\Gamma^{\pi'} := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_{w_{\pi'}}} \mathbb{C}h_{\pi'}(\gamma)$ et

$$H'_\Gamma := \sum_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} \frac{2}{(\gamma, \gamma)_{\pi'}} h_{\pi'}(\gamma) \in \mathfrak{h}_{\pi'}.$$

LEMME. – Pour tout $\Gamma \in \Pi \setminus \Pi^*$, on a $H'_{w_\pi(\Gamma)} = -H'_\Gamma$.

Preuve. –

$$H'_{w_\pi(\Gamma)} = \sum_{\gamma \in w_\pi(\Gamma) \cap \pi'} \frac{2}{(\gamma, \gamma)_{\pi'}} h_{\pi'}(\gamma) = \sum_{\gamma \in w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')} \frac{2}{(\gamma, \gamma)_{\pi'}} h_{\pi'}(\gamma)$$

par le (iv) du lemme 3.2.2. Or $h_{\pi'}(\gamma) = -h_{\pi'}(w_{\pi'}(\gamma))$ et $(w_{\pi'}(\gamma), w_{\pi'}(\gamma))_{\pi'} = (\gamma, \gamma)_{\pi'}$ pour tout $\gamma \in \pi'$ (voir section 2.6), ce qui donne le lemme. \square

5.3.2. Du lemme précédent découle immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE. – Si $\Gamma \in \Pi_2 \setminus \Pi_2^*$ alors $H'_\Gamma = 0$.

5.3.3.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$.

- (i) $\langle H'_\Gamma, \gamma \rangle = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma \cap \pi'$.
- (ii) $\langle H'_\Gamma, \gamma \rangle = 0$ pour tout $\gamma \in \pi' \setminus ((\Gamma \cup w_\pi(\Gamma)) \cap \pi')$.

Preuve. – Dans ce cas, si $\gamma \in \Gamma \cap \pi'$, alors $w_{\pi'}(\gamma) \notin \Gamma \cap \pi'$ de sorte que l'on a

$$\frac{(\gamma, \gamma)_{\pi'}}{2} \langle H'_\Gamma, \gamma \rangle = \langle h_{\pi'}(\gamma), \gamma \rangle = \langle \mathcal{H}_{\pi'}^{-1}(\varpi_\gamma^{\pi'}), \gamma \rangle = (\varpi_\gamma^{\pi'}, \gamma)_{\pi'} = \frac{(\gamma, \gamma)_{\pi'}}{2}.$$

La deuxième partie est évidente. \square

5.3.4. Des lemmes 5.3.1 et 5.3.3 on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. – Pour tout $\Gamma \in \Pi \setminus \Pi^*$, on a $\langle H'_\Gamma, \gamma + w_\pi(\gamma) \rangle = 0$ pour tout $\gamma \in \pi'$ tel que $w_\pi(\gamma) \in \pi'$.

5.3.5.

COROLLAIRE. –

- (i) Pour tout $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$, il existe $H''_\Gamma \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ tel que $H''_\Gamma = -H''_{w_\pi(\Gamma)}$ et $H_\Gamma := H'_\Gamma + H''_\Gamma \in \mathfrak{h}^\perp$.
- (ii) Les H_Γ , pour $\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle$, sont linéairement indépendants.
- (iii) $(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathbb{C} H_\Gamma) \cap \mathfrak{h}^\perp = \{0\}$.

Preuve. – Pour $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$, soit $k_\Gamma^\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \pi$, tels que

$$\frac{(\gamma, \gamma)_\pi}{2} (k_\Gamma^\gamma + k_\Gamma^{w_\pi(\gamma)}) = -\langle H'_\Gamma, \gamma + w_\pi(\gamma) \rangle.$$

D'après le corollaire 5.3.4 on peut supposer que $k_\Gamma^\gamma = 0$ si $\gamma \in \pi'$ et, d'après le lemme 5.3.1, que $k_\Gamma^\gamma = -k_{w_\pi(\Gamma)}^\gamma$ pour tout $\gamma \in \pi$. Puis $H''_\Gamma := \sum_{\gamma \in \pi} k_\Gamma^\gamma \mathcal{H}_\pi^{-1}(\varpi_\gamma^\pi) \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ et $H''_{w_\pi(\Gamma)} = -H''_\Gamma$. Par construction $H'_\Gamma + H''_\Gamma$ s'annule sur $\gamma + w_\pi(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \pi$, donc appartient à \mathfrak{h}^\perp , d'après la dernière équivalence de la section 2.6.

D'autre part supposons que la somme $\sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} k_\Gamma H_\Gamma$, $k_\Gamma \in \mathbb{C}$, s'annule sur π' . Soient $\Gamma_0 \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle$ et $\gamma \in \Gamma_0 \cap \pi'$. Comme $H''_{\Gamma_0} \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$, il résulte du lemme 5.3.3 que $\sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} \langle k_\Gamma H_\Gamma, \gamma \rangle = k_{\Gamma_0} = 0$, ce qui établit (ii) et (iii). \square

Remarques et définitions. – Pour tout $\Gamma_\gamma \in \Pi_1^*$, on pose $H_{\Gamma_\gamma} := h_\pi(\gamma)$. Si $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$, alors la décomposition $H_\Gamma = H'_\Gamma + H''_\Gamma$ ci-dessus n'est rien d'autre (à l'image par \mathcal{H}_π près) que celle définie par 2.5(1). De plus $H'_\Gamma \in \mathfrak{h}_{\pi'}$ est uniquement déterminé par les conditions dans les conclusions du lemme 5.3.3 et du corollaire 5.3.4. De même $H''_\Gamma \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ est uniquement déterminé par les conditions dans la conclusion du corollaire 5.3.5 (i) à des sommes de multiples des H_{Γ_γ} , $\Gamma_\gamma \in \Pi_1^*$, près. Un choix particulier qu'on utilise en [10] est $H_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_\pi(\gamma)$, $\Gamma \in \Pi_1$, qui satisfait aux conditions ci-dessus (à un scalaire près). Cela vu, on pose $\mathfrak{h}_\Pi := \sum_{\Gamma \in \Pi_1} \mathbb{C}H_\Gamma + \mathfrak{h}_{\pi'}$ et $\mathfrak{p}_\Pi := \mathfrak{h}_\Pi + \mathfrak{p}'$.

5.3.6. *Compte tenu du corollaire précédent, on définit désormais \mathfrak{h}^J comme un sous-espace vectoriel supplémentaire de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp contenant l'espace vectoriel $\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathbb{C}H_\Gamma$.*

LEMME. – *On a l'inclusion*

$$\left(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma^{\pi'} \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} \right) \cap \mathfrak{h}^\perp \subset \bigoplus_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathbb{C}H'_\Gamma \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}.$$

Preuve. – Soit $h = \sum_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle} \sum_{\gamma \in \Gamma_{w_{\pi'}}} k_\Gamma^\gamma h_{\pi'}(\gamma) + h'$ où, pour tous $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle$ et $\gamma \in \Gamma_{w_{\pi'}}$, $k_\Gamma^\gamma \in \mathbb{C}$ et $h' \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$. Supposons de plus que $h \in \mathfrak{h}^\perp$.

Pour tout $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle$, et tout $\gamma \in (\Gamma \cap \pi') \cup w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')$, posons

$$l_\Gamma^\gamma = \begin{cases} \frac{(\gamma, \gamma)_{\pi'}}{2} k_\Gamma^\gamma & \text{si } \gamma \in \Gamma_{w_{\pi'}}, \\ -\frac{(\gamma, \gamma)_{\pi'}}{2} k_\Gamma^{w_{\pi'}(\gamma)} & \text{si } \gamma \in w_{\pi'}(\Gamma_{w_{\pi'}}), \\ 0 & \text{si } \gamma \in \Gamma^{w_{\pi'}}. \end{cases}$$

Remarquons que, pour $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle$ et pour tout $\gamma \in (\Gamma \cap \pi') \cup w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')$, on a

$$(16) \quad l_\Gamma^{w_{\pi'}(\gamma)} = -l_\Gamma^\gamma$$

et

$$(17) \quad \langle h, \gamma \rangle = l_\Gamma^\gamma.$$

Comme de plus $h \in \mathfrak{h}^\perp$ on a $\langle h, \gamma + w_\pi(\gamma) \rangle = 0$ pour tout $\gamma \in \pi$ (voir section 2.6). Donc, pour tout $\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle$ et tout $\gamma \in \Gamma \cap \pi'$ tel que $w_\pi(\gamma) \in w_\pi(\Gamma) \cap \pi' = w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')$ (voir lemme 3.2.2), on a

$$(18) \quad l_\Gamma^\gamma + l_\Gamma^{w_\pi(\gamma)} = 0$$

par l'égalité (17), d'où

$$(19) \quad l_\Gamma^\gamma - l_\Gamma^{w_{\pi'} w_\pi(\gamma)} = 0$$

par l'égalité (16).

Fixons maintenant $\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle$. Dans ce cas $\Gamma_{w_{\pi'}} = \Gamma \cap \pi'$ et, de l'égalité (19), on déduit par récurrence que, pour tous γ et δ dans $\Gamma \cap \pi'$, on a $\frac{(\gamma, \gamma)_{\pi'}}{2} k_\Gamma^\gamma = \frac{(\delta, \delta)_{\pi'}}{2} k_\Gamma^\delta$ et donc $\sum_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} k_\Gamma^\gamma h_{\pi'}(\gamma) \in \mathbb{C}H'_\Gamma$.

Fixons ensuite $\Gamma \in \Pi_2 \setminus \Pi_2^*$. Compte tenu du lemme 3.2.4 et du fait que $\Gamma \cap \pi' \neq \emptyset$, (puisque $\Gamma \notin \Pi^*$) il existe $\gamma_0 \in \Gamma \cap \pi'$ tel que $w_{\pi'}(\gamma_0) = \gamma_0$ ou $w_\pi(\gamma_0) = \gamma_0$. D'après (18) ou par définition de l_Γ^γ , on a donc $l_\Gamma^{\gamma_0} = 0$. Pour $s \in \mathbb{N}$ posons $\gamma_s := (w_{\pi'} w_\pi)^s(\gamma_0)$. D'après le lemme 3.2.5, il

existe $r_\Gamma \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Gamma = \{\gamma_s\}_{s=0}^{r_\Gamma-1}$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_s \in \pi'$ et $\gamma_{s+1} \in \pi'$ on déduit donc de l'égalité (19) que

$$(20) \quad l_\Gamma^{\gamma_s} = l_\Gamma^{\gamma_{s+1}}.$$

De plus $\Gamma \subset \pi'$ si $\Gamma \in \Pi'_2$ et, si $\Gamma \in \Pi''_2 \setminus \Pi^*_2$, on a $\Gamma = \Gamma_\alpha$ avec $\alpha \in \pi \setminus \pi'$ et $\Gamma \cap \pi' = \{\gamma_s\}_{0 \leq s \leq r_\Gamma-1, s \neq r_0}$ où $r_0 = r_\Gamma - s_0$ avec $s_0 \in \{1, \dots, r_\Gamma - 1\}$ tel que $\gamma_0 = (\tilde{w}_{\pi'} w_\pi)^{s_0}(\alpha)$.

L'égalité (20) permet de déduire par récurrence croissante sur s , pour $\Gamma \in \Pi'_2$ ou, pour $\Gamma \in \Pi''_2 \setminus \Pi^*_2$, si $s \leq r_0 - 1$, et décroissante sur s pour $\Gamma \in \Pi''_2 \setminus \Pi^*_2$ et $r_\Gamma - 1 \geq s \geq r_0 + 1$, que l'on a $l_\Gamma^{\gamma_s} = 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq r_\Gamma - 1$, pour $\Gamma \in \Pi'_2$, ou pour tout $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq r_\Gamma - 1$, $s \neq r_0$, pour $\Gamma \in \Pi''_2 \setminus \Pi^*_2$, car $l_\Gamma^{\gamma_0} = 0$. Donc $k_\Gamma^\gamma = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{w_\pi}$. \square

5.3.7.

COROLLAIRE. – On a l'égalité

$$\left(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma^{\pi'} \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} \right) \cap \mathfrak{h}^J = \bigoplus_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathbb{C} H_\Gamma.$$

Preuve. – Considérons $h \in (\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathfrak{h}_\Gamma^{\pi'} \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}) \cap \mathfrak{h}^J$. Comme $\mathfrak{h}^J \subset \mathfrak{h}^\perp$, en appliquant le lemme 5.3.6, on obtient $h \in \bigoplus_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} \mathbb{C} H'_\Gamma \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$. Donc il existe $h' \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ et pour tout $\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle$ il existe $k_\Gamma \in \mathbb{C}$ tels que $h = \sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} k_\Gamma H'_\Gamma + h'$. Alors

$$h' - \sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} k_\Gamma H''_\Gamma = h - \sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} k_\Gamma H_\Gamma$$

donc $h' - \sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} k_\Gamma H''_\Gamma \in \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} \cap \mathfrak{h}^J$, car h' et les H''_Γ sont dans $\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}$ d'une part, et d'autre part h et les H_Γ sont dans \mathfrak{h}^J . Par conséquent $h' - \sum_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle} k_\Gamma H''_\Gamma \in \mathfrak{h}^I \cap \mathfrak{h}^J = \{0\}$, car $\mathfrak{h}^I = \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'} \cap \mathfrak{h}^\perp$, d'où l'inclusion \subset . L'inclusion réciproque est évidente, vu le choix fait ci-dessus pour le sous-espace supplémentaire \mathfrak{h}^J de \mathfrak{h}^I dans \mathfrak{h}^\perp et la définition des H_Γ (voir corollaire 5.3.5). \square

5.3.8. Rappelons les notations de 3.1.4 et 3.2.7 et posons, pour tout $\Gamma \in \Pi \setminus \Pi^*$, $a_\Gamma^{-\pi'} := \prod_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} (a_{-\rho_\gamma^{\pi'}})^{\varepsilon_\Gamma^\pi}$.

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi \setminus \Pi^*$. Alors l'élément $a_\Gamma^{-\pi'}$ appartient à $Y(\mathfrak{n}_\pi^-)$ et son poids est égal à $-\varepsilon_\Gamma^\pi (d'_\Gamma + d'_{w_\pi(\Gamma)})$ où d'_Γ , resp. $d'_{w_\pi(\Gamma)}$, est la projection sur $\mathfrak{P}(\pi')$ définie en 2.5 de d_Γ , resp. de $d_{w_\pi(\Gamma)}$. De plus $a_\Gamma^{-\pi'} = a_{w_\pi(\Gamma)}^{-\pi'}$.

Preuve. – Supposons que $\varepsilon_\Gamma^\pi = \frac{1}{2}$. Alors $\Gamma \in \Pi_2$ et $d'_\Gamma \in \mathcal{B}_{\pi'}$ et d'après le lemme 3.2.10 pour tout $\gamma \in \Gamma^{w_{\pi'}}$ on a $\varepsilon_\gamma^{\pi'} = \frac{1}{2}$. Donc dans ce cas

$$a_\Gamma^{-\pi'} = \prod_{\gamma \in \Gamma^{w_{\pi'}}} a_{-\rho_\gamma^{\pi'}} \prod_{\gamma \in \Gamma_{w_{\pi'}}} a_{-\rho_\gamma^{\pi'}}^{1/2} a_{-\rho_{w_{\pi'}(\gamma)}^{\pi'}}^{1/2} = \prod_{\gamma \in \Gamma^{w_{\pi'}} \cup \Gamma_{w_{\pi'}}} a_{-\rho_\gamma^{\pi'}}$$

car $\rho_\gamma^{\pi'} = \rho_{w_{\pi'}(\gamma)}^{\pi'}$ pour tout $\gamma \in \Gamma \cap \pi'$ et donc on a bien $a_\Gamma^{-\pi'} \in Y(\mathfrak{n}_\pi^-)$. Pour montrer les deux dernières assertions il suffit d'utiliser encore l'égalité $\rho_\gamma^{\pi'} = \rho_{w_{\pi'}(\gamma)}^{\pi'}$, pour tout $\gamma \in \pi'$ ainsi que $w_\pi(\Gamma) \cap \pi' = w_{\pi'}(\Gamma \cap \pi')$, d'après le (iv) du lemme 3.2.2. \square

5.3.9. Rappelons encore les notations de 3.1.4. Pour $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$ on pose

$$c_{\Gamma}^{-\pi'} = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} \frac{2}{(\gamma, \gamma)_{\pi'}} c_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}^{\gamma} \left(\prod_{\beta \in \Gamma \cap \pi', \beta \neq \gamma} a_{-\rho_{\beta}^{\pi'}} \right) + a_{\Gamma}^{-\pi'} H_{\Gamma}''.$$

LEMME. – Soit $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$. Alors $c_{\Gamma}^{-\pi'} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-d'_{\Gamma} - d'_{w_{\pi}(\Gamma)}}^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$. De plus $c_{\Gamma}^{-\pi'} = -c_{w_{\pi}(\Gamma)}^{-\pi'}$.

Preuve. – Grâce à la définition des $c_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}^{\gamma}$ (voir section 3.1.4) et des H_{Γ} (voir corollaire 5.3.5), on a

$$(21) \quad c_{\Gamma}^{-\pi'} = a_{\Gamma}^{-\pi'} H_{\Gamma} + \sum_{\gamma \in \Gamma \cap \pi'} \frac{2}{(\gamma, \gamma)_{\pi'}} b_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}^{\gamma} \left(\prod_{\beta \in \Gamma \cap \pi', \beta \neq \gamma} a_{-\rho_{\beta}^{\pi'}} \right).$$

Donc $c_{\Gamma}^{-\pi'} \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-d'_{\Gamma} - d'_{w_{\pi}(\Gamma)}}^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$. De plus $c_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}^{\gamma} = -c_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}^{w_{\pi'}(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \pi'$ et $H_{\Gamma}'' = -H_{w_{\pi}(\Gamma)}''$. D'où la dernière assertion. \square

5.3.10. Rappelons que $\nu = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle w_{\pi} \rangle} n_{\Gamma} (d_{\Gamma} + d_{w_{\pi}(\Gamma)})$ où $n_{\Gamma} = \varepsilon_{\Gamma}^{\pi} k_{\Gamma}$ avec $k_{\Gamma} \in \mathbb{N}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$ (en particulier pour $\Gamma \in \Pi_1$ on a $k_{\Gamma} = n_{\Gamma}$) et que $-\nu + \delta = -\nu' = -\sum_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_{\pi} \rangle} n_{\Gamma} (d'_{\Gamma} + d'_{w_{\pi}(\Gamma)})$. On pose $a_{\nu}^{-\pi'} := \prod_{\Gamma \in \Pi_2 \setminus \Pi_2^*} (a_{\Gamma}^{-\pi'})^{k_{\Gamma}}$.

COROLLAIRE. – Le système $(a_{\nu}^{-\pi'} \prod_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_{\pi} \rangle} (a_{\Gamma}^{-\pi'})^{s_{\Gamma}} (c_{\Gamma}^{-\pi'})^{n_{\Gamma} - s_{\Gamma}})_{0 \leq s_{\Gamma} \leq n_{\Gamma}}$ est une base de l'espace vectoriel $S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\nu + \delta}^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$.

Donc $\dim(S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\nu + \delta}^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}) = \prod_{\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_{\pi} \rangle} (n_{\Gamma} + 1)$.

Preuve. – La preuve est analogue à celle du corollaire 5.2.3. Déjà les éléments du système ci-dessus sont linéairement indépendants puisque les $a_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}$ et les $c_{-\rho_{\gamma}^{\pi'}}^{\gamma}$, pour $\gamma \in \pi' / \langle w_{\pi'} \rangle$, $\gamma \neq w_{\pi'}(\gamma)$, sont algébriquement indépendants. Considérons $S(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-)$ comme l'algèbre graduée $S(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-) = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} m(S(\mathfrak{n}_{\pi'}^-) \otimes \mathfrak{h}^{\otimes s})$ et pour $a \in S(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-)$ notons $\text{gr}_{\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-}^{\nu'}(a)$ le terme de plus haut degré de a dans cette algèbre graduée. Soit $a \in S(\mathfrak{n}_{\pi'}^- \oplus \mathfrak{h}^J)_{-\nu + \delta}^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$. Vu le poids de a et la structure de $S(\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-)^{\mathfrak{n}_{\pi'}^-}$ (voir la section 3.1.4), on a $\text{gr}_{\check{\mathfrak{b}}_{\pi'}^-}^{\nu'}(a) = h \prod_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_{\pi} \rangle} (a_{\Gamma}^{-\pi'})^{k_{\Gamma}}$ où $h \in S(\bigoplus_{\Gamma \in (\Pi \setminus \Pi^*) / \langle w_{\pi} \rangle} \mathfrak{h}_{\Gamma}^{\pi'} \oplus \mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'}) \cap S(\mathfrak{h}^J)$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 5.3.7 et l'égalité (21). \square

5.4. Conséquences

5.4.1.

COROLLAIRE. – Soient $\delta \in \Omega(S^J)$ et $\nu \in \mathcal{B}^{\delta}$. On a

- (i) $\nu = \sum_{\Gamma \in \Pi / \langle w_{\pi} \rangle} n_{\Gamma} (d_{\Gamma} + d_{w_{\pi}(\Gamma)})$ avec $n_{\Gamma} \in \varepsilon_{\Gamma}^{\pi} \mathbb{N}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$.
- (ii) $\dim(S_{\delta}^{J, \nu}) = \prod_{\Gamma \in \Pi_1 / \langle w_{\pi} \rangle} (n_{\Gamma} + 1)$.
- (iii) $\dim(S_{\delta}^{J, \nu}) = \text{Card}\{\lambda \in \mathcal{D}_{\varepsilon^{\pi}}^{\pi'} \mid \nu = \lambda - w_0^{\pi} \lambda \text{ et } \nu - \delta = \lambda - w_0^{\pi'} \lambda\}$.

Preuve. – La forme de ν résulte de la proposition 3.2.11. La première égalité pour $\dim(S_{\delta}^{J, \nu})$ découle des corollaires 5.2.3 et 5.3.10 et la deuxième égalité, de la proposition 3.2.11 et du fait que $\nu' = \nu - \delta$. \square

5.4.2. Rappelons les notations suivantes. Pour $\lambda \in P(\pi)$, on note λ' sa projection dans $P(\pi')$ par la décomposition (1) de 2.5. De plus les ensembles Π , Π_1 , Π_2 , Π_1^* et Π_2^* ont été définis dans 3.2.1 et 3.2.3. L'ensemble $\mathcal{D}^{\pi'}$ a été défini dans 3.2.7 ainsi que l'élément d_Γ et le nombre ε_Γ^π . Enfin les éléments a_Γ^π , c_Γ^π , $a_\Gamma^{-\pi'}$ et $c_\Gamma^{-\pi'}$ ont été définis resp. dans 5.2.1, 5.2.3, 5.3.8 et 5.3.9.

COROLLAIRE. –

- (i) *L'algèbre S^J est une algèbre de polynômes en $\text{Card}(\Pi) = \text{rang}(\mathcal{D}^{\pi'})$ générateurs.*
- (ii) *Les générateurs de l'algèbre S^J sont*
 $a_\Gamma^\pi a_\Gamma^{-\pi'}$, $a_\Gamma^\pi c_\Gamma^{-\pi'}$: $\Gamma \in (\Pi_1 \setminus \Pi_1^*) / \langle w_\pi \rangle$,
 a_Γ^π , c_Γ^π : $\Gamma \in \Pi_1^* / \langle w_\pi \rangle$,
 $a_\Gamma^\pi a_\Gamma^{-\pi'}$: $\Gamma \in \Pi_2 \setminus \Pi_2^*$,
 a_Γ^π : $\Gamma \in \Pi_2^*$.
- (iii) *Les générateurs ci-dessus sont homogènes pour les graduations gr' et gr'' de $S(\mathfrak{p})$ définies dans 4.2.2 et 4.2.6 et ont pour poids $\delta_\Gamma = \varepsilon_\Gamma^\pi (d_\Gamma + d_{w_\pi(\Gamma)} - d'_\Gamma - d'_{w_\pi(\Gamma)}) = \varepsilon_\Gamma^\pi (w_0^{\pi'} d_\Gamma - w_0^\pi d_\Gamma)$.*
- (iv) *Pour la graduation naturelle de $S(\mathfrak{p})$ on a $\deg(c_\Gamma^{-\pi'}) = 1 + \deg(a_\Gamma^{-\pi'})$, pour $\Gamma \in \Pi_1 \setminus \Pi_1^*$ et $\deg(c_\Gamma^\pi) = 1 + \deg(a_\Gamma^\pi)$, pour $\Gamma \in \Pi_1^*$.*
- (v) *\mathfrak{p}_Π est le plus petit sous-espace de \mathfrak{p} contenant \mathfrak{p}' tel que $S^J \subset S(\mathfrak{p}_\Pi)$.*

Preuve. – Le fait que les éléments du (ii) appartiennent à S^J résulte des corollaires 5.2.3 et 5.3.10, leurs poids étant calculés dans les lemmes 5.2.1 et 5.3.8. Ces éléments sont algébriquement indépendants car les a_Γ^π , c_Γ^π , $a_\Gamma^{-\pi'}$, $c_\Gamma^{-\pi'}$ le sont. Ils engendrent S^J tout entier grâce à la valeur de $\dim(S_\delta^{J,\nu})$ donnée par le corollaire 5.4.1. Il résulte des définitions (3.1.3, 5.2.3 et 5.3.9) que $c_\Gamma^{-\pi'}$ (resp. c_Γ^π) est de degré 1 en \mathfrak{h}_Π avec pour terme principal $a_\Gamma^{-\pi'} H_\Gamma$ (resp. $a_\Gamma^\pi H_\Gamma$). On en déduit (iv) et (v). \square

Remarque. – On montre en [10] que $\text{Sy}(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}_\Pi)$.

5.4.3.

COROLLAIRE. – *Supposons π connexe et $\pi' \subsetneq \pi$ (c'est-à-dire \mathfrak{g} simple et $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{g}$). Alors, pour tout $\Gamma \in \Pi$, δ_Γ est un élément non nul de $P_{\pi'}^+(\pi)$. Par conséquent, pour tout $\delta \in \Omega(S^J)$, on a $\dim(S_\delta^J) < \infty$.*

Preuve. – Si π est connexe alors $(\varpi_\alpha, \varpi_\beta)_\pi > 0$, $\forall \alpha, \beta \in \pi$. Donc, pour tout $\beta \in \pi'$, en écrivant $\varpi_\beta - \varpi'_\beta = \sum_{\alpha \in \pi} c_\alpha \alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{Q}$, on obtient $c_\alpha > 0$ si $\alpha \in \pi \setminus \pi'$, car $\varpi'_\beta \in \mathbb{Q}\pi'$. Par conséquent les poids δ_Γ , $\Gamma \in \Pi$, des générateurs de S^J sont des éléments non nuls de $P_{\pi'}^+(\pi)$. D'où l'assertion. \square

6. Une borne inférieure pour $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$

Dans cette partie, on fixe toujours un sous-ensemble π' de π et on considère la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\pi'}$ de \mathfrak{g} définie dans la section 2.4 et $\mathfrak{p}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. On définit sur le dual de Hopf de l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} une filtration, appelée filtration de Kostant. Puis on montre que le gradué associé à la filtration de Kostant induite sur une sous-algèbre d'invariants du dual de Hopf de $U(\mathfrak{g})$ s'injecte en tant qu'algèbre et \mathfrak{h} -module dans l'algèbre $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$. Cette injection n'est en général pas surjective (sauf dans le cas où $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$).

6.1. La filtration de Kostant de $U(\mathfrak{g})^*$

Notons $(U^k(\mathfrak{g}))_{k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}}$ la filtration canonique de l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} (cf. [6, 2.3]) avec $U^{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Rappelons (voir section 2.7) que l'on note $U(\mathfrak{g})^*$ le dual de Hopf de $U(\mathfrak{g})$. On définit l'action coadjointe de \mathfrak{g} sur $U(\mathfrak{g})^*$ – encore appelée action diagonale de \mathfrak{g} sur $U(\mathfrak{g})^*$ – par

$$x \cdot c_{\xi, v} = -({}^t \text{ad } x)(c_{\xi, v}) = c_{\xi, x \cdot v} - c_{\xi, x, v}$$

pour tous $\lambda \in P^+(\pi)$, $\xi \in V(\lambda)^*$ et $v \in V(\lambda)$ et pour tout $x \in \mathfrak{g}$ où l'on pose, avec les notations de la section 2.7, $c_{\xi, v} := c_{\xi, v}^{\pi}$ et $V(\lambda) := V_{\pi}(\lambda)$, le $U(\mathfrak{g})$ -module à gauche simple de plus haut poids λ . De plus l'espace vectoriel dual $V(\lambda)^*$ est muni de l'action naturelle à droite de $U(\mathfrak{g})$ et ${}^t \text{ad } x$ désigne la transposée de l'action adjointe $\text{ad } x$ de x sur $U(\mathfrak{g})$ (voir 2.8).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{F}_K^k(U(\mathfrak{g})^*) := \{f \in U(\mathfrak{g})^* \mid f(U^{k-1}(\mathfrak{g})) = 0\}$. On montre alors aisément le lemme suivant.

LEMME. – $(\mathcal{F}_K^k(U(\mathfrak{g})^*))_{k \in \mathbb{N}}$ est une filtration décroissante, exhaustive et séparée, de l'anneau $U(\mathfrak{g})^*$. De plus cette filtration est invariante par l'action coadjointe de \mathfrak{g} sur $U(\mathfrak{g})^*$.

Preuve. – La première partie du lemme est claire. L'invariance par l'action coadjointe de \mathfrak{g} provient de l'invariance de la filtration canonique de $U(\mathfrak{g})$ par l'action adjointe de \mathfrak{g} . \square

La filtration \mathcal{F}_K ci-dessus sera appelée la *filtration de Kostant* de $U(\mathfrak{g})^*$.

6.2. Pour $k \in \mathbb{N}$ posons $S_k(\mathfrak{g}) := U^k(\mathfrak{g})/U^{k-1}(\mathfrak{g})$. Alors $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S_k(\mathfrak{g})$ n'est autre que l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} , dont la graduation naturelle est donnée par les polynômes homogènes. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit, suivant les idées de Kostant, l'application dite *de Kostant*

$$\begin{aligned} \psi_k : \mathcal{F}_K^k(U(\mathfrak{g})^*) &\longrightarrow S_k(\mathfrak{g})^* \\ f &\longmapsto \psi_k(f) \mid \forall u \in U^k(\mathfrak{g}), \psi_k(f)(u + U^{k-1}(\mathfrak{g})) = f(u) \end{aligned}$$

où $u + U^{k-1}(\mathfrak{g})$ désigne la classe d'équivalence de $u \in U^k(\mathfrak{g})$ dans l'espace quotient $S_k(\mathfrak{g})$. Pour $x \in \mathfrak{g}$, rappelons que nous notons encore $\text{ad } x$ l'unique dérivation de l'algèbre $S(\mathfrak{g})$ qui prolonge la dérivation $\text{ad } x$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} (voir section 2.8). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k(\mathfrak{g})$ est un $U(\mathfrak{g})$ -module pour cette action adjointe de \mathfrak{g} ainsi que $S_k(\mathfrak{g})^*$ pour l'action coadjointe, définie comme ci-dessus par $x \cdot f = -({}^t \text{ad } x)(f)$ pour tous $x \in \mathfrak{g}$ et $f \in S_k(\mathfrak{g})^*$. On vérifie alors aisément le lemme suivant.

LEMME. – *Munissons $\mathcal{F}_K^k(U(\mathfrak{g})^*)$ et $S_k(\mathfrak{g})^*$ de la représentation coadjointe de \mathfrak{g} (voir ci-dessus). Alors l'application ψ_k est un morphisme de $U(\mathfrak{g})$ -modules. De plus $\ker(\psi_k) = \mathcal{F}_K^{k+1}(U(\mathfrak{g})^*)$.*

Preuve. – La première partie provient de la définition de l'action coadjointe. La deuxième partie résulte de la définition de la filtration. \square

6.3. Notons $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{\pi'}$, le radical nilpotent de \mathfrak{p} (voir section 2.4). On pose ${}^{\mathfrak{m}}U(\mathfrak{g})^* := \{f \in U(\mathfrak{g})^* \mid f(U(\mathfrak{g})\mathfrak{m}) = 0\}$. On vérifie sans peine que ${}^{\mathfrak{m}}U(\mathfrak{g})^*$ est un $U(\mathfrak{p})$ -module pour l'action coadjointe de \mathfrak{p} et une \mathbb{C} -algèbre. Rappelons les notations de la section 2.7 et posons, pour $\lambda \in P^+(\pi)$, $C(\lambda) := C_{\pi}(\lambda)$ l'espace des coefficients matriciels du $U(\mathfrak{g})$ -module simple $V(\lambda) = V_{\pi}(\lambda)$ de plus haut poids λ . On note $C_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par $\{c_{\xi, v} \in C(\lambda) \mid \xi \in V(\lambda)^*, v \in V_{\pi'}(\lambda)\}$. Pour l'action coadjointe de \mathfrak{p} , $C_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ est un $U(\mathfrak{p})$ -module.

LEMME. – *On a*

$${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} C_{\mathfrak{p}}(\lambda).$$

Preuve. – On peut également munir $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ de l'action à gauche de \mathfrak{g} définie par $x.c_{\xi,v} := c_{\xi,x.v}$ pour tous $x \in \mathfrak{g}$, $c_{\xi,v} \in C(\lambda)$, $\lambda \in P^+(\pi)$. Par transport de structure ${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ est l'espace des invariants de $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ par l'action à gauche de \mathfrak{m} . Comme $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} C(\lambda)$ et que, pour tout $\lambda \in P^+(\pi)$, $C(\lambda)$ est un $\mathbf{U}(\mathfrak{m})$ -module pour l'action à gauche de \mathfrak{m} , on en déduit que ${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^* = \bigoplus_{\lambda \in P^+(\pi)} {}^mC(\lambda)$ où ${}^mC(\lambda)$ désigne l'espace des invariants de $C(\lambda)$ pour l'action à gauche de \mathfrak{m} . Puis ${}^mC(\lambda) = C_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ résulte du lemme de 2.7. \square

6.4. Munissons ${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ de la filtration $(\mathcal{F}_K^k({}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*))_{k \in \mathbb{N}}$ induite de la filtration de Kostant \mathcal{F}_K de $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ (voir 6.1). Rappelons les notations de 2.4 et en particulier $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}_{\pi'}^-$, la sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} déterminée par le sous-ensemble π' de π et contenant la sous-algèbre de Borel négative \mathfrak{b}^- de \mathfrak{g} . Munissons également l'algèbre enveloppante $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} , resp. $\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)$ de \mathfrak{p}^- , de la filtration induite $(U^k(\mathfrak{p}))_{k \in \mathbb{N}}$, resp. $(U^k(\mathfrak{p}^-))_{k \in \mathbb{N}}$, de la filtration canonique de $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ – remarquons d'ailleurs que cette filtration induite n'est autre que la filtration canonique de $\mathbf{U}(\mathfrak{p})$, resp. $\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $S_k(\mathfrak{p}) := U^k(\mathfrak{p})/U^{k-1}(\mathfrak{p})$ et $S_k(\mathfrak{p}^-) := U^k(\mathfrak{p}^-)/U^{k-1}(\mathfrak{p}^-)$. Alors $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S_k(\mathfrak{p})$ n'est autre que l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} . De même $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S_k(\mathfrak{p}^-) = S(\mathfrak{p}^-)$.

LEMME. – *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\dim({}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*/\mathcal{F}_K^k({}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)) = \dim(U^{k-1}(\mathfrak{p}^-)).$$

Preuve. – L'espace vectoriel ${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ peut être considéré comme un sous-espace du dual $(\mathbf{U}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m})^*$ de l'espace vectoriel quotient $\mathbf{U}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ et $\mathcal{F}_K^k({}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*)$ comme l'orthogonal dans ${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ de l'espace vectoriel quotient $U^{k-1}(\mathfrak{g})/U^{k-2}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ où l'on pose $U^{-2}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Or l'espace vectoriel $U^{k-1}(\mathfrak{g})/U^{k-2}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ est isomorphe à $U^{k-1}(\mathfrak{p}^-)$ puisque l'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}^-$. Pour montrer l'égalité du lemme, il suffira donc de montrer que ${}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$ sépare les éléments de $\mathbf{U}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$. Autrement dit, en notant $u + \mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ la classe d'un élément $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathbf{U}(\mathfrak{g})/\mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$, il suffit de montrer que, si $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ est tel que, pour tout $f \in {}^m\mathbf{U}(\mathfrak{g})^*$, $f(u + \mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}) = f(u) = 0$ alors $u \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$. L'espace $V_{\pi'}^-(\lambda)$ n'est pas un $\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)$ -module mais $V_{\pi'}^-(\lambda) \subset V(\lambda)$ et $V(\lambda)$ est un $\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)$ -module. On note donc, par abus de notation, $\text{Ann}_{\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)}(V_{\pi'}^-(\lambda)) := \{u \in \mathbf{U}(\mathfrak{p}^-) \mid \forall v \in V_{\pi'}^-(\lambda) \ u.v = 0\}$. D'après le lemme 6.3, il suffit donc de montrer que

$$\bigcap_{\lambda \in P^+(\pi)} \text{Ann}_{\mathbf{U}(\mathfrak{p}^-)}(V_{\pi'}^-(\lambda)) = \{0\}.$$

Pour cela on procède de manière analogue à [14, 7.1.9]. Plus précisément, pour tous $\mu \in \mathbb{N}\pi$ et $\nu \in \mathbb{N}\pi'$, on choisit une base $\{y_{-\mu}^i\}_{i \in I_{\mu}}$ de l'espace de poids $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\mu}$ et une base $\{x_{\nu}^j\}_{j \in J_{\nu}}$ de l'espace de poids $\mathbf{U}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-)_{\nu}$. Rappelons que $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\pi'}^-$. Donc, pour tout $a \in \mathbf{U}(\mathfrak{p}^-) \setminus \{0\}$, il existe $F \subset \mathbb{N}\pi$ et $F' \subset \mathbb{N}\pi'$ finis et pour tout $(\mu, \nu) \in F \times F'$ et tout $(i, j) \in I_{\mu} \times J_{\nu}$, il existe $h_{i,j}^{\mu,\nu} \in \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ tels que $a = \sum_{(\mu,\nu) \in F \times F'} \sum_{(i,j) \in I_{\mu} \times J_{\nu}} y_{-\mu}^i h_{i,j}^{\mu,\nu} x_{\nu}^j$. Comme $a \neq 0$, il existe $\eta \in F'$ minimal pour la relation d'ordre dans $\mathfrak{h}_{\pi'}^*$, définie dans 2.7 et pour la propriété $\exists \mu \in F$, $\exists (i, j) \in I_{\mu} \times J_{\eta}$ tels que $h_{i,j}^{\mu,\eta} \neq 0$. Soit $\lambda \in P^+(\pi)$. Rappelons que $V_{\pi'}^-(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_{\pi'}^-).v_{\lambda,\lambda}^{\pi}$, où $v_{\lambda,\lambda}^{\pi}$ est un vecteur de plus haut poids λ du $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ -module simple $V(\lambda) = V_{\pi}(\lambda)$ de plus haut poids λ , et que $V_{\pi'}^-(\lambda)$ est isomorphe comme $\mathbf{U}(\mathfrak{g}_{\pi'})$ -module au $\mathbf{U}(\mathfrak{g}_{\pi'})$ -module simple $V_{\pi'}(\lambda')$ de plus haut poids λ' , où λ' est la projection dans $P(\pi')$ de λ par la décomposition (1) de 2.5. Notons $M_{\pi'}(\lambda')$

le $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$ -module de Verma de plus haut poids λ' , défini par exemple comme dans [14, 4.2.6]. Écrivons $\eta = \sum_{\alpha \in \pi'} k_\alpha \alpha$ où $k_\alpha \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \pi'$. Considérons maintenant $\lambda \in P^+(\pi)$ tel que sa projection $\lambda' \in P^+(\pi')$ par la décomposition (1) de 2.5 soit telle que $\langle \check{\alpha}, \lambda' \rangle = \langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geq k_\alpha$ pour tout $\alpha \in \pi'$. D'après [14, 4.3.6 (ii)], encore valable dans le cas classique, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $M_{\pi'}(\lambda')_{\lambda'-\eta} \xrightarrow{\sim} V_{\pi'}(\lambda')_{\lambda'-\eta} \xrightarrow{\sim} V_{\pi'}^-(\lambda)_{\lambda-\eta}$. De plus on a la décomposition $U(\mathfrak{g}_{\pi'}) = U(\mathfrak{h}_{\pi'}) \oplus (\mathfrak{n}_{\pi'}^- U(\mathfrak{g}_{\pi'}) + U(\mathfrak{g}_{\pi'}) \mathfrak{n}_{\pi'})$ et on note \mathcal{P}' la projection de $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$ sur $U(\mathfrak{h}_{\pi'})$ par cette décomposition. Rappelons que l'on note κ l'anti-automorphisme de Chevalley de $U(\mathfrak{g})$ défini comme dans 2.3. La restriction de κ à $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$ est l'anti-automorphisme de Chevalley de $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$. L'isomorphisme d'espaces vectoriels ci-dessus et la définition du $U(\mathfrak{g}_{\pi'})$ -module simple $V_{\pi'}(\lambda')$ par la forme de Shapovalov définie grâce à \mathcal{P}' de façon analogue au cas quantique (voir [14, 3.4.10]) permettent d'en déduire que, pour $\lambda \in P^+(\pi)$ tel que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geq k_\alpha$ pour tout $\alpha \in \pi'$, on a $\det((\mathcal{P}'(x_\eta^j \kappa(x_\eta^r)))(\lambda'))_{(j,r) \in J_\eta^2} \neq 0$ c'est-à-dire $\det((\mathcal{P}'(x_\eta^j \kappa(x_\eta^r)))(\lambda))_{(j,r) \in J_\eta^2} \neq 0$ où l'on identifie $U(\mathfrak{h}_{\pi'}) = S(\mathfrak{h}_{\pi'})$ avec l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathfrak{h}^* qui s'annulent sur l'espace dual $(\mathfrak{h}^{\pi \setminus \pi'})^*$. Supposons maintenant que $a \in \text{Ann}(V_{\pi'}^-(\lambda))$ pour $\lambda \in P^+(\pi)$ tel que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geq k_\alpha$ pour tout $\alpha \in \pi'$. Alors on a

$$\sum_{(\mu, \nu) \in F \times F'} \sum_{(i, j) \in I_\mu \times J_\nu} y_{-\mu}^i h_{i,j}^{\mu, \nu} x_\nu^j \kappa(x_\eta^r) v_{\lambda, \lambda}^\pi = 0 \quad \forall r \in J_\eta.$$

Or $h_{i,j}^{\mu, \nu} x_\nu^j \kappa(x_\eta^r) v_{\lambda, \lambda}^\pi = 0$ si $\eta \neq \nu$ (car η est minimal parmi les ν tels que $h_{i,j}^{\mu, \nu} \neq 0$) et $x_\nu^j \kappa(x_\eta^r) v_{\lambda, \lambda}^\pi = \mathcal{P}'(x_\eta^j \kappa(x_\eta^r))(\lambda) v_{\lambda, \lambda}^\pi$ si $\eta = \nu$.

Comme $\det((\mathcal{P}'(x_\eta^j \kappa(x_\eta^r)))(\lambda))_{(j,r) \in J_\eta^2} \neq 0$ on en déduit donc que l'on a

$$\sum_{\mu \in F} \sum_{i \in I_\mu} y_{-\mu}^i h_{i,j}^{\mu, \eta}(\lambda) v_{\lambda, \lambda}^\pi = 0 \quad \forall j \in J_\eta.$$

Écrivons, pour tout $\mu \in F$, $\mu = \sum_{\alpha \in \pi} r_\alpha^\mu \alpha$ où $r_\alpha^\mu \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \pi$. Choisissons $\lambda \in P^+(\pi)$ tel que $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geq \max_{\mu \in F} (r_\alpha^\mu)$ pour tout $\alpha \in \pi$ et $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \geq k_\alpha$ pour tout $\alpha \in \pi'$. Alors les $y_{-\mu}^i v_{\lambda, \lambda}^\pi$, $\mu \in F$ et $i \in I_\mu$, sont non nuls et même linéairement indépendants. Par conséquent $\forall j \in J_\eta$, $\forall \mu \in F$, $\forall i \in I_\mu$, $h_{i,j}^{\mu, \eta}(\lambda) = 0$. Posons $\rho := \sum_{\alpha \in \pi} \varpi_\alpha^\pi$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \in J_\eta$, $\forall \mu \in F$, $\forall i \in I_\mu$, $h_{i,j}^{\mu, \eta}(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in N\rho + P^+(\pi)$. Or $N\rho + P^+(\pi)$ est Zariski dense dans \mathfrak{h}^* donc $\forall j \in J_\eta$, $\forall \mu \in F$, $\forall i \in I_\mu$, $h_{i,j}^{\mu, \eta} = 0$ ce qui contredit le choix de η . \square

6.5. Considérons $S(\mathfrak{p}^-)^*$ comme le sous-espace de $S(\mathfrak{g})^*$ formé des formes linéaires sur $S(\mathfrak{g})$ dont la restriction à $S(\mathfrak{g})\mathfrak{m}$ s'annule. Comme \mathfrak{m} est un idéal de \mathfrak{p} , l'espace $S(\mathfrak{p}^-)^*$ muni de l'action coadjointe de \mathfrak{p} est un $U(\mathfrak{p})$ -module. On note $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)$ le gradué de $\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*$ associé à la filtration de Kostant \mathcal{F}_K sur $\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*$. Comme cette filtration est invariante par l'action coadjointe de \mathfrak{p} , l'espace $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)$ muni de l'action de \mathfrak{p} déduite de l'action coadjointe de \mathfrak{p} sur $\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*$ par passage au quotient est un $U(\mathfrak{p})$ -module. Enfin $S(\mathfrak{p})$ muni de l'action adjointe de \mathfrak{p} est aussi un $U(\mathfrak{p})$ -module. On identifie \mathfrak{g} avec \mathfrak{g}^* grâce à la forme de Killing. Puis \mathfrak{p}^{-*} s'identifie avec \mathfrak{p} et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient un isomorphisme j_k de $U(\mathfrak{p})$ -modules de $S_k(\mathfrak{p}^-)^*$ sur $S_k(\mathfrak{p})$.

PROPOSITION. – Soit $k \in \mathbb{N}$.

- (i) La restriction de ψ_k à $\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)$ induit un isomorphisme ψ_k^{00} de $U(\mathfrak{p})$ -modules de $\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)/\mathcal{F}_K^{k+1}(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)$ sur $S_k(\mathfrak{p}^-)^*$ et donc un isomorphisme ψ_k^0 de $U(\mathfrak{p})$ -modules de $\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)/\mathcal{F}_K^{k+1}(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)$ sur $S_k(\mathfrak{p})$.
- (ii) La somme directe $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \psi_k^0$ est un isomorphisme de $U(\mathfrak{p})$ -modules entre $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}U(\mathfrak{g})^*)$ et l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} .

Preuve. – Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p}^-$, on a $S_k(\mathfrak{g}) = S_{k-1}(\mathfrak{g})\mathfrak{m} \oplus S_k(\mathfrak{p}^-)$ et donc, par définition de $\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ et de ψ_k , il vient que $\psi_k(\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)) \subset S_k(\mathfrak{p}^-)^*$. De plus le noyau de la restriction de ψ_k à $\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ est $\ker(\psi_k) \cap \mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^* = \mathcal{F}_K^{k+1}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$. Enfin le lemme 6.4 permet de conclure pour la première partie de la proposition. La deuxième partie résulte de l'isomorphisme j_k ci-dessus. \square

6.6. Ajustons l'application linéaire $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \psi_k^0$ de sorte qu'elle devienne un morphisme d'algèbres. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{\psi}_k := \frac{1}{k!} \psi_k^0$ et $\tilde{\psi} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\psi}_k$.

LEMME. – $\tilde{\psi}$ est un isomorphisme d'algèbres entre $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ et l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{p})$ de \mathfrak{p} .

Preuve. – Soient $f \in \mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ et $g \in \mathcal{F}_K^l(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ ($k, l \in \mathbb{N}$). Alors $fg \in \mathcal{F}_K^{k+l}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$.

On note \bar{f} la classe de f dans l'espace quotient $\mathcal{F}_K^k(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)/\mathcal{F}_K^{k+1}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ et on utilise des notations analogues pour \bar{g} ou \overline{fg} . L'espace vectoriel $S_k(\mathfrak{p}^-)$ est engendré par les puissances k -ièmes des éléments de \mathfrak{p}^- et pour $x \in \mathfrak{p}^-$, on notera indifféremment x^k la puissance k -ième de x vue comme élément de $S_k(\mathfrak{p}^-)$ ou de $U^k(\mathfrak{p}^-)$. Posons $\tilde{\psi}_k^{00} := \frac{1}{k!} \psi_k^{00}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (voir notation de 6.5). Soit $x \in \mathfrak{p}^-$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{k+l}^{00}(\overline{fg})(x^{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} (fg)(x^{k+l}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i f(x^i) g(x^{k+l-i}) \end{aligned}$$

où $C_{k+l}^i = \frac{(k+l)!}{i!(k+l-i)!}$ pour tout $0 \leq i \leq k+l$. Or, pour tout $i \neq k$, on a $f(x^i)g(x^{k+l-i}) = 0$, vu la définition de la filtration de Kostant \mathcal{F}_K . Par conséquent

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{k+l}^{00}(\overline{fg})(x^{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} C_{k+l}^k f(x^k) g(x^l) \\ &= \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} f(x^k) g(x^l) \\ &= \tilde{\psi}_k^{00}(\bar{f})(x^k) \tilde{\psi}_l^{00}(\bar{g})(x^l) \\ &= \frac{k!l!}{(k+l)!} (\tilde{\psi}_k^{00}(\bar{f}) \tilde{\psi}_l^{00}(\bar{g}))(x^{k+l}) \end{aligned}$$

et donc $\tilde{\psi}_{k+l}^{00}(\overline{fg}) = \frac{k!l!}{(k+l)!} \tilde{\psi}_k^{00}(\bar{f}) \tilde{\psi}_l^{00}(\bar{g})$.

On utilise enfin l'isomorphisme j_k introduit en 6.5. Il vérifie $j_{k+l}(\xi\xi') = \frac{(k+l)!}{k!l!} j_k(\xi) j_l(\xi')$ pour tous $\xi \in S_k(\mathfrak{p}^-)^*$ et $\xi' \in S_l(\mathfrak{p}^-)^*$. Enfin $\tilde{\psi}_k = j_k \circ \tilde{\psi}_k^{00}$. D'où le lemme. \square

6.7. Avec la structure de $U(\mathfrak{p})$ -module sur $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ définie dans 6.5, on note $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*))^{\mathfrak{p}'}$ l'algèbre des invariants de $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)$ par l'action de \mathfrak{p}' . De même on note $(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{p}'}$ l'algèbre des invariants de $\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*$ par l'action coadjointe de \mathfrak{p}' . Cette dernière algèbre d'invariants est un $U(\mathfrak{h})$ -module pour l'action coadjointe de \mathfrak{h} et on peut la munir de la filtration de Kostant induite. On note $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{p}'})$ l'algèbre graduée associée. De plus les algèbres d'invariants $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*))^{\mathfrak{p}'}$, $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{p}'})$ et $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ sont des $U(\mathfrak{h})$ -modules (les deux premières pour l'action qui se déduit par passage au quotient de l'action coadjointe de \mathfrak{h} sur $\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*$ et la dernière pour l'action adjointe de \mathfrak{h}). On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION. – $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}((\mathfrak{m}\mathbb{U}(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{p}'})$ s'injecte dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ en tant qu'algèbre et $U(\mathfrak{h})$ -module.

Preuve. – D’après la proposition 6.5 et le lemme 6.6, $\tilde{\psi}$ est un isomorphisme d’algèbres et de $U(\mathfrak{p})$ -modules entre $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}({}^mU(\mathfrak{g})^*)$ et $S(\mathfrak{p})$. Comme de plus $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}({}^mU(\mathfrak{g})^*))^{p'}$ et $S(\mathfrak{p})^{p'}$ sont des $U(\mathfrak{h})$ -modules (pour les actions de \mathfrak{h} mentionnées ci-dessus), il en résulte que l’on a un isomorphisme d’algèbres et de $U(\mathfrak{h})$ -modules entre $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}({}^mU(\mathfrak{g})^*))^{p'}$ et $S(\mathfrak{p})^{p'}$. Comme il s’agit de la filtration induite, $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(({}^mU(\mathfrak{g})^*)^{p'})$ s’injecte en tant qu’algèbre et $U(\mathfrak{h})$ -module dans $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}({}^mU(\mathfrak{g})^*))^{p'}$. \square

6.8. Posons $A := ({}^mU(\mathfrak{g})^*)^{p'}$, $(\mathcal{F}_K^n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration de Kostant induite sur A et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}^n(A) := \mathcal{F}_K^n(A)/\mathcal{F}_K^{n+1}(A)$ et $\text{Sy}_n(\mathfrak{p}) := S_n(\mathfrak{g}) \cap \text{Sy}(\mathfrak{p})$ (où $\text{Sy}(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p})^{p'}$). Pour simplifier les notations, nous noterons encore ψ_n le morphisme injectif de $U(\mathfrak{h})$ -modules de $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}^n(A)$ dans $\text{Sy}_n(\mathfrak{p})$ obtenu par la proposition 6.7 (car il s’obtient naturellement à partir de l’application de Kostant ψ_n définie en 6.2, à un coefficient multiplicatif près et à la composée par une injection canonique près). Nous noterons ensuite $\psi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \psi_n$ le morphisme injectif d’algèbres et de $U(\mathfrak{h})$ -modules obtenu dans cette proposition.

6.9.

Remarque. – Comme \mathfrak{g} est semi-simple, $U(\mathfrak{g})^*$ est somme directe de $U(\mathfrak{g})$ -modules simples et, dans le cas particulier où $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, l’injection ψ de la proposition 6.7 est un isomorphisme. Par contre il n’y a aucune raison de croire que cela est vrai pour un parabolique \mathfrak{p} quelconque. Néanmoins notre résultat principal montre la surjectivité si \mathfrak{g} est de type AC . C’est grâce à l’égalité dans 4.2.8, montrée en 7.2. Sinon la surjectivité est généralement fautive. Par exemple lorsque $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}$, cela correspond au fait que $\mathcal{B} \supsetneq \mathcal{B}^0$ (voir les notations de 1.3).

7. Comparaison des deux bornes

7.1. Rappelons les notations de 6.8. D’après les résultats et notations de 4.2.8 et 6.7 on a

$$(*) \quad \text{gr}'(\text{gr}''(\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A)))) \subset \text{gr}'(\text{gr}''(\text{Sy}(\mathfrak{p}))) \subset S^J.$$

Or, d’après [9, Prop. 3.1], A est une algèbre de polynômes en le même nombre d’indéterminées que l’algèbre de polynômes S^J , qui est aussi le nombre d’indéterminées du semi-centre de l’algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} . De plus les poids des générateurs de A sont égaux à $\frac{1}{\varepsilon^\Gamma} \delta_\Gamma$, pour $\Gamma \in \Pi$ (voir les notations de 5.4.2).

On va en déduire, dans le cas où $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ et \mathfrak{g} simple, que $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ et le semi-centre de l’algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} ont la même dimension de Gelfand–Kirillov, ce qui avait déjà été établi dans [9, Prop. 3.2], mais par une méthode tout à fait différente qui utilisait la théorie des groupes algébriques. Ne sachant pas encore si $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est une algèbre de type fini, on a besoin d’utiliser un résultat pas trop évident de [1] pour montrer que les deux dimensions de Gelfand–Kirillov coïncident.

PROPOSITION. – *Supposons que \mathfrak{g} est simple et que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$. Alors la dimension de Gelfand–Kirillov de $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est égale à celle du semi-centre de l’algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} .*

Preuve. – Rappelons (voir les notations de 4.2.1 et 4.2.6) que $(S^n(\mathfrak{p}))_{n \in \mathbb{N}}$ est la filtration de $S(\mathfrak{p})$ dont la graduation associée est notée gr' et que $(S''^n(\mathfrak{p}))_{n \in \mathbb{N}}$ est la filtration de $S(\mathfrak{p})$ dont la graduation associée est notée gr'' . Comme ces deux filtrations sont croissantes et que $S'^{-1}(\mathfrak{p}) = S''^{-1}(\mathfrak{p}) = \{0\}$, tout sous-espace vectoriel V de $S(\mathfrak{p})$ est isomorphe à son gradué

$\text{gr}'(V)$, resp. $\text{gr}''(V)$, associé à la filtration induite $(S^m(\mathfrak{p}) \cap V)_{n \in \mathbb{N}}$, resp. $(S'^m(\mathfrak{p}) \cap V)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus les filtrations $(S^m(\mathfrak{p}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S'^m(\mathfrak{p}))_{n \in \mathbb{N}}$ sont invariantes par l'action adjointe de \mathfrak{h} et $S(\mathfrak{p})$ est somme directe de ses sous-espaces de poids $S(\mathfrak{p})_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}\pi$. Donc tout sous- \mathfrak{h} -module V de $S(\mathfrak{p})$ est somme directe de ses sous-espaces de poids $V_\nu := S(\mathfrak{p})_\nu \cap V$ et les \mathfrak{h} -modules $\text{gr}'(V)$ et V , resp. $\text{gr}''(V)$ et V sont isomorphes. Notons $\text{gr}'(V)_\nu$, resp. $\text{gr}''(V)_\nu$ le sous-espace de poids ν de $\text{gr}'(V)$, resp. de $\text{gr}''(V)$. Les espaces vectoriels $\text{gr}'(V)_\nu$ et V_ν ainsi que $\text{gr}''(V)_\nu$ et V_ν sont isomorphes.

La filtration de Kostant \mathcal{F}_K de $U(\mathfrak{g})^*$ est décroissante (voir 6.1) et pour tout sous-espace vectoriel V de dimension finie de $U(\mathfrak{g})^*$, il existe $\Lambda \subset P^+(\pi)$ fini tel que $V \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\pi(\lambda)$. Or on démontre facilement, utilisant l'annulateur dans $U(\mathfrak{n}^-)$ d'un vecteur de plus haut poids de $V(\lambda)$ ou dans $U(\mathfrak{n})$ d'un vecteur de plus bas poids de $V(\lambda)^*$ (cf. [14, 6.3.20]), qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\pi(\lambda)) \cap \mathcal{F}_K^n(U(\mathfrak{g})^*) = \{0\}$. Donc $V \cap \mathcal{F}_K^n(U(\mathfrak{g})^*) = \{0\}$. Il existe donc un isomorphisme de l'espace vectoriel V dans l'espace vectoriel gradué $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(V)$ associé à la filtration de Kostant induite sur V . D'autre part A est une algèbre de polynômes en des indéterminées qui sont des vecteurs de poids $\frac{1}{\varepsilon_\Gamma} \delta_\Gamma$, $\Gamma \in \Pi$. Le corollaire 5.4.3 entraîne donc que, lorsque $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ et \mathfrak{g} simple, pour tout poids ν de A , le sous-espace A_ν de poids ν de A est de dimension finie. Comme $A_\nu \subset A$ et que la filtration de Kostant est invariante par l'action coadjointe de \mathfrak{h} , on a une injection de l'espace vectoriel $\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A_\nu)$ dans l'espace vectoriel $(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A))_\nu$. Enfin puisque ψ est une injection de \mathfrak{h} -modules, on a l'égalité $(\psi(\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A)))_\nu = \psi((\text{gr}_{\mathcal{F}_K}(A))_\nu)$. Rappelons également que, lorsque \mathfrak{g} est simple et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$, tout sous-espace S_ν^J de poids ν de S^J est de dimension finie (voir 5.4.3). Par conséquent, d'après les considérations ci-dessus et la double inclusion (*), lorsque \mathfrak{g} est simple et que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$, la dimension d'un sous-espace de poids ν de $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est comprise entre la dimension de A_ν et celle de S_ν^J . Appliquons maintenant [1, Lemme 4.3] et considérons la graduation de A et de S^J constituée par leurs sous-espaces de poids. Comme A et S^J sont des algèbres de polynômes ayant le même nombre N d'indéterminées, la croissance (au sens de [1, Définition 1.6]) de A est égale à celle de S^J . Donc la croissance de la graduation de $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ constituée par ses sous-espaces de poids est égale à celle de A et de S^J . Par conséquent, d'après [1, Lemme 4.3], la dimension de Gelfand–Kirillov de $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est inférieure ou égale à la dimension de Gelfand–Kirillov de cette graduation, c'est-à-dire est inférieure ou égale à N . Enfin comme $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est somme directe de ses sous-espaces de poids et que c'est une sous-algèbre de l'algèbre commutative intègre de type fini $S(\mathfrak{p})$, il résulte de [1, Satz 4.5] que la dimension de Gelfand–Kirillov de $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est égale à N . \square

7.2. D'après le Corollaire 5.4.2, S^J est une algèbre de polynômes en les indéterminées s_Γ , $\Gamma \in \Pi$, de poids δ_Γ . On a vu dans 7.1 que $A = ({}^m U(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{p}'}$ est une algèbre de polynômes en le même nombre d'indéterminées que S^J , mais que les poids des générateurs de A sont égaux à $\frac{1}{\varepsilon_\Gamma} \delta_\Gamma$, pour $\Gamma \in \Pi$, où on rappelle que $\varepsilon_\Gamma^\pi \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Lorsque $\varepsilon_\Gamma^\pi = 1$, $\forall \Gamma \in \Pi$, et lorsque \mathfrak{g} est simple et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$, les caractères formels de A et S^J sont égaux. C'est le cas si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ et \mathfrak{g} simple de type A_l ou C_l . C'est aussi le cas pour d'autres algèbres de Lie simples pour des choix particuliers de \mathfrak{p} . (En utilisant la définition de ε_Γ^π dans 3.2.7, le lecteur infatigable pourrait en dresser la liste.) Par conséquent la double inclusion (*) de 7.1 donne la proposition qui suit.

PROPOSITION. – *Lorsque $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ et \mathfrak{g} simple de type A_l ou C_l , alors le semi-centre de $U(\mathfrak{p})$ est une algèbre de polynômes en le même nombre d'indéterminées que le semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} , avec les mêmes poids.*

Preuve. – D'après la preuve de la proposition 7.1, lorsque \mathfrak{g} est simple et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$, le caractère formel (cf. [14, 3.4.7]) de $A = ({}^m U(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{p}'}$ est inférieur ou égal au caractère formel de $\text{gr}'(\text{gr}''(\text{Sy}(\mathfrak{p})))$, lui-même inférieur ou égal au caractère formel de S^J . De plus dans le cas où \mathfrak{g} est simple de type A_l ou C_l , les caractères formels de A et S^J sont égaux. Par conséquent

$\text{gr}'(\text{gr}''(\text{Sy}(\mathfrak{p}))) = S^J$. On en déduit alors facilement que, si N est le nombre de variables de l'algèbre de polynômes S^J , l'algèbre $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est elle aussi une algèbre de polynômes en N variables. En effet notons $\{s_1, \dots, s_N\}$ un système de générateurs de l'algèbre de polynômes S^J homogènes pour les deux graduations gr' et gr'' de $S(\mathfrak{p})$ donnés par le corollaire 5.4.2. Comme s_i est homogène pour la graduation gr' , il existe $s'_i \in \text{gr}''(\text{Sy}(\mathfrak{p}))$ tel que $\text{gr}'(s'_i) = s_i$. De plus comme s_i est aussi homogène pour la graduation gr'' et que, d'après la preuve de la proposition 4.2.8, pour tout $z_\delta \in \text{Sy}(\mathfrak{p})_\delta \setminus \{0\}$, $\text{gr}'(\text{gr}''(z_\delta)) \in S_r''(\mathfrak{p})$ où r est le plus petit entier naturel tel que $z_\delta \in S^{''r}(\mathfrak{p})$, il existe $s''_i \in \text{Sy}(\mathfrak{p})$ tel que $s'_i = \text{gr}''(s''_i)$. Il suffit alors d'appliquer [3, chap. III, §2, n° 9, Proposition 10] pour en déduire que $\text{gr}''(\text{Sy}(\mathfrak{p}))$ puis $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ est une algèbre de polynômes en N variables dont les générateurs s''_i (pour $\text{Sy}(\mathfrak{p})$) ont le même poids que celui de s_i puisque les graduations gr' et gr'' sont invariantes par l'action adjointe de \mathfrak{h} .

De plus, vu leur forme, les s_i et donc aussi les s''_i sont des polynômes homogènes de l'algèbre $S(\mathfrak{p})$. Par conséquent l'algèbre $\text{Sz}(\mathfrak{p}) = U(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ est aussi une algèbre de polynômes en N variables dont les générateurs ont le même poids que les générateurs s''_i de $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ ou s_i de S^J . Remarquons que $\text{Sy}(\mathfrak{p})$ polynomiale implique $\text{Sz}(\mathfrak{p})$ polynomiale peut aussi se déduire de [17]. \square

7.3. Enfin nous avons rappelé (voir 1.2) que le centre de $U(\mathfrak{g})$, lorsque \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple de dimension finie sur \mathbb{C} , est une algèbre de polynômes en rang de \mathfrak{g} générateurs. De ceci et de la proposition précédente découle donc le théorème suivant.

THÉORÈME. – *Lorsque \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur \mathbb{C} et lorsque \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} telles que, pour tout $\Gamma \in \Pi$, $\varepsilon_\Gamma^\pi = 1$, alors le semi-centre de $U(\mathfrak{p})$ est une algèbre de polynômes en le même nombre d'indéterminées avec les mêmes poids que le semi-centre de l'algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{p} . C'est en particulier le cas lorsque \mathfrak{g} est un produit d'algèbres de Lie simples de type A_n ou C_n et lorsque \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique quelconque de \mathfrak{g} .*

Preuve. – On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \dots \times \mathfrak{g}_r$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \times \dots \times \mathfrak{p}_r$ avec \mathfrak{g}_i simple et \mathfrak{p}_i sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g}_i pour tout $1 \leq i \leq r$. Le semi-centre de $U(\mathfrak{p})$ est alors l'image par la multiplication dans $U(\mathfrak{p})$ du produit tensoriel des semi-centres de $U(\mathfrak{p}_i)$. De plus le système π de racines simples de \mathfrak{g} est égal à $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \dots \cup \pi_r$ où π_i est un système de racines simples de \mathfrak{g}_i . Notons Π^i l'ensemble des orbites (tronquées ou non) pour $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{p}_i, \pi_i)$ – c'est-à-dire l'analogue de Π défini au 3.2.1 pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \pi)$. Alors, pour tout $\Gamma \in \Pi$, $\varepsilon_\Gamma^\pi = 1$ implique que, pour tout $1 \leq i \leq r$ et tout $\Gamma \in \Pi^i$, $\varepsilon_\Gamma^\pi = 1$. La proposition 7.2 ci-dessus ainsi que le résultat rappelé plus haut concernant le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple permettent de conclure. \square

Annexe A. Erratum pour [13, Table II]

Rappelons (voir section 3.1.1) que l'ensemble des poids \mathcal{B}_π de $Y(\mathfrak{n})$ et de $\text{Sy}(\mathfrak{b})$ vérifie l'égalité $\mathcal{B}_\pi = P^+(\pi) \cap \mathbb{N}\beta_\pi$ où $\beta_\pi = \{\beta_i^\pi\}_{i=1}^{l_\pi}$ avec $l_\pi = \text{Card}(\pi/\langle w_\pi \rangle)$. À tout $k \in \mathbb{N}^*$ on associe les éléments k' et k'' et on note \mathbb{N}^+ l'ensemble \mathbb{N}^* auquel on a ajouté l'ensemble des k' et k'' , $k \in \mathbb{N}^*$, de sorte que l'ordre naturel \leq dans \mathbb{N}^* se prolonge sur \mathbb{N}^+ de la façon suivante.

Pour tout $(k, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^+$, on a les équivalences : $[s \leq k \text{ et } s \in \mathbb{N}^* \iff s < k']$ et $[s \leq k \text{ et } s \in \mathbb{N}^* \iff s < k'']$.

Dans le cas où \mathfrak{g} est simple de type B_l, D_l, E_7 ou E_8 , les racines fortement orthogonales $\beta_i := \beta_i^\pi$ peuvent être indexées par un sous-ensemble $\mathcal{I} \subset \{1, 2, \dots, m, 1', 2', \dots, m', 1'', 2'', \dots, m''\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ de sorte que, si α^i est la racine simple de $\pi/\langle w_\pi \rangle$ correspondant à l'indice i de \mathcal{I}

(on veillera à ne pas la confondre avec la racine simple α_i pour l'indexation de $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ donnée dans 2.2) et si $\rho_i := \rho_{\alpha_i}^\pi$, pour tout $i \in \mathcal{I}$, il existe un unique uplet $(n_j)_{j \in \mathcal{I}, j < i}$ d'entiers naturels, tel que $\rho_i = \beta_i + \sum_{j \in \mathcal{I}, j < i} n_j \beta_j$. Rappelons les notations de 3.1.3. On pose, pour tout $i \in \mathcal{I}$, $s_i := \deg(a_{\rho_i})$ et, lorsque $\alpha^i \neq w_\pi(\alpha^i)$, $s'_i := \deg(c_{\rho_i}^{\alpha^i})$ (le degré étant celui d'un élément de l'algèbre symétrique par rapport à sa graduation naturelle). On a alors (cf. [13, 4.12]) $s_i = \sum_{j \in \mathcal{I}, j < i} n_j + 1$ et si $\alpha^i \neq w_\pi(\alpha^i)$, $s'_i = s_i + 1$. Considérons enfin l'indexation de 2.2 pour π et notons $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq l}$ la base canonique de \mathbb{R}^l lorsque \mathfrak{g} est de type B_l ou D_l et $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq 8}$ la base canonique de \mathbb{R}^8 lorsque \mathfrak{g} est de type E_7 ou E_8 et posons, pour tout $1 \leq i \leq l$, $\varpi_i := \overline{\varpi}_{\alpha_i}^\pi$ le i -ième poids fondamental associé à la i -ième racine simple α_i de π . Ceci étant posé, la Table II de [13] corrigée est la suivante.

Table

Pour B_{2n} , $n \geq 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n, 1', 2', \dots, n'\}$,

	β_i	ρ_i	s_i	s'_i
$i = j, 1 \leq j \leq n - 1$	$\epsilon_{2j-1} + \epsilon_{2j}$	ϖ_{2j}	j	
$i = n$	$\epsilon_{2n-1} + \epsilon_{2n}$	$2\varpi_{2n}$	n	
$i = j', 1 \leq j \leq n$	$\epsilon_{2j-1} - \epsilon_{2j}$	$2\varpi_{2j-1}$	$2j$	

Pour B_{2n+1} , $n \geq 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, (n+1), 1', 2', \dots, n'\}$,

	β_i	ρ_i	s_i	s'_i
$i = j, 1 \leq j \leq n$	$\epsilon_{2j-1} + \epsilon_{2j}$	ϖ_{2j}	j	
$i = n + 1$	ϵ_{2n+1}	$2\varpi_{2n+1}$	$n + 1$	
$i = j', 1 \leq j \leq n$	$\epsilon_{2j-1} - \epsilon_{2j}$	$2\varpi_{2j-1}$	$2j$	

Pour D_{2n} , $n > 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n, 1', 2', \dots, (n-1)', (n-1)''\}$,

	β_i	ρ_i	s_i	s'_i
$i = j, 1 \leq j \leq n - 1$	$\epsilon_{2j-1} + \epsilon_{2j}$	ϖ_{2j}	j	
$i = n$	$\epsilon_{2n-1} + \epsilon_{2n}$	$2\varpi_{2n}$	n	
$i = j', 1 \leq j \leq n - 1$	$\epsilon_{2j-1} - \epsilon_{2j}$	$2\varpi_{2j-1}$	$2j$	
$i = (n-1)''$	$\epsilon_{2n-1} - \epsilon_{2n}$	$2\varpi_{2n-1}$	n	

Pour D_{2n+1} , $n > 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, (n+1), 1', 2', \dots, (n-1)'\}$,

	β_i	ρ_i	s_i	s'_i
$i = j, 1 \leq j \leq n-1$	$\epsilon_{2j-1} + \epsilon_{2j}$	ϖ_{2j}	j	
$i = n$	$\epsilon_{2n-1} + \epsilon_{2n}$	$\varpi_{2n} + \varpi_{2n+1}$	n	$n+1$
$i = n+1$	$\epsilon_{2n-1} - \epsilon_{2n}$	$2\varpi_{2n-1}$	$2n$	
$i = j', 1 \leq j \leq n-1$	$\epsilon_{2j-1} - \epsilon_{2j}$	$2\varpi_{2j-1}$	$2j$	

Pour E_7 , $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 2', 3', 3''\}$,

β_i	ρ_i	s_i	s'_i
$\beta_1 = \epsilon_8 - \epsilon_7$	ϖ_1	1	
$\beta_2 = \epsilon_5 + \epsilon_6$	ϖ_6	2	
$\beta_3 = \epsilon_3 + \epsilon_4$	ϖ_4	4	
$\beta_4 = \epsilon_2 - \epsilon_1$	$2\varpi_3$	6	
$\beta_{2'} = \epsilon_6 - \epsilon_5$	$2\varpi_7$	3	
$\beta_{3'} = \epsilon_4 - \epsilon_3$	$2\varpi_5$	7	
$\beta_{3''} = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$2\varpi_2$	5	

Pour E_8 , $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 3', 4', 4''\}$,

β_i	ρ_i	s_i	s'_i
$\beta_1 = \epsilon_7 + \epsilon_8$	ϖ_8	1	
$\beta_2 = \epsilon_8 - \epsilon_7$	ϖ_1	2	
$\beta_3 = \epsilon_5 + \epsilon_6$	ϖ_6	4	
$\beta_4 = \epsilon_3 + \epsilon_4$	ϖ_4	7	
$\beta_5 = \epsilon_2 - \epsilon_1$	$2\varpi_3$	10	
$\beta_{3'} = \epsilon_6 - \epsilon_5$	$2\varpi_7$	6	
$\beta_{4'} = \epsilon_4 - \epsilon_3$	$2\varpi_5$	12	
$\beta_{4''} = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$2\varpi_2$	8	

RÉFÉRENCES

- [1] BORHO W., KRAFT H., Uber die Gelfand–Kirillov–Dimension, *Math. Annalen* **220** (1976) 1–24.
- [2] BOURBAKI N., Groupes et algèbres de Lie. Éléments de Mathématiques, Hermann, Paris, 1968.
- [3] BOURBAKI N., Algèbre commutative. Éléments de Mathématiques, Hermann, Paris, 1968.
- [4] CARTER R. W., Simple Groups of Lie type. Interscience, Wiley, London, 1972.
- [5] DIXMIER J., Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents IV, *Can. J. Math.* **11** (1959) 321–344.
- [6] DIXMIER J., Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [7] DIXMIER J., Sur les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{af}(n, \mathbb{C})$, *Bull. Sci. Math.*, 2^e série **100** (1976) 57–95.
- [8] FAUQUANT-MILLET F., Sur une algèbre parabolique P de $\check{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ et ses semi-invariants par l'action adjointe de P, *Bull. Sci. Math.* **122** (1998) 495–519.
- [9] FAUQUANT-MILLET F., JOSEPH A., Sur les semi-invariants d'une sous-algèbre parabolique d'une algèbre enveloppante quantifiée, *Transformation Groups* **6** (2) (2001) 125–142.
- [10] FAUQUANT-MILLET F., JOSEPH A., Rapport entre $Z(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{b})^n$ – une plaisanterie, en préparation.
- [11] JOSEPH A., A generalization of the Gelfand–Kirillov conjecture, *Amer. J. Math.* **99** (6) (1977) 1151–1165.
- [12] JOSEPH A., Second commutant theorems in enveloping algebras, *Amer. J. Math.* **99** (6) (1977) 1167–1192.
- [13] JOSEPH A., A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra, *J. Algebra* **48** (1977) 241–289.
- [14] JOSEPH A., Quantum Groups and Their Primitive Ideals, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [15] KOSTANT B., The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. Math.* **81** (1959) 973–1032.
- [16] MOEGLIN C., Factorialité dans les algèbres enveloppantes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **282** (1976) 1269–1272.
- [17] RENTSCHLER R., VERGNE M., Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie, *Ann. Scient. École Norm. Sup.* 4^e série **6** (1973) 389–405.

(Manuscrit reçu le 18 mai 2004 ;
 accepté, après révision, le 18 janvier 2005.)

Florence FAUQUANT-MILLET
 Département de mathématiques,
 Faculté des Sciences,
 Université Jean Monnet,
 42023 Saint-Étienne, France
 E-mail : florence.millet@univ-st-etienne.fr

Anthony JOSEPH
 Department of Mathematics,
 The Weizmann Institute of Science,
 Rehovot 76100, Israel
 E-mail : anthony.joseph@weizmann.ac.il