Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 105–110

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Champs de vecteurs invariants par translation sur les jacobiennes affines des courbes spectrales

Baohua Fu

Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

Reçu le 17 mars 2003 ; accepté après révision le 3 juin 2003

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

En utilisant des résultats de A. Beauville (Acta Math. 164 (1990) 211–235), nous donnons une description explicite des champs de vecteurs invariants par translation sur les jacobiennes affines des courbes spectrales qui justifie mathématiquement les travaux de F.A. Smirnov and V. Zeitlin (preprint math-ph/0203037). Dans le cas hyperelliptique, cette description est due à D. Mumford (Tata Lectures on Theta, Vol. II, Birkhäuser, Boston, 1983). ***Pour citer cet article : B. Fu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Translation-invariant vector fields on affine Jacobians of spectral curves. Thanks to results of A. Beauville (Acta Math. 164 (1990) 211–235), we give an explicit description of translation-invariant vector fields on affine Jacobians of spectral curves, which gives a mathematical support for the work of F.A. Smirnov and V. Zeitlin (preprint math-ph/0203037). In the hyperelliptic case, this description is due to D. Mumford (Tata Lectures on Theta, Vol. II, Birkhäuser, Boston, 1983). ***To cite this article: B. Fu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Let d be a positive integer. To every polynomial $P(x, y) = y^r + s_1(x)y^{r-1} + \cdots + s_r(x)$ such that $\deg(s_i(x)) \leqslant \mathrm{id}$ for all i, we can associate a spectral curve C, which is the Zariski closure of the affine curve $\{P(x, y) = 0\}$ in the weighted projective plan $\mathbb{P}^2(d)$ (see [3,6,5]). Suppose C is smooth and irreducible and denote its Jacobian and its theta divisor by $J(C)$ and Θ, respectively. Then, by generalizing a construction of Mumford [8], Beauville proved in [3] that the affine Jacobian $J(C) - \Theta$ is isomorphic to the quotient $M_P/\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, where M_P is the set of $r \times r$ matrices, of characteristic polynomial P, with coefficients in the vector space of complex polynomial in one variable of degree $\leqslant d$. The group $\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ acts on M_P by conjugation. Furthermore, a formula for translation-invariant vector fields on this quotient is given (cf. Théorème 2.1).

Adresse e-mail : baohua.fu@polytechnique.org (B. Fu).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00283-8

If we suppose that $\deg(s_i(x)) \leqslant id - 1$, we can avoid the quotient process to obtain a more explicit description of $J(C) - \Theta$ as the sub-variety in M_P^J defined by some explicit equations (cf. Proposition 3.2), where M_P^J denotes the matrices in M_P for which the leading coefficient matrix of x^d is J, the one block Jordan matrix with 0 on the diagonal. The main purpose here is to give an explicit description for translation-invariant vector fields on this sub-variety:

Theorem 0.1. *The translation-invariant vector fields on $J(C) - \Theta$ are generated by the vector fields $D_{k,n}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $0 \leqslant n \leqslant kd-2$, which are defined by the formula (valid for all $a \in \mathbb{P}^1$)*

$$\frac{[A^k(a), A(x)]}{x-a} - \sum_{l=2}^{r} \frac{1}{\beta} h_{rl-1}^{(k)}(a)\big[A(x), J^{l-1}\big] = \sum_{n=0}^{kd-1} a^n D_{k,n}\big(A(x)\big),$$

where $(-1)^{r+1}\beta$ is the coefficient of x^{rd-1} in $s_r(x)$ and $h_{rl-1}^{(k)}(a)$ is the $(r, l-1)$-th element of the matrix $A^k(a)$.

This formula reduces to that of Mumford ([8], Theorem 3.1 of Chapter IIIa) in the hyper-elliptic case. Another method *à la physique* has been proposed by Smirnov and Zeitlin [12]. Nakayashiki and Smirnov [11] used this result to give a conjectural formula for the Euler characteristic of Θ, which has been proved by Nakayashiki [10] in the hyper-elliptic case.

1. Introduction

Soit d un entier positif. À tout polynôme $P(x, y) = y^r + s_1(x)y^{r-1} + \cdots + s_r(x)$ tel que $\deg(s_i(x)) \leqslant id$ pour tout i, on peut associer une courbe complète C, dite spectrale, qui est la fermeture algébrique de la courbe affine $\{P(x, y) = 0\}$ dans l'espace projectif pondéré $\mathbb{P}^2(d)$ (voir [3,6,5]). La géométrie des courbes spectrales (et de leurs jacobiennes) a été beaucoup étudiée au début des années 80 (voir [1,2,6,7,9]).

Supposons que la courbe C soit lisse et irréductible. Notons $J(C)$ la jacobienne de C et Θ le diviseur thêta sur $J(C)$. Alors en généralisant une construction de Mumford [8], Beauville ([3], aussi Théorème 2.1 ci-dessous) a identifié la variété affine $J(C) - \Theta$ au quotient $M_P/\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, où M_P est l'ensemble des matrices d'ordre r à coefficients dans l'espace vectoriel des polynômes complexes à une variable de degré $\leqslant d$, dont le polynôme caractéristique est P. Le groupe $\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur M_P. De plus, il a donné les formules (cf. Théorème 2.1 ci-dessous) pour les champs de vecteurs invariants par translation sur ce quotient.

Si de plus on suppose que $\deg(s_i(x)) \leqslant id - 1$, alors on peut éliminer le passage au quotient pour obtenir une description explicite de $J(C) - \Theta$ (cf. Proposition 3.2 ci-dessous). Le but de cette Note est de donner une formule explicite (cf. Théorème 3.5) pour les champs de vecteurs invariants par translation sur cette description de $J(C) - \Theta$. Cette formule revient à celle de Mumford dans le cas hyperelliptique. Une autre approche *à la physique* a été exploitée par Smirnov et Zeitlin [12]. Dans le papier intéressant [11], Nakayashiki et Smirnov ont utilisé ce résultat pour proposer une formule conjecturale pour la caractéristique d'Euler du diviseur Θ. Celle-ci a été vérifiée par Nakayashiki [10] dans le cas hyperelliptique.

2. Jacobiennes affines des courbes spectrales

Soient r, d deux entiers positifs. Notons S_d l'espace des polynômes complexes à une variable x de degré $\leqslant d$ et $M_r(S_d)$ l'espace des matrices carrées d'ordre r à coefficients dans S_d. Définissons $\Phi : M_r(S_d) \to \mathbb{C}[x, y]$ par $\Phi(A(x)) = \det(y\,\mathrm{Id} - A(x))$. L'image de Φ est contenue dans l'espace des polynômes de la forme $P(x, y) = y^r + s_1(x)y^{r-1} + \cdots + s_r(x)$ avec $\deg(s_i(x)) \leqslant id$. Un tel polynôme est appelé *spectral*. Pour fixer l'entier d, on suppose toujours que d est le plus petit entier tel que $\deg(s_i(x)) \leqslant id$ soit vérifié pour tout i. Si on écrit $A(x) = A_d x^d + A_{d-1}x^{d-1} + \cdots + A_0$ avec $A_i \in \mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})$, alors ceci équivaut à $A_d \neq 0$.

On va maintenant associer une courbe complète C_P au polynôme $P(x, y)$. Considérons l'espace projectif pondéré $\mathbb{P}^2(d) = \mathbb{C}^3 - \{0\}/\mathbb{C}^*$, où l'action de $\mathbb{C}^*$ est $t(x, y, z) = (tx, t^d y, tz)$. Pour $d \geqslant 2$, $\mathbb{P}^2(d)$ est une surface complexe projective avec une singularité au point $[0, 1, 0]$. Le plongement de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2(d)$ donné par $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$ induit un plongement de $Y = \{(x, y) \mid P(x, y) = 0\}$ dans $\mathbb{P}^2(d)_{\text{lisse}}$. Notons C_P la fermeture algébrique de Y dans $\mathbb{P}^2(d)$, qui est en fait contenue dans $\mathbb{P}^2(d)_{\text{lisse}}$. La projection $\pi : \mathbb{P}^2(d)_{\text{lisse}} \to \mathbb{P}^1$ qui envoie $[x, y, z]$ sur $[x, z]$ induit une projection $\pi_P : C_P \to \mathbb{P}^1$. Il est immédiat que π est un revêtement ramifié de degré r. Au-dessus de l'ouvert affine $\mathbb{C}$, π n'est rien d'autre que la première projection $Y \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x$.

Désormais, on suppose que la courbe spectrale C_P est lisse et irréductible. On note C et π au lieu de C_P et π_P. Rappelons que sur la jacobienne $J(C)$ (qui paramétrise les classe de diviseurs de degré $g - 1$ sur C) de la courbe C, il y a un diviseur Θ, qui est l'ensemble des classes des fibrés inversibles L tel que $H^0(C, L) \neq 0$. Il est bien connu que ce diviseur est ample, donc le complementaire $J(C) - \Theta$ est une variété affine. On a une description explicite de cette variété affine.

Théorème 2.1 [3]. (i) *Soit M_P l'ensemble des matrices d'ordre r à coefficients dans S_d dont le polynôme caractéristique est P. Alors la variété affine $J(C) - \Theta$ s'identifie au quotient de M_P par l'action par conjugaison de $\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.*

(ii) *Pour tout $a \in \mathbb{P}^1$ et $i \in \mathbb{N}$, le champ de vecteurs $Y_a^{(i)}(A(x)) = [A^i(a), A(x)]/(x - a)$ est invariant par l'action de $\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. De tels champs de vecteurs commutent entre eux. Leurs images dans $J(C) - \Theta$ engendrent l'espace des champs de vecteurs invariants par translation sur $J(C) - \Theta$.*

En particulier, on remarque que le quotient $J(C) - \Theta$ est lisse, car M_P est lisse et l'action de $\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est propre et libre.

3. Champs de vecteurs invariants par translation

Pour une matrice $J \in \mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})$, on note M_P^J l'ensemble des matrices $A(x)$ dans M_P avec $A_d = J$. Rappelons qu'une matrice $J \in \mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})$ est régulière si tous les sous espaces propres de J sont de dimension 1, ceci équivalant au fait que la matrice J est conjuguée à une matrice de la forme $\mathrm{diag}(J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_s))$ où $J(\lambda_i)$ est un bloc de Jordan pour la valeur propre λ_i avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. La lissité de la courbe C implique le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit $A \in M_P$, alors pour tout $a \in \mathbb{P}^1$, la matrice $A(a)$ est régulière.*

Désormais, on supposera toujours que J est de la forme $\mathrm{diag}(J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_s))$. Ainsi le stabilisateur $\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}, J) = \{R \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \mid RJ = JR\}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{s-1} \times \mathbb{C}^{r-s}$, qui agit proprement et librement sur M_P^J. Le Théorème 2.1 montre que la jacobienne affine $J(C) - \Theta$ est isomorphe au quotient $M_P^J/\mathbb{P}\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}, J)$.

À partir d'ici, nous supposons que le polynôme P est de la forme $P(x, y) = y^r + \sum_{i=1}^r s_i(x) y^{r-i}$ avec $\deg(s_i(x)) \leqslant id - 1$, ainsi $s_i(x) = \sum_{j=0}^{id-1} \gamma_j^i x^j$. Dans ce cas, A_d n'a que zéro comme valeur propre. De plus $A_d = A(\infty)$ est régulière d'après le lemme précédent, donc on peut prendre $J = J(0)$, i.e., la matrice de Jordan à un seul bloc.

Proposition 3.2. *Pour tout $A(x) \in M_P^J$, il existe un et un seul élément $g \in \mathbb{P}\,\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}, J)$ tel que $g^{-1}A(x)g$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x^d + \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & * \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x^{d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} A_i x^i,$$

où $\beta = (-1)^{r+1}\gamma_{rd-1}^r$ et γ_{rd-1}^r est le coefficient de degré $rd-1$ de $s_r(x)$. De plus, β n'est pas nul.

Pour la démonstration, voir par exemple [4]. Cette proposition nous permet de décrire explicitement la variété affine $X = J(C) - \Theta$ comme suit : c'est la sous-variété de M_P^J définie par les équations : $x_{r1}^{d-1} = \beta,\ x_{rs}^{d-1} = 0$ pour tout $s \geqslant 2$. Maintenant nous allons étudier les champs de vecteurs invariants par translation sur cette variété.

Lemme 3.3. *Pour tout $2 \leqslant s \leqslant r$ et pour tout $A(x) \in M_P^J$, le vecteur $V_s = [A(x), J^{s-1}]$ est tangent à l'orbite de l'action de $\mathbb{P}\,\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}, J)$ en $A(x)$.*

Démonstration. Considérons la courbe, dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}, J)$, $c(t) : t \mapsto \mathrm{Id} + tJ^{s-1}$. On voit aisément que le vecteur tangent à la courbe $c^{-1}(t)A(x)c(t)$ au point $A(x)$ n'est rien d'autre que V_s. $\square$

Prenons un élément $A(x) = (f_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ dans M_P^J, où $f_{ij}(x) = \sum_k x_{ij}^k x^k$ et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant r-1$ posons

$$A^k(a) = \bigl(h_{ij}^{(k)}(a)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-a}\bigl[A^k(a), A(x)\bigr] = \bigl(b_{ij}^{(k)}\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant r}.$$

Alors on a le lemme clé suivant :

Lemme 3.4. *Pour tout $2 \leqslant s \leqslant r$ et $1 \leqslant k \leqslant r-1$, l'expression $b_{rs}^{(k)}(x) - \frac{1}{\beta}h_{rs-1}^{(k)}(a)f_{r\,1}(x)$ ne contient que des termes de degré $\leqslant d-2$ en x.*

Démonstration. Notons $z_{ls}^{(k)}$ le coefficient à la position (l, s) de la matrice $[A^k(a), A(x)]$. Alors on a

$$\begin{aligned} z_{ls}^{(k)} &= \sum_{i,i_1,\dots,i_{k-1}} f_{li_1}(a)\cdots f_{i_{k-1}i}(a)f_{is}(x) - \sum_{j,j_1,\dots,j_{k-1}} f_{lj}(x)f_{jj_1}(a)\cdots f_{j_{k-1}s}(a) \\ &= \sum_{i,i_1,\dots,i_{k-1}} \bigl(f_{li_1}(a)f_{is}(x) - f_{li_1}(x)a_{is}(a)\bigr)f_{i_1i_2}(a)\cdots f_{i_{k-1}i}(a) \\ &= \sum_{i,i_1}\bigl(f_{li_1}(a)f_{is}(x) - f_{li_1}(x)f_{is}(a)\bigr)h_{i_1i}^{(k-1)}(a). \end{aligned}$$

Posons

$$G(a,x) := f_{li_1}(a)f_{is}(x) - f_{li_1}(x)f_{is}(x) = \sum_{j,j'} x_{li_1}^j x_{is}^{j'}\bigl(a^j x^{j'} - a^{j'}x^j\bigr).$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{G(a,x)}{x-a} &= \sum_{0\leqslant j'<j\leqslant d} \bigl(x_{li_1}^{j'}x_{is}^j - x_{li_1}^j x_{is}^{j'}\bigr)\left(\frac{a^{j'}x^j - a^j x^{j'}}{x-a}\right) \\ &= \sum_{0\leqslant j'<j\leqslant d} \bigl(x_{li_1}^{j'}x_{is}^j - x_{li_1}^j x_{is}^{j'}\bigr)\left(\sum_{t=0}^{j-j'-1} a^{j'+t}x^{j-1-t}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{d-1} a^n \sum_{m=0}^{d-1} x^m \sum_{\substack{j'+j=n+m+1 \\ j' \leqslant \min\{n,m\} \\ j \geqslant \max\{m,n\}+1}} \bigl(x_{li_1}^{j'} x_{is}^{j} - x_{li_1}^{j} x_{is}^{j'}\bigr).$$

Pour le passage à la dernière équation, j'ai posé $n = j' + t$ et $m = j - t - 1$.

Donc on a

$$b_{ls}^{(k)}(x) = \frac{z_{ls}^{(k)}}{x-a} = \sum_{m=0}^{d-1} x^m \sum_{n=0}^{d-1} a^n \sum_{\substack{j'+j=n+m+1 \\ j' \leqslant \min\{n,m\} \\ j \geqslant \max\{m,n\}+1}} \bigl(x_{li_1}^{j'} x_{is}^{j} - x_{li_1}^{j} x_{is}^{j'}\bigr) h_{i_1 i}^{(k-1)}(a).$$

Considérons le cas $l = r$ et $s \geqslant 2$. Ce qui nous intéresse est le coefficient de x^{d-1}. Dans ce cas, $m = d-1$ et la somme sur j', j ne contient qu'un seul terme $j' = n$ et $j = d$. Comme $x_{ri_1}^d = 0$ pour tout i_1 et $x_{is}^d = 1$ si $i = s-1$ et 0 sinon, on a

$$\begin{aligned} b_{rs}^{(k)}(x) &= x^{d-1} \sum_{i_1} \sum_{n} a^n x_{ri_1}^n h_{i_1\, s-1}^{(k-1)}(a) + \text{termes de degré} \leqslant d-2 \text{ en } x \\ &= x^{d-1} \sum_{i_1} f_{ri_1}(a) h_{i_1\, s-1}^{(k-1)}(a) + \text{termes de degré} \leqslant d-2 \text{ en } x \\ &= h_{rs-1}^{(k)}(a) x^{d-1} + \text{termes de degré} \leqslant d-2 \text{ en } x. \end{aligned}$$

D'autre part, on voit que

$$\frac{1}{\beta} h_{rs-1}^{(k)}(a) f_{r1}(x) = h_{rs-1}^{(k)}(a) x^{d-1} + \text{termes de degré} \leqslant d-2 \text{ en } x,$$

donc $b_{rs}^{(k)}(x) - \frac{1}{\beta} h_{rs-1}^{(k)}(a) f_{r1}(x)$ ne contient que des termes de degré $\leqslant d-2$ en x, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.5. *La sous-variété affine X de M_P^J définie par les équations $x_{r1}^{d-1} = \beta$, $x_{rs}^{d-1} = 0$, $s = 2, \ldots, r$ est isomorphe à la jacobienne affine $J(C) - \Theta$ et les champs de vecteurs invariants par translation sur $J(C) - \Theta$ sont engendrés par les champs de vecteurs $D_{k,n}$, $1 \leqslant k \leqslant r-1$, $0 \leqslant n \leqslant kd-2$, donnés par*

$$\frac{[A^k(a), A(x)]}{x-a} - \sum_{l=2}^{r} \frac{1}{\beta} h_{r\,l-1}^{(k)}(a) \bigl[A(x), J^{l-1}\bigr] = \sum_{n=0}^{kd-1} a^n D_{k,n}\bigl(A(x)\bigr).$$

Démonstration. Un calcul simple nous donne le coefficient à la position (r,s) de la matrice membre de gauche de l'équation du théorème,

$$b_{rs}^{(k)}(x) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{s-1} h_{rs-i}^{(k)}(a) f_{r\,i}(x) = b_{rs}^{(k)}(x) - \frac{1}{\beta} h_{rs-1}^{(k)}(a) f_{r\,1}(x) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=2}^{s-1} h_{rs-i}^{(k)}(a) f_{r\,i}(x).$$

En remarquant que $\deg(f_{ri}(x)) \leqslant d-2$ pour tout $i \geqslant 2$, le Lemme 3.4 nous montre que cette expression ne contient que des termes de degré $\leqslant d-2$. En conclusion ces champs de vecteurs sont tangents à la sous-variété X de M_P^J définie par $x_{r1}^{d-1} = \beta$, $x_{rs}^{d-1} = 0$ pour $s \geqslant 2$. Selon le Théorème 2.1 et le Lemme 3.3, on a que les images de tels champs de vecteurs dans $J(C) - \Theta$ engendrent l'espace des champs de vecteurs invariants par translation sur $J(C) - \Theta$. □

Dans le cas hyperelliptique (i.e., $r = 2$), on retrouve exactement la formule démontrée par Mumford dans [8] (Chapter IIIa, Théorème 3.1).

En utilisant la méthode de séparation des variables, Smirnov et Zeitlin ont étudié ces champs de vecteurs dans [12]. Puis Nakayashiki et Smirnov [11] ont proposé la formule conjecturale suivante pour la caractéristique d'Euler du diviseur Θ dans la jacobienne de la courbe spectrale C :

$$\chi(\Theta) = (-1)^{g-1} r^{dr^2-2r+1} (rd-1)^{r-1} \big(\Gamma(r)\big)^2 \prod_{j=1}^{r-1} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(rd+j)} \left(\frac{\Gamma((jrd-j)/r)}{\Gamma(j/r)}\right)^2.$$

Dans le cas hyperelliptique, cette formule a été vérifiée par Nakayashiki [10] en utilisant une approche différente.

Remerciements

Je tiens à remercier A. Beauville, J. Le Potier, A. Nakayashiki, F. A. Smirnov et V. Zeitlin pour les discussions enrichissantes que j'ai eues avec eux. Je remercie R. Pellissier et l'expert pour m'avoir aidé à améliorer la présentation de ce manuscrit.

Références

[1] M. Adler, P. van Moerbeke, Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves, Adv. Math. 38 (1980) 267–317.
[2] M. Adler, P. van Moerbeke, Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, Adv. Math. 38 (1980) 318–379.
[3] A. Beauville, Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables, Acta Math. 164 (1990) 211–235.
[4] R. Donagi, E. Markman, Spectral covers, algebraically completely integrable, Hamiltonian systems, and moduli of bundles, in : Integrable Systems and Quantum Groups, Montecatini Terme, 1993, in : Lecture Notes in Math., Vol. 1620, Springer, Berlin, 1996, pp. 1–119.
[5] L. Gavrilov, Generalized Jacobians of spectral curves and completely integrable systems, Math. Z. 230 (1999) 487–508.
[6] P.A. Griffiths, Linearizing flow and a cohomological interpretation of Lax equations, Amer. J. Math. 107 (1985) 1445–1483.
[7] P. van Moerbeke, D. Mumford, The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta Math. 143 (1979) 93–154.
[8] D. Mumford, Tata Lectures on Theta, Vol. II, Birkhäuser, Boston, 1983.
[9] D. Mumford, An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related nonlinear equation, in : Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, pp. 115–153.
[10] A. Nakayashiki, On the cohomology of theta divisors of hyperelliptic Jacobians, Preprint, math.AG/0010006.
[11] A. Nakayashiki, F.A. Smirnov, Euler characteristics of theta divisors of Jacobians for spectral curves, in : The Kowalevski property (Leeds, 2000), in : CRM Proc. Lecture Notes, Vol. 32, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, pp. 239–246.
[12] F.A. Smirnov, V. Zeitlin, Affine Jacobians of spectral curves and integrable models, Preprint, math-ph/0203037.