Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 115–118
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Processus linéaires vectoriels et prédiction

Denis Bosq

LSTA, Université Pierre et Marie Curie, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 25 mars 2003 ; accepté après révision le 27 mai 2003

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Nous étudions les processus linéaires hilbertiens à partir d'une définition basée sur la décomposition de Wold, et utilisant les sous-espaces clos au sens de Fortet.

Les processus considérés sont alors de la forme

$$X_n = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\varepsilon_{n-j}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

où (ε_n) est un bruit blanc hilbertien et (λ_j) une suite d'opérateurs linéaires éventuellement *non bornés*. Nous fournissons une condition nécessaire et suffisante pour que λ_j soit bornée.

Des modèles particuliers (autorégressifs, moyennes mobiles) sont envisagés et des exemples spécifiques sont donnés. ***Pour citer cet article : D. Bosq, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Linear functional processes and prediction. We study linear processes in Hilbert spaces in the context of linearly closed subspaces in the sense of Fortet. ***To cite this article: D. Bosq, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

We discuss a general definition of linear processes in Hilbert spaces that takes into account the outstanding role played by this model in prediction theory.

Actually this definition is based on the Wold decomposition of a weakly stationary process (X_n) with values in a Hilbert space H. It leads to processes of the form

$$X_n = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\varepsilon_{n-j}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

Adresse e-mail : bosq@ccr.jussieu.fr (D. Bosq).

1631-073X/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00274-7

where (ε_n) is a H-white noise and (λ_j) a sequence of (possibly) *unbounded* linear operators. A necessary and sufficient condition for boundedness of λ_j is given.

As applications we study general H-moving average processes, H-autoregressive processes and H-Markov processes in the wide sense.

Specific examples are given.

1. Projection sur un sous-espace clos

Soit $(H, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel séparable et $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ l'espace des opérateurs linéaires continus de H dans H muni de sa norme usuelle. $L^2_H = L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est muni de son produit scalaire $\mathrm{E}\langle X, Y\rangle$. Pour $X, Y \in L^2_H$ on définit l'opérateur de covariance croisée $C_{X,Y} = \mathrm{E}(\langle X, \cdot\rangle Y)$ et l'opérateur de covariance $C_X(\cdot) = C_{X,X}(\cdot)$. Dans la suite les v.a. sont supposées centrées, sauf avis contraire.

Suivant Fortet [4] on dit que $\mathcal{G}$, sous-espace vectoriel fermé de L^2_H, est *clos* si $X \in \mathcal{G}$, $\ell \in \mathcal{L}$ entraînent $\ell(X) \in \mathcal{G}$. Le sous-espace clos engendré par une famille $(Z_i,\ i \in I)$ d'éléments de L^2_H est noté $c(Z_i,\ i \in I)$ et son projecteur orthogonal $\Pi^{c(Z_i)}$. Si $\mathcal{G}$ est clos et $Y \perp \mathcal{G}$ alors $C_{X,Y} = 0$ pour tout X dans $\mathcal{G}$ (orthogonalité forte).

Modifiant légèrement une définition de Fortet [4] on dit que A est dominé par B $(A \prec B)$ s'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\|A(x)\| \leqslant \alpha \|B(x)\|$, $x \in H$, $(A, B \in \mathcal{L})$.

Lemme 1.1. *$A \prec B$ si et seulement si il existe $R \in \mathcal{L}$ tel que $A = RB$. La condition $R = 0$ sur $B(H)^{\perp}$ assure l'unicité de R.*

Maintenant si $X, Y \in L^2_H$ on a $\Pi^{(X)}(Y) = \lambda(X)$ (p.s.) où λ n'est pas nécessairement continue. En appliquant le Lemme 1 on obtient la

Proposition 1.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

$$C_{X,Y} \prec C_X, \tag{2}$$

$$(\exists \ell \in \mathcal{L}):\ \Pi^{c(X)} Y = \ell(X) \quad \textit{(p.s.)}. \tag{3}$$

Corollaire 1.3. *Soit (Z_n) une suite de H-variables aléatoires deux à deux fortement orthogonales et soit $Y \in L^2_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

$$C_{Z_n,Y} \prec C_{Z_n}, \quad n \geqslant 1, \tag{4}$$

$$\Pi^{c((Z_n))}(Y) = \sum_{n \geqslant 1} \ell_n(Z_n) \quad \textit{où } \ell_n \in \mathcal{L},\ n \geqslant 1. \tag{5}$$

2. Décomposition de Wold et H-processus linéaires

Soit (X_n) un H-processus (faiblement) stationnaire (i.e. $C_{X_t, X_{t+h}} = C_h$, $t \in \mathbb{Z}$; $h \in \mathbb{Z}$). On pose

$$\varepsilon_n = X_n - \Pi^{\mathcal{M}_{n-1}}(X_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

où $\mathcal{M}_{n-1} = c(X_s,\ s \leqslant n-1)$. Si (X_n) est régulier (i.e. $\sigma^2 = \mathrm{E}\|\varepsilon_n\|^2 > 0$), alors (ε_n) est un H-bruit blanc ($\mathrm{E}\,\varepsilon_n = 0$, $C_{\varepsilon_n,\varepsilon_m} = \delta_{n,m} C_{\varepsilon_0}$) et c'est l'innovation de (X_n).

Soit $\mathcal{J}_n$ le sous-espace clos engendré par ε_s, $s \leqslant n$, la *décomposition de Wold* de (X_n) s'écrit

$$X_n = \Pi^{\mathcal{J}_n}(X_n) + \Pi^{\mathcal{J}_n^{\perp}}(X_n), \tag{7}$$

avec des propriétés analogues à celles qui figurent dans [3] pour le cas réel.

Lemme 2.1. *Soit (X_n) un H-processus stationnaire régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

$$X_n = \Pi^{\mathcal{J}_n}(X_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{J}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$\Pi^{\mathcal{M}_{n-1}}(X_n) = \Pi^{\mathcal{J}_{n-1}}(X_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Définition 2.2. Un H-processus stationnaire régulier est dit *linéaire* s'il vérifie (8), (9) ou (10).

Le processus s'écrit alors sous la forme (1). Si les (ε_n) sont équidistribués les λ_j ne dépendent pas de n. On retrouve la définition usuelle si et seulement si $C_{\varepsilon_{n-j},X_n} \prec C_{\varepsilon_{n-j}}$, $j \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$ (cf. le Corollaire 1).

Exemple 1. Étant donnée une suite de processus linéaires réels :

$$X_{n,k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} X_{n-j,k} + \varepsilon_{n-j,k}, \quad n \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 1,$$

on pose $X_n = (X_{n,k},\ k \in \mathbb{Z})$ et $\varepsilon_n = (\varepsilon_{n,k};\ k \in \mathbb{Z})$. Sous des conditions faciles à formuler la suite (X_n) est un processus linéaire à valeurs dans ℓ^2, associé au ℓ^2-bruit blanc (ε_n). Les λ_j ne sont pas bornés en général (prendre $a_{j,k} = k/j$ et $V\varepsilon_{n,k} = 1/k^4$).

3. Moyennes mobiles hilbertiennes

Une moyenne mobile hilbertienne d'ordre q ($MMH(q)$) est un processus linéaire tel que

$$\Pi^{\mathcal{M}_{n-1}}(X_n) = \Pi^{c(\varepsilon_{n-j},\ 1 \leqslant j \leqslant q)}(X_n), \tag{11}$$

et

$$\Pi^{c(\varepsilon_{n-q})}(X_n) \text{ est non dégénérée.} \tag{12}$$

Une $MMH(q)$ au sens large vérifie seulement (11).

Proposition 3.1. *Un processus stationnaire régulier à valeurs dans H est une $MMH(q)$ si et seulement si son autocovariance vérifie $C_h = 0$, $h > q$; $C_q \neq 0$.*

Le corollaire suivant est utile pour étudier l'autocovariance empirique d'une $MMH(q)$.

Corollaire 3.2. *Soit (X_n) une $MMH(q)$ associée à une différence de martingale strictement stationnaire (ε_n), et telle que* $\mathrm{E}\,\|X_0\|^4 < \infty$. *Alors, si $(\varepsilon_n \otimes \varepsilon_n - C_{\varepsilon_n})$ est une différence de martingale dans l'espace de Hilbert $\mathcal{S}$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur H, $(X_n \otimes X_n - C_{X_0})$ est une $MM\mathcal{S}(q)$ au sens large.*

Exemple 2 (*Représentation moyenne mobile d'un processus d'Ornstein–Uhlenbeck tronqué*). On définit le processus d'Ornstein–Uhlenbeck tronqué en posant

$$\xi_t = \int_{\{t\}-q}^{t} \mathrm{e}^{-\theta(t-s)}\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in \mathbb{R}\ (\theta > 0),$$

où W est un processus de Wiener bilatéral (cf. [1]), $q \geqslant 1$ un entier, et $\{t\}$ le plus petit entier $\geqslant t-1$. Alors $X_n(t) = \xi_{n+t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $n \in \mathbb{Z}$ définit une $MMH(q)$ dans l'espace $L^2([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda + \delta_{(1)})$ où λ est la mesure de Lebesgue.

Exemple 3. Sur $H = L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}, \mu)$ où μ est la mesure de densité e^{-t}, $t \geqslant 0$, on considère le sous-espace $\mathcal{C}$ des éléments de H dont une version x admet une dérivée x' uniformément continue et de carré intégrable. Alors l'application $T : x \to cx'$ n'est pas continue.

Si (ε_n) est un H-bruit blanc à trajectoires dans $\mathcal{C}$, le processus

$$X_n = \varepsilon_n + c\varepsilon'_{n-1} = \varepsilon_n + T(\varepsilon_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

est cependant une moyenne mobile au sens large car $T(\varepsilon_{n-1}) \in c(\varepsilon_{n-1})$.

4. Processus autorégressifs hilbertiens

On dit que (X_n) est un processus autorégressif hilbertien d'ordre p (*ARH*(p)) s'il est stationnaire régulier et tel que

$$\Pi^{\mathcal{M}_{n-1}}(X_n) = \Pi^{\mathcal{M}_{n-1}^p}(X_n), \tag{13}$$

où $\mathcal{M}_{n-1}^p = c(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p})$, et si, pour $p > 1$,

$$\mathrm{E}\left\|\Pi^{\mathcal{M}_{n-1}^p}(X_n) - \Pi^{\mathcal{M}_{n-1}^{p-1}}(X_n)\right\| > 0. \tag{14}$$

Exemple 4. Un processus d'Ornstein–Uhlenbeck (non tronqué) a une représentation *ARH*(1) (cf. [2]).

D'autre part, un H-processus (X_n) du second ordre est dit Markovien au sens large (*MSL*) si

$$\Pi^{c(X_{r_1}, \ldots, X_{r_k}, X_s)}(X_t) = \Pi^{c(X_s)}(X_t), \tag{15}$$

$k \geqslant 1$, $r_1 < \cdots < r_k < s < t$.

On pose

$$\lambda_{s,t} = \lambda_{X_t}^{X_s}, \quad s < t,$$

où $\lambda_{X_t}^{X_s}$ est une application mesurable telle que

$$\lambda_{X_t}^{X_s}(X_s) = \Pi^{c(X_s)}(X_t).$$

Alors

Proposition 4.1. *Un H-processus (X_n) est Markovien au sens large si et seulement si*

$$\lambda_{r,t} = \lambda_{s,t} \cdot \lambda_{r,s} \quad \text{sur } C_{X_r}(H),\ r < s < t.$$

Corollaire 4.2. *Un H-processus (X_n) strictement stationnaire, du second ordre est MSL si et seulement si*

$$\lambda_k = \lambda_1^k \quad \text{sur } C_{X_0}(H),\ k \geqslant 1,$$

où $\lambda_k = \lambda_{s,s+k}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 4.3. (a) *Un MSL strictement stationnaire, du second ordre et régulier est un ARH*(1).

(b) *Un ARH*(1) *strictement stationnaire est MSL.*

(c) *Un ARH*(1) *standard* (*cf.* [2]) *est MSL.*

Références

[1] R.B. Ash, M.F. Gardner, Topics in Stochastic Processes, Academic Press, New York, 1975.
[2] D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications, in: Lecture Notes in Statist., Vol. 149, 2000.
[3] P.J. Brockwell, R.A. Davis, Times Series: Theory and Methods, 2è édition, Springer-Verlag, New York, 1991.
[4] R.M. Fortet, Vecteurs, fonctions et distributions aléatoires dans les espaces de Hilbert, Hermes, Paris, 1995.