Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 283–286
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle

Sur la continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur sur les variétés coniques

Hong-Quan Li

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, Wegelerstr. 6, 53115 Bonn, Allemagne

Reçu le 28 avril 2003 ; accepté après révision le 17 juin 2003

Présenté par Michèle Vergne

Résumé

Dans cette Note, on se propose d'abord d'étudier le noyau de la chaleur, p_t, sur les variétés coniques de dimension 2. Ensuite, on raffine les estimations supérieures de p_t obtenues dans Li (Bull. Sci. Math. 124 (2000) 365–384) sur les variétés coniques de dimension $\geqslant 3$. Enfin, on étudie la continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur sur les variétés coniques. On trouve de nouveaux phénomènes sur les variétés coniques, surtout sur les variétés coniques de dimension 2. ***Pour citer cet article : H.-Q. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Hölder continuity of the heat semigroup on conic manifolds. In this Note, we study initially the heat kernel, p_t, on conic manifolds of dimension 2. Then, we improve the upper bound of p_t obtained in Li (Bull. Sci. Math. 124 (2000) 365–384) on conic manifolds of dimension $\geqslant 3$. Finally, we study the Hölder continuity of the heat semigroup on conic manifolds. Some new phenomenons are found on conic manifolds, in particular, on conic manifolds of dimension 2. ***To cite this article: H.-Q. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Si N est une variété riemannienne connexe de dimension $n-1$, le cône sur N, $C(N)$, est la variété $]0,+\infty[\times N$ munie de la métrique riemannienne $\mathrm{d}r^2 + r^2 g_N$, où g_N est la métrique riemannienne sur N. Dans cette Note, on suppose toujours que N est compacte, sans bord et de dimension $n-1 \geqslant 1$. On donne une propriété de la courbure de Ricci sur $C(N)$. Soient $(r_o, m_o) \in C(N)$, $\mathrm{T}_{(r_o,m_o)}C(N)$ (resp. $\mathrm{T}_{m_o}N$) l'espace tangent au point (r_o, m_o) (resp. m_o). Paramétrons $\mathrm{T}_{(r_o,m_o)}C(N)$ par $\{\lambda\frac{\partial}{\partial r};\ \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus \mathrm{T}_{m_o}N$. Soient $\xi_o \in \mathbb{R}$, $X_* \in T_{m_o}N$, alors

$$\frac{\mathrm{Ric}\langle \xi_o\partial/\partial r + X_*, \xi_o\partial/\partial r + X_*\rangle}{\langle \xi_o\partial/\partial r + X_*, \xi_o\partial/\partial r + X_*\rangle} = \frac{\mathrm{Ric}_N\langle X_*, X_*\rangle - (n-2)\langle X_*, X_*\rangle_N}{\xi_o^2 + r_o^2\langle X_*, X_*\rangle_N},$$

Adresse e-mail : li-hq@wiener.iam.uni-bonn.de (H.-Q. Li).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00343-1

où Ric_N est la courbure de Ricci sur N. En particulier, la courbure de Ricci sur $C(N)$ est minorée ($\geqslant 0$) si et seulement si celle sur N est $\geqslant n-2$. Pour d'autres informations sur les variétés coniques, on pourra se reporter à [3,4] et [8] ; par exemple, on peut trouver la formule de la distance géodésique entre $(s,m), (s_*,m_*) \in C(N)$ dans [4] (p. 315) et une estimation du volume de la boule géodésique dans [8].

2. Estimations du noyau de la chaleur

Soient Δ le laplacien (négatif) sur $C(N)$, $\mathrm{e}^{t\Delta}$ $(t>0)$ le semi-groupe de la chaleur et p_t son noyau. Notons $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres de $-\Delta_N$, le laplacien positif sur N, rangées par ordre croissant, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. À chaque valeur propre λ_j est associée une fonction propre ϕ_j normalisée de telle sorte que la suite $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(N)$. On pose $\nu_j = \sqrt{(\frac{n-2}{2})^2 + \lambda_j}$ et $\nu = \sqrt{(\frac{n-2}{2})^2 - \Delta_N}$. On peut écrire p_t comme suit (voir par exemple [3] (p. 592), [13] (pp. 432–433) et [8] (p. 374 et p. 376)) :

$$
\begin{aligned}
p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big) &= \frac{\mathrm{e}^{-(s-s_*)^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t^n}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h^{(n-2)/2-\nu_j}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu_j)} \int_0^1 \mathrm{e}^{-a/h}\big[a(1-a)\big]^{\nu_j-1/2}\,\mathrm{d}a\,\phi_j(m)\overline{\phi_j}(m_*) \\
&= \mathrm{e}^{-(s-s_*)^2/(4t)} \frac{h^{n/2-1}}{2\pi t^{n/2}} \left[\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(1-\cos y)/(2h)} \cos y\nu\,\mathrm{d}y - \sin(\pi\nu) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\cosh y)/(2h)}\,\mathrm{e}^{-y\nu}\,\mathrm{d}y\right](m,m_*),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

où $h = \frac{t}{ss_*}$, $(s,m),(s_*,m_*) \in C(N)$ et $t>0$. Dans la suite, pour deux fonctions f et g, on dit que $f \sim g$ si et seulement s'il existe une constante $c>0$ telle que $c^{-1}f \leqslant g \leqslant cf$.

Dans [8] et [6], on a étudié les estimations gaussiennes de p_t et de son gradient sur $C(N)$ où N est de dimension $\geqslant 2$. On se propose ici d'étudier ce problème dans le cas où N est de dimension 1. Notre résultat principal est le :

Théorème 2.1. *Soit N une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension 1. Notons $d(x,y)$ (resp. $d_N(m,m_*)$) la distance géodésique entre $x=(s,m)$ et $y=(s_*,m_*) \in C(N)$ (resp. m et m_*), alors*

$$
p_t(x,y) \sim \frac{1}{4\pi t}\,\mathrm{e}^{-d^2(x,y)/(4t)} \times \begin{cases} 1 & \text{si } d_N(m,m_*) \leqslant \pi, \\ \left(1 + \dfrac{(d_N(m,m_*)-\pi)^2}{t/(ss_*)}\right)^{-1/2} & \text{si } d_N(m,m_*) > \pi. \end{cases}
$$

Pour montrer ce théorème, il suffit d'utiliser (1) et les expressions explicites de $\cos y\nu$ et de $\mathrm{e}^{-y\nu}\sin\pi\nu$ sur les variétés riemanniennes compactes de dimension 1. En effet, sur les variétés coniques de dimension 2, le noyau de la chaleur est donné par une fonction assez simple ; on peut obtenir des estimations de $|\frac{\partial}{\partial t}p_t|$ et de $|\nabla p_t|$. On trouve aussi une très grande différence entre les variétés coniques de dimension 2 et les variétés riemanniennes complètes à courbures de Ricci $\geqslant 0$: si M est une variété riemannienne complète, sans bord, de dimension 2, à courbure de Ricci non-négative, et si $H(t,x,y)$ $(t>0,\ x,y\in M)$ désigne le noyau de la chaleur sur M, le théorème de Li–Yau (voir [11]) dit qu'on a :

$$
\frac{|\nabla H(t,x,y)|^2}{H^2(t,x,y)} - \frac{1}{H(t,x,y)}\frac{\partial}{\partial t}H(t,x,y) \leqslant \frac{1}{t}, \quad \forall t>0,\ \forall x,y\in M, \tag{2}
$$

et, par le théorème de comparaison de Cheeger–Yau (voir [5]), on a :

$$
H(t,x,y) \geqslant (4\pi t)^{-1}\,\mathrm{e}^{-d^2(x,y)/(4t)}, \quad \forall t>0,\ \forall x,y\in M,
$$

où $d(x,y)$ désigne la distance géodésique entre $x, y \in M$. Mais, sur les variétés coniques de dimension 2, la courbure de Ricci est nulle, on trouve que, quand $\sup_{m,m_*\in N} d_N(m,m_*) > \pi$, les deux estimations précédentes ne sont plus valables sur $C(N)$. Voir [10] pour les détails.

Dans [8], on a étudié les estimations supérieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques de dimension plus grande ou égales à 3 : en utilisant le résultat de [7], on obtient une estimation supérieure de $p_t(x,x)$ dont on déduit celle de $p_t(x,y)$. En utilisant l'idée de la preuve du Théorème 1.3 de [9], on peut exploiter directement la formule (1) pour affiner l'estimation obtenue dans [8] et notre résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit N une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension $n-1 \geqslant 2$. Pour tout $0 < \gamma < 1$ fixé, il existe une constante $A(\gamma) > 0$ telle que* :

$$p_t(x,y) \leqslant A(\gamma)\, t^{-n/2} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/(4t)} \left(1 + \frac{d^2(x,y)}{t}\right)^{n/2+\gamma-1}, \quad \forall t > 0,\ \forall x, y \in C(N).$$

On voit facilement que $\frac{n}{2} + \gamma - 1$, l'indice du facteur $(1 + \frac{d^2(x,y)}{t})^{n/2+\gamma-1}$, est plus petit que celui obtenu par Sikora dans le cadre des variétés riemanniennes satisfaisant certaines estimations de $p_t(x,x)$ (voir [14]). Remarquons aussi qu'on a obtenu dans [6] des estimations inférieures de p_t, plus précisément, il existe deux constantes $\varepsilon, A > 0$ telles que $p_t(x,y) \geqslant \varepsilon \exp(-A\frac{d^2(x,y)}{t})$ pour tout $x, y \in C(N)$ et tout $t > 0$.

3. La continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur

Afin d'étudier la continuité de Hölder de $\mathrm{e}^{t\Delta}$ $(t > 0)$ sur les variétés coniques, on montre d'abord que les variétés coniques sont stochastiquement complètes, c'est-à-dire que nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Soit N une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension $n-1 \geqslant 1$. Notons $\mathrm{d}\mu$ la mesure riemannienne induite sur $C(N)$. Alors, pour tout $x \in C(N)$ et tout $t > 0$, nous avons* $\|p_t(x,\cdot)\|_{L^1(C(N),\,\mathrm{d}\mu)} = 1$.

Si M est une variété riemannienne complète de courbure de Ricci minorée par $-k$ $(k \geqslant 0)$, notons d_M la distance induite et $\mathrm{e}^{t\Delta}$ $(t > 0)$ le semi-groupe de la chaleur, alors on sait bien que (voir par exemple [1,2] et [15] pour des résultats plus généraux) pour toute fonction convenable définie sur M et tout $t > 0$, nous avons $\||\nabla \mathrm{e}^{t\Delta}u|\|_{L^\infty(M)} \leqslant \mathrm{e}^{kt}\||\nabla u|\|_{L^\infty(M)}$.

On s'intéresse à savoir s'il y a une estimation similaire dans le cadre des variétés coniques. Plus généralement, pour $0 < \alpha \leqslant 1$ fixé, si f est une fonction convenable défini sur $C(N)$, on définie $\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ comme la norme de la fonction $\frac{|f(x)-f(y)|}{d^\alpha(x,y)}\chi\{x \neq y\}$ dans $L^\infty(C(N)\times C(N), \mathrm{d}\mu\otimes\mathrm{d}\mu)$ et on veut savoir s'il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\left\|\mathrm{e}^{t\Delta} f\right\|_{\mathcal{C}^\alpha} \leqslant A\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad \forall f,\ \forall t > 0. \tag{3}$$

Nous avons la réponse suivante :

Théorème 3.2. *Soit N une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension $n-1 \geqslant 1$. Notons λ_1 sa première valeur propre non nulle, et $\alpha_o = \sqrt{(\frac{n-2}{2})^2 + \lambda_1} - \frac{n-2}{2}$. Alors, il existe une constante $A > 0$ telle que* (3) *est vraie pour tout $0 < \alpha \leqslant \min(1, \alpha_o)$; et pour $\alpha_o < 1$ (c'est-à-dire, $\lambda_1 < n-1$), il existe une fonction lisse à support compact définie sur $C(N)$, f_o, telle que $\|\mathrm{e}^{t\Delta} f_o\|_{\mathcal{C}^\alpha} = +\infty$, pour tout $t > 0$ et tout $\alpha_o < \alpha \leqslant 1$.*

Enfin, pour $t > 0$ et $0 < \alpha \leqslant \min(1, \alpha_o)$ fixés, on s'intéresse à savoir si l'opérateur $\mathrm{e}^{t\Delta}$ est borné de $L^\infty(C(N))$ dans $\mathcal{C}^\alpha(C(N)) = \{f;\ \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} < +\infty\}$. On a le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Soient N et α_o comme dans le Théorème* 3.2. *Alors, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $0 < \alpha \leqslant \min(1, \alpha_o)$ fixé, on a $\|\mathrm{e}^{t\Delta} f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \leqslant A t^{-\alpha/2} \|f\|_\infty$, pour toute $f \in L^\infty$ et tout $t > 0$.*

Remarquons que dans le cas où N est de dimension $n - 1 \geqslant 2$ avec $\lambda_1 < n - 1$, par le théorème de Lichnerowicz (voir [12]), la courbure de Ricci sur N n'est pas minorée par $n - 2$, donc celle sur $C(N)$ n'est pas minorée. L'idée principale de la preuve des Théorèmes 3.2 et 3.3 est comme suit : dans le cas où $\lambda_1 \geqslant n - 1$, les démonstrations des Théorèmes 3.2 et 3.3 sont plutôt élémentaires, il suffit d'utiliser les estimations de p_t et de $|\nabla p_t|$. Dans le cas où $\lambda_1 < n - 1$, les estimations de p_t et de $|\nabla p_t|$ semblent être insuffisantes pour montrer directement les Théorèmes 3.2 et 3.3, on doit utiliser encore (1), le développement en série de p_t. Les démonstrations détaillées seront présentées dans [10].

Remerciements

L'auteur est soutenu par le DFG (SFB 611). Le Théorème 2.2 a été obtenu lors d'une visite à l'IHES. Je tiens à remercier Karl-Theodor Sturm pour avoir attiré mon attention sur la continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur sur les variétés coniques, Jean Pierre Bourguignon, Laurent Clozel et Laurent Lafforgue pour leur aide, Dominique Bakry, Thierry Coulhon et Werner Müller ainsi que Dr. Max-K. von Renesse pour des discussions et des références. Je voudrais remercier aussi tous les membres de l'équipe d'Analyse Harmonique d'Orsay pour leur soutien constant.

Références

[1] D. Bakry, Un critère de non-explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1) (1986) 23–26.
[2] D. Bakry, On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups, in: New Trends in Stochastic Analysis (Charingworth, 1994), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, pp. 43–75.
[3] J. Cheeger, Spectral geometry of singular Riemannian spaces, J. Differential Geom. 18 (1983) 575–657.
[4] J. Cheeger, M.E. Taylor, On the diffraction of wave by conical singularities. I, Comm. Pure Appl. Math. XXV (1982) 275–331.
[5] J. Cheeger, S.T. Yau, A lower bound for the heat kernel, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981) 465–480.
[6] T. Coulhon, H.-Q. Li, Estimations inférieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et transformées de Riesz, en préparation.
[7] A. Grigor'yan, Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds, J. Differential. Geom. 45 (1997) 33–52.
[8] H.-Q. Li, Estimations du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et ses applications, Bull. Sci. Math. 124 (2000) 365–384.
[9] H.-Q. Li, Certaines fonctions maximales sur les variétés cuspidales, Prépublication de l'IHES, décembre 2002.
[10] H.-Q. Li, Sur la continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur sur les variétés coniques, en préparation.
[11] P. Li, S.T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, Acta Math. 156 (1986) 153–201.
[12] A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958.
[13] M. Nagase, The fundamental solution of the heat equations on Riemannian spaces with cone-like singular points, Kodai Math. J. 7 (1984) 382–455.
[14] A. Sikora, Sharp pointwise estimates on heat kernels, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 47 (187) (1996) 371–382.
[15] K.-T. Sturm, A semigroup approach to harmonic maps, Preprint of Bonn University, November 2002.