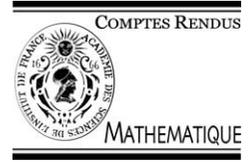




Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 243–247



Équations aux dérivées partielles

Des vortex fractionnaires pour un modèle Ginzburg–Landau spineur

Stan Alama, Lia Bronsard

Department of Mathematics, McMaster University, Hamilton, Ontario L8S 4K1, Canada

Reçu et accepté le 20 juin 2003

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

Récemment, des modèles Ginzburg–Landau avec spineur ont été développés afin de tenir compte des effets ferromagnétiques et antiferromagnétiques observés dans les supraconducteurs à haute température ainsi que dans les condensats de Bose–Einstein. Nous montrons que les minimiseurs ont de nouveaux type de vortex ayant des degrés fractionnaires et un spin non-nul au coeur. **Pour citer cet article :** *S. Alama, L. Bronsard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Half degree vortices for a spin-coupled Ginzburg–Landau model. Recent papers in the physics literature have introduced spin-coupled (or spinor) Ginzburg–Landau models for complex vector-valued order parameters in order to account for ferromagnetic or antiferromagnetic effects in high-temperature superconductors and in optically confined Bose–Einstein condensates. In this Note we observe that such models can lead to new types of vortices, with fractional degree and non-trivial core structure. **To cite this article:** *S. Alama, L. Bronsard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We consider the following problem, related to models of ferromagnetic and antiferromagnetic interactions in superconductors and Bose–Einstein condensates introduced in [6,5]. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a smooth, bounded domain, and $\Psi \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$. We define an energy functional,

$$E_\varepsilon(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (|\Psi|^2 - 1)^2 + \frac{2\gamma}{\varepsilon^2} (\psi_1 \times \psi_2)^2 \right\} dx,$$

where $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$, $\psi_1 \times \psi_2 = \text{Im}(\overline{\psi_1} \psi_2)$, $\gamma > 0$ and $\varepsilon > 0$ are parameters. The quantity $S = \psi_1 \times \psi_2$ is interpreted as the z -component of a spin vector, which is assumed to point orthogonally to the plane of Ω .

Adresses e-mail : alama@mcmaster.ca (S. Alama), bronsard@mcmaster.ca (L. Bronsard).

1631-073X/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/S1631-073X(03)00342-X

As $\varepsilon \rightarrow 0$ energy minimizers should converge to the zero set of the potential, which is a 2-torus $\Sigma \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2$ parametrized by two real phases, ϕ, ω : $\Sigma: \Psi = G(\phi, \omega) := (e^{i\phi} \cos \omega, e^{i\phi} \sin \omega)$. We note that the minimal period of $G(\phi, \omega)$ is given by $G(\phi + \pi, \omega \pm \pi) = G(\phi, \omega)$, with each phase executing a *half* cycle. So, for a smooth function $\Psi(x)$ taking values in Σ and a simple closed curve contained in the domain of Ψ we may define a pair of *half-integer* degrees (d_ϕ, d_ω) corresponding to the winding numbers of the two phases around Σ , $d_\phi, d_\omega \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ with $d_\phi + d_\omega \in \mathbb{Z}$.

We consider the following problem: given a smooth function $g = (g_1, g_2): \partial\Omega \rightarrow \Sigma$, minimize E_ε over $\Psi \in H^1_g(\Omega; \mathbb{C}^2)$, the space of H^1 functions taking boundary value $\Psi|_{\partial\Omega} = g$, and describe the minimizers as $\varepsilon \rightarrow 0$. As for the Ginzburg–Landau model (see [4]), the energy E_ε is a relaxation of the harmonic map energy for maps with values in the surface Σ , and in the limit the minimizers must develop singularities (vortices). A simple energy bound shows that minimizers of the Σ -harmonic map energy locally prefer the fractional vortices, which have half the energy of degree-1 singularities. Globally, the boundary condition may not allow for Ψ to have only positive degree $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vortices, and so the calculation of lower bounds must take into account combinations with negative degrees. In fact, vortices are best described in terms of the (integer) indices $[n_+, n_-]$,

$$n_+ = d_\phi + d_\omega, \quad n_- = d_\phi - d_\omega, \quad (d_\phi, d_\omega) = n_+ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + n_- \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Indeed, after a change of variables $\psi_\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \pm i\psi_2)$ in Ψ , the surface Σ is described more simply, parametrized by $\Psi = [\psi_+, \psi_-] = [\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_+}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_-}]$ with phases α_\pm carrying whole number degrees $[n_+, n_-]$.

We extend techniques of Bethuel, Brezis and Hélein [4] and Sandier [7] to prove concentration in finitely many small balls, and compactness in the exterior. Assume for simplicity that the boundary condition g has index pair $\mathbf{N} = [N^+, N^-]$ with $N^\pm \geq 0$. (That is, $d_\phi \geq |d_\omega|$. An analogous result holds in the general case.) Then we prove:

Theorem 0.1. *There exists a subsequence $\varepsilon \rightarrow 0$, a finite collection $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \Omega$ of points with associated index pairs $\{\mathbf{n}_i = [n_i^+, n_i^-]\}_{i=1, \dots, m}$ with each $n_i^\pm \in \{0, 1\}$, such that $\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i = \mathbf{N}$ and*

$$\min_{H^1_g} E_\varepsilon = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^m (n_i^+ + n_i^-) |\ln \varepsilon| + W(a_1, \dots, a_m; \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) + \sum_{i=1}^m Q_{\mathbf{n}_i} + o(1).$$

The renormalized energy W and constants $Q_{\mathbf{n}_i}$ are defined in (1)–(3) below.

Examples. We illustrate the conclusions of Theorem 0.1 by some simple examples in the disk $\Omega = B_1(0)$:

(1) $g = g(\theta) = e^{i\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$, with degree pair is $(d_\phi, d_\omega) = (1, 1)$. In the modified coordinates, we have index pair $\mathbf{N} = [2, 0]$, and the minimizers will have *two* vortices, both of degree type $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, symmetrically placed in the disk. Note that a single vortex at the origin with degree = 1 for each phase would have essentially *double* the energy of the minimizing configuration.

(2) Let $-1 < a < 1$ and $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, a conformal map of the unit disk. We take boundary data $\tilde{g}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_a(e^{i\theta}), f_{-a}(e^{i\theta})]$, so $\mathbf{N} = [1, 1]$ (that is, $(d_\phi, d_\omega) = (1, 0)$). In the symmetric case $a = 0$ the renormalized energy may be calculated explicitly, and the minimizer will have a single vortex of index $[1, 1]$ (degree $(1, 0)$) at the origin. On the other hand, for a chosen sufficiently close to 1 the energy minimizers will prefer two separate half-integer vortices, of index $\mathbf{n}_1 = [1, 0]$ and $\mathbf{n}_2 = [0, 1]$ (degrees $(d_\phi, d_\omega) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$).

An interesting aspect of this problem is the question of the vortex core. Rather than vanishing at the core, Ψ can also rotate along S^3 and acquire a non-zero spin. We expect this spin-core structure prevails for the half-integer vortices, and prove the following:

Proposition 0.2. *There exist constants $\gamma_1 < 1 < \gamma_2$ such that for all $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$, for all $\rho < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |a_i - a_j|$, and for any a_i with $\mathbf{n}_i = [1, 0]$ or $[0, 1]$, $|\Psi(x)|$ is bounded away from zero in $B_\rho(a_i)$.*

On the other hand, it is easy to see that in a neighborhood of the $\mathbf{n} = [1, 1]$ vortex $((d_\phi, d_\omega) = (1, 0))$ both ψ_+, ψ_- must vanish.

The theorems announced here, together with other results on spin-coupled models, are proven in detail in the papers [1,2], and [3].

1. Le modèle spineur

Motivés par des modèles récents de supraconductivité avec interaction ferromagnétique et antiferromagnétique [6], ou de condensats de Bose–Einstein [5], nous étudions le problème suivant. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné et régulier, et $\Psi \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$. Nous considérons la fonctionnelle d’énergie,

$$E_\varepsilon(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \Psi|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (|\Psi|^2 - 1)^2 + \frac{2\gamma}{\varepsilon^2} (\psi_1 \times \psi_2)^2 \right\} dx,$$

où $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$, $\psi_1 \times \psi_2 = \text{Im}(\overline{\psi_1} \psi_2)$, $\gamma > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des paramètres. La fonction $S = \psi_1 \times \psi_2$ représente la troisième composante (dans la direction z) d’un vecteur de spin, qui est supposé orthogonal au plan contenant Ω .

A la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, les minimiseurs de l’énergie devraient converger vers l’ensemble de niveau zéro du potentiel. Etant donné que $\gamma > 0$, Ψ devrait donc approximer un tore de dimension deux $\Sigma \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2$ paramétrisé par deux angles, ϕ, ω :

$$\Sigma: \quad \Psi = G(\phi, \omega) := (e^{i\phi} \cos \omega, e^{i\phi} \sin \omega).$$

Ceci suggère une paramétrisation global pour Ψ utilisant la substitution $\Psi = f e^{i\phi} (\cos \omega, \sin \omega)$ comme dans [6], auquel cas l’énergie E_ε devient un modèle de Ginzburg–Landau pour deux paramètres d’ordre distincts. Toutefois ce choix exclut les vrais minimiseurs de l’énergie E_ε dans beaucoup de cas. (Voir exemple (1) plus bas.)

Nous observons plutôt que la période minimale de $G(\phi, \omega)$ est donnée par $G(\phi + \pi, \omega \pm \pi) = G(\phi, \omega)$, c’est-à-dire que la période minimale est obtenue lorsque chaque phase tourne d’un *demi* cycle. Par conséquent, étant donnée une fonction régulière $\Psi(x)$ à valeur dans Σ , nous pouvons définir une paire de degrés (d_ϕ, d_ω) à valeurs dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, correspondant au nombre de tours de chacune des deux phases autour de Σ , via les formules

$$d_\phi := \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d\phi}{ds} ds \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad d_\omega := \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d\omega}{ds} ds \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad d_\phi + d_\omega \in \mathbb{Z},$$

où C est une courbe simple fermée dans le domaine de Ψ . De plus, un calcul simple montre que les minimiseurs de l’énergie des applications harmoniques à valeurs dans Σ ont des vortex avec demi degré, $|d_\phi| = \frac{1}{2} = |d_\omega|$ car un tel vortex coûte la moitié moins d’énergie qu’une singularité de degré un.

Ces observations suggèrent d’étudier le problème suivant : étant donnée une fonction régulière $g = (g_1, g_2) : \partial\Omega \rightarrow \Sigma$, trouver les minimiseurs de E_ε avec $\Psi \in H_g^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$, l’espace des fonctions H^1 avec condition limite $\Psi|_{\partial\Omega} = g$, et donner une description qualitative de ces minimiseurs, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme pour le modèle de Ginzburg–Landau (voir [4]), l’énergie E_ε est une relaxation de l’énergie des applications harmoniques à valeur dans la surface Σ , et à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ les minimiseurs doivent développer des singularités (vortex). Nous adaptons les techniques de Bethuel, Brezis et Hélein [4] et Sandier [7] pour obtenir concentration en un nombre fini de petites boules, et par conséquent compacité à l’extérieur de ces boules.

Comme nous l’avons vu, l’estimation de l’énergie des applications harmoniques à valeurs dans Σ suggère que l’énergie est localement minimisée par des solutions ayant des vortex de degrés fractionnaires. Globalement toutefois, les conditions aux limites pourraient ne pas permettre que Ψ ait seulement des vortex de degrés positifs $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, de sorte que les calculs des bornes inférieures doivent tenir compte des vortex avec degrés négatifs. En fait, le problème devient moins compliqué lorsqu’on observe que les vortex se représentent par des indices (entiers) $[n_+, n_-]$,

$$n_+ = d_\phi + d_\omega, \quad n_- = d_\phi - d_\omega, \quad (d_\phi, d_\omega) = n_+ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + n_- \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

En effet, en faisant le changement de variable $\psi_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \pm i\psi_2)$ en Ψ , la surface Σ est décrite plus simplement par la paramétrisation $\Psi = [\psi_+, \psi_-] = [\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_+}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_-}]$ avec phases α_{\pm} ayant des degrés entiers $[n_+, n_-]$.

Nous présentons nos résultats principaux dans ces nouvelles coordonnées. Soit $\tilde{g} = [g_+, g_-]$ les valeurs aux limites exprimées dans les coordonnées $\Psi = [\psi_+, \psi_-]$. Pour simplifier la présentation, nous supposons aussi que g a une paire d'indices $\mathbf{N} = [N^+, N^-]$ avec $N^{\pm} \geq 0$. (C'est-à-dire, $d_{\phi} \geq |d_{\omega}|$. Le résultat est similaire dans le cas général.) Nous prouvons :

Théorème 1.1. *Il existe une sous-suite $\varepsilon \rightarrow 0$, une collection finie $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \Omega$ de points, chacun ayant une paire d'indices associés $\{\mathbf{n}_i = [n_i^+, n_i^-]\}_{i=1, \dots, m}$ où $n_i^{\pm} \in \{0, 1\}$, telles que $\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i = \mathbf{N}$ et*

$$\min_{H_g^1} E_{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^m (n_i^+ + n_i^-) |\ln \varepsilon| + W(a_1, \dots, a_m; \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) + \sum_{i=1}^m Q_{\mathbf{n}_i} + o(1).$$

Ici,

$$W(a_1, \dots, a_m; \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) := \int_{\partial\Omega} \Phi_0 \cdot \left(\tilde{g} \times \frac{d\tilde{g}}{ds} \right) ds - \frac{\pi}{2} \sum_{i \neq j} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \ln |a_i - a_j| - \pi \sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{R}_0(a_i) \tag{1}$$

est l'énergie renormalisée (cf. [4]), où Φ_0 est la fonction de Green vectorielle satisfaisant

$$\Delta \Phi_0 = \pi \sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i \delta_{a_i}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g} \times \frac{d\tilde{g}}{ds}, \tag{2}$$

$\mathbf{R}_0 := \Phi_0 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \mathbf{n}_i \ln |x - a_i|$ étant sa partie régulière, et

$$Q_{\mathbf{n}_i} := \begin{cases} Q_{1/2}(\gamma), & \text{si } \mathbf{n}_i = [1, 0] \text{ ou si } \mathbf{n}_i = [0, 1]; \\ Q_1(\gamma), & \text{si } \mathbf{n}_i = [1, 1]. \end{cases} \tag{3}$$

Les constantes $Q_{1/2}$ et Q_1 mesurent l'énergie du coeur de chaque type de vortex (voir Theorem IX.3 de [4]) et satisfont la relation :

$$Q_1 \leq 2Q_{1/2} \leq Q_1 + \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{1}{2} [1 + \max\{\gamma, \gamma^{-1}\}] \right). \tag{4}$$

Nous remarquons que dans W il n'y a pas d'interaction directe entre les deux vortex fractionnaires de type différent $\mathbf{n} = [1, 0]$ et $[0, 1]$ (i.e., de degrés $(d_{\phi}, d_{\omega}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$), ce qui suggère que le vortex $\mathbf{n} = [1, 1]$ pourrait être vu comme une superposition des deux vortex de degrés fractionnaires. Toutefois, la différence d'énergie du coeur entre $Q_{1/2}$ et Q_1 représente une sorte d'interaction à courte distance, comme nous allons le voir dans le deuxième exemple ci-dessous.

2. Exemples

Nous présentons les conclusions du Théorème 1.1 à l'aide de quelques exemples dans la boule unité $\Omega = B_1(0)$:

(1) Nous prenons $g = g(\theta) = e^{i\theta} (\cos \theta, \sin \theta)$. La paire de degrés associée est donc $(d_{\phi}, d_{\omega}) = (1, 1)$. Après le changement de variables, la paire d'indices devient $[N_+, N_-] = [2, 0]$, de sorte que l'énergie renormalisée coïncide avec celle de l'énergie classique de Ginzburg–Landau où la condition aux limites est $e^{2i\theta}$. Les minimiseurs auront donc deux vortex, chacun de degrés fractionnaires $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, placés symétriquement dans Ω . Nous remarquons

qu'un vortex à l'origine de degré un pour chaque phase a une énergie qui est pratiquement le *double* de celle du minimiseur.

(2) Soit $-1 < a < 1$ et $f_a(z) = \frac{z-a}{1-az}$ une application conforme du disque unité. Nous prenons la condition aux limites $\tilde{g}(\theta) = [g_+, g_-] = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_a(e^{i\theta}), f_{-a}(e^{i\theta})]$, de sorte que $\mathbf{N} = [1, 1]$. Cette fois, deux configurations sont possibles : (i) deux vortex distincts, un avec indice $[1, 0]$ (i.e. de degrés $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) et l'autre avec indice $[0, 1]$ (i.e. de degrés $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$); ou (ii) un vortex simple d'indice $[1, 1]$ (i.e. de degrés $(1, 0)$). Si $a = 0$, l'énergie renormalisée W peut se calculer explicitement, et la configuration limite est celle donnée dans (ii), avec un vortex à l'origine. Par contre, si nous prenons a suffisamment proche de 1, l'énergie renormalisée associée à un vortex $\mathbf{n} = [1, 1]$ peut être aussi grande que l'on veut, alors que l'énergie renormalisée d'une configuration de deux vortex reste bornée pour tout a . Par conséquent, si $1 - a$ est suffisamment petit, la différence en énergie renormalisée est plus grande que la différence entre les énergies des coeurs (voir (4)) et dans ce cas, c'est la configuration (i) qui l'emporte. Aussi lorsque γ est proche de 1, cette différence d'énergie est très petite, et des vortex fractionnaires s'observent plus souvent.

3. Le coeur des vortex

Une question intéressante se pose lors de l'étude du coeur des vortex, la petite région où Ψ^ε doit dévier du tore Σ afin d'éviter une singularité. En effet, comme Σ est une surface de codimension deux définie par les contraintes $|\Psi|^2 = 1$ et $S = \psi_1 \times \psi_2 = 0$, Ψ peut éviter une singularité de deux façons. Elle peut ne pas satisfaire la première contrainte et s'annuler, ce qui est le cas pour les vortex classiques de Ginzburg–Landau. Mais elle peut aussi se déplacer le long de S^3 de telle sorte que son spin ne soit plus zéro au coeur du vortex.

Les résultats de Shafrir [8] suggèrent que la structure du coeur des vortex ressemble à celle des solutions entières des équations d'Euler–Lagrange dans tout \mathbb{R}^2 . Une analyse des solutions radiales dans \mathbb{R}^2 suggère donc que dans le cas des vortex fractionnaires $\mathbf{n} = [1, 0]$, ou $[0, 1]$, $|\Psi(x)|$ ne devrait *jamais s'annuler* quelle que soit la valeur du paramètre γ . Le vortex $\mathbf{n} = [1, 0]$ devrait avoir un spin positif dans son coeur et le vortex $[0, 1]$, un spin négatif. Nous avons le résultat partiel suivant :

Proposition 3.1. *Il existe des constantes $\gamma_1 < 1 < \gamma_2$ telles que pour tout $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$, pour tout $\rho < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |a_i - a_j|$, et pour tout a_i avec $\mathbf{n}_i = [1, 0]$ ou $[0, 1]$, $|\Psi(x)|$ est borné inférieurement loin de zéro dans $B_\rho(a_i)$.*

Par contre, il est facile de vérifier que les deux composantes ψ_+ , ψ_- doivent toujours s'annuler dans le voisinage d'un vortex $\mathbf{n} = [1, 1]$ (i.e. avec $(d_\phi, d_\omega) = (1, 0)$).

Les théorèmes présentés plus haut, ainsi que d'autres résultats pour des modèles avec spin, sont prouvés en détails dans les articles [1,2], et [3].

Références

- [1] S. Alama, L. Bronsard, Half-integer vortices in superconductors with antiferromagnetic interactions, in preparation.
- [2] S. Alama, L. Bronsard, Vortices and the lower critical field for a Ginzburg–Landau model of superconductors with ferromagnetic interactions, Prépublication, 2003.
- [3] S. Alama, L. Bronsard, On the second critical field for a Ginzburg–Landau model with ferromagnetic interactions, Prépublication, 2003.
- [4] F. Bethuel, H. Brezis, F. Hélein, Ginzburg–Landau Vortices, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [5] T. Isoshima, K. Machida, Axisymmetric vortices in spinor Bose–Einstein condensates under rotation, Phys. Rev. A 66 (2002) 023602.
- [6] A. Knigavko, B. Rosenstein, Spontaneous vortex state and ferromagnetic behavior of type-II p -wave superconductors, Phys. Rev. B 58 (1998) 9354–9364.
- [7] E. Sandier, Lower bounds for the energy of unit vector fields and applications, J. Func. Anal. 152 (1998) 379–403.
- [8] I. Shafrir, L^∞ approximation for minimizers of the Ginzburg–Landau functional, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 321 (1995) 705–710.