Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 919–924
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse harmonique

Des équations de Dirac et de Schrödinger pour la transformation de Fourier

Jean-François Burnol

Université Lille 1, UFR de mathématiques, cité scientifique M2, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 21 février 2003 ; accepté le 22 avril 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Dyson a associé aux déterminants de Fredholm des noyaux de Dirichlet pairs (resp. impairs) une équation de Schrödinger sur un demi-axe et a employé les méthodes du scattering inverse de Gel'fand–Levitan et de Marchenko, en tandem, pour étudier l'asymptotique de ces déterminants. Nous avons proposé suite à notre mise-au-jour de l'opérateur conducteur de chercher à réaliser la transformation de Fourier elle-même comme un scattering, et nous obtenons ici dans ce but deux systèmes de Dirac sur l'axe réel tout entier et qui sont associés intrinsèquement, respectivement, aux transformations en cosinus et en sinus. ***Pour citer cet article : J.-F. Burnol, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Dirac and Schrödinger equations for the Fourier transform. Dyson has associated with the Fredholm determinants of the even (resp. odd) Dirichlet kernels a Schrödinger equation on the half-axis and has used, in tandem, the Gel'fand–Levitan and Marchenko methods of inverse scattering theory to study the asymptotics of these determinants. We have proposed following our unearthing of the conductor operator to seek to realize the Fourier transform itself as a scattering, and we obtain here to this end two Dirac systems on the entire real axis which are intrinsically associated, respectively, to the cosine and to the sine transforms. ***To cite this article: J.-F. Burnol, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Dyson [14] has associated with the Dirichlet kernels

$$D_s^{\pm}(x,y) = \frac{\sin(s(x-y))}{\pi(x-y)} \pm \frac{\sin(s(x+y))}{\pi(x+y)} \tag{1}$$

on $(0,1)$ two Schrödinger equations on $(0,+\infty)$ whose potentials are given as: $W_{\pm}(s) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\log D_{\pm}(s) - 1$. In this definition the $D_{\pm}(s)$ are the Fredholm determinants $\det(\delta(x-y) - D_s^{\pm}(x,y))$ associated with the (trace-class) kernels above. After establishing a general link between the methods of Gel'fand–Levitan on one hand,

Adresse e-mail : burnol@agat.univ-lille1.fr (J.-F. Burnol).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00223-1

of Marchenko on the other hand, and the study of Fredholm determinants, Dyson obtained in this particular case the existence of an asymptotic development as $s \to \infty$ of $\log D_\pm(s)$, thus extending the earlier result of des Cloizeaux and Mehta [11] which is: $\log D_\pm(s) = -\frac{s^2}{4} \mp \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}\log s + C_\pm + \mathrm{o}(1)$, and another argument enabled Dyson to give the values for the constants $C_\pm$. Except for that last point, still in need of rigorous proof, des Cloizeaux–Mehta's and Dyson's results have been later also established by Deift, Its and Zhou [12] in the framework of a Riemann–Hilbert approach (see also [18] for the earlier mathematically rigorous proof by Widom of $\log D_+(s)D_-(s) = -\frac{s^2}{2}(1+\mathrm{o}(1))$).

Our discovery [3] of the local operator theoretic content of the explicit formulae of Number Theory led us to propose to realize the Fourier transform itself as a scattering [6]. The multiplicative Fourier analysis of the additive Fourier transform leads to two unit modulus functions on the critical line $\chi_+(s)$ and $\chi_-(s)$, the first corresponding to the cosine transform, and the second to the sine transform. But their phases are of the order $\gamma \log|\gamma|$ $(s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma)$ and this escapes the framework of scattering "matrices" for potentials which satisfy the usual hypotheses of the Gel'fand–Levitan and Marchenko methods.

We associate in this Note to the cosine transform (resp. sine transform) a differential system which, as in [14], involves the Fredholm determinants $D_\pm(s)$. To express it as a Dirac system, we shall use, not the variable $s = 2\pi a^2 \in (0,\infty)$, but rather the variable $u = \log(a) \in (-\infty,+\infty)$. Let us thus define $D_a^\pm$, $a > 0$ to be the Dirichlet kernel as above for $s = 2\pi a^2$ and let $d_a^\pm = \det(1 - D_a^\pm)$ and $d_\pm(u) = d_a^\pm$, $a = \exp(u)$, $u \in \mathbb{R}$. We propose the following Dirac-type system:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\alpha(u) = -\sqrt{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log d_\pm(u)}\cdot\alpha(u) - \gamma\beta(u), \tag{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\beta(u) = +\sqrt{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log d_\pm(u)}\cdot\beta(u) + \gamma\alpha(u). \tag{2b}$$

The real number γ is the spectral parameter. Let $\mu_\pm(u) = \sqrt{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log d_\pm(u)}$. Each component $\alpha(u)$ and $\beta(u)$ has its own Schrödinger equation. These equations are related through a Darboux transformation, and they take the form:

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\alpha(u) + \big(\mu_\pm^2(u) - \mu_\pm'(u)\big)\alpha(u) = \gamma^2\alpha(u), \qquad -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\beta(u) + \big(\mu_\pm^2(u) + \mu_\pm'(u)\big)\beta(u) = \gamma^2\beta(u). \tag{3}$$

See also (15a), (15b), (16a), (16b), for alternative expressions. The potentials arising in (3) are exponentially increasing as $u \to +\infty$ and exponentially vanishing as $u \to -\infty$. We have studied the scattering (rather, reflection) induced by (3) on waves originating at $-\infty$ and being bounced back to $-\infty$ and we have established that the corresponding phase shifts realize (in the manner indicated above) the Fourier cosine and sine transforms as scattering matrices. The French text gives indications regarding the precise statement and proof. A detailed treatment will appear elsewhere. Here, we explain how we obtain the systems (2) together with their special solutions: the structure functions of certain Hilbert spaces of entire functions which had been associated by de Branges to the Fourier transform [1]. We gave their first explicit formulae in [10] and we give here their associated differential systems (2): these systems turn out to involve the determinants $d_\pm(u)$, a fact which thus establishes a link between the theory of the de Branges Sonine spaces and the quantities arising in the study of the random matrices [16]. In [8] we linked through the co-Poisson formula the study of the Riemann zeta function to the Sonine spaces. As the reader will perceive, reference [2] plays only a distant rôle here. This is despite the fact that we consider most beautiful the de Branges discovery [1] of the existence of a natural isometric expansion for Fourier self-or-skew-reciprocal functions, and that we are aware of the rich contents of his general theory [2]. We are also aware of the rich relations it holds with other works, such as the investigations of Krein (see, for example, [13]), relations which are not that easily perceived from [2]. Rather, to reach a better understanding of the de Branges Fourier Sonine spaces became a goal for us after [7]; initial progress towards this was obtained in [10], and the further information which is obtained here seems to provide an opportunity to partially realize some of the ideas which are internal to our approach of the problems of the zeta function and which we have expressed elsewhere [3,6–8].

1. Un système différentiel

Nous continuons la discussion entamée dans la partie en langue anglaise du système de Dirac (2) et des équations de Schrödinger (3) associées. Nous utiliserons les notations suivantes : la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ agit selon $\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy} f(x)\,\mathrm{d}x$. On a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathrm{i}\mathcal{F}_-$ où $\mathcal{F}_+$ est la transformation en cosinus et $\mathcal{F}_-$ est la transformation en sinus. Soit $a > 0$. Nous utiliserons l'opérateur P_a de restriction à l'intervalle $[-a, a]$, ainsi que les opérateurs $\mathcal{F}_a^+ = \mathcal{F}_+ P_a$, $F_a^+ = P_a \mathcal{F}_+ P_a$, $D_a^+ = (F_a^+)^2$, $\mathcal{F}_a^- = \mathcal{F}_- P_a$, $F_a^- = P_a \mathcal{F}_- P_a$, $D_a^- = (F_a^-)^2$. Les opérateurs F_a^+ et D_a^+ (resp. F_a^- et D_a^-) peuvent être vus au choix comme agissant sur $L^2(-a, a; \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x)$, sur son sous-espace pair (resp. impair), ou après un changement d'échelle sur $L^2(-1, 1; \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x)$ ou encore sur $L^2(0, 1; \mathrm{d}x)$. Dans cette dernière représentation le noyau de l'opérateur $D_a^\pm$ est donné par :

$$\frac{\sin(2\pi a^2(x-y))}{\pi(x-y)} \pm \frac{\sin(2\pi a^2(x+y))}{\pi(x+y)}. \tag{4}$$

Considérons les uniques fonctions ϕ_a^+ et ϕ_a^- solutions (disons, localement intégrables) des équations :

$$\phi_a^+ + \mathcal{F}_a^+ \phi_a^+ = 2\cos(2\pi a x), \tag{5a}$$

$$\phi_a^- - \mathcal{F}_a^+ \phi_a^- = 2\cos(2\pi a x). \tag{5b}$$

Ce sont des fonctions paires, entières. Nous mentionnons également les fonctions impaires qui sont associées à la transformation en sinus. Elles vérifient : $\psi_a^+ + \mathcal{F}_a^- \psi_a^+ = 2\sin(2\pi a x)$, et $\psi_a^- - \mathcal{F}_a^- \psi_a^- = 2\sin(2\pi a x)$.

Pour être spécifique nous considérerons ici la transformation en cosinus, la discussion étant essentiellement identique pour la transformation en sinus. Soit $\delta_x = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}$. Un calcul simple aboutit au système différentiel suivant :

$$a\frac{\partial}{\partial a}\phi_a^+ = \delta_x \phi_a^- - \left(\frac{1}{2} + a\phi_a^+(a) + a\phi_a^-(a)\right)\phi_a^+, \tag{6a}$$

$$a\frac{\partial}{\partial a}\phi_a^- = \delta_x \phi_a^+ - \left(\frac{1}{2} - a\phi_a^+(a) - a\phi_a^-(a)\right)\phi_a^-. \tag{6b}$$

La démonstration consiste à montrer que $a\frac{\partial}{\partial a}\phi_a^+ - \delta_x\phi_a^-$ et $a\frac{\partial}{\partial a}\phi_a^- - \delta_x\phi_a^+$ satisfont aussi les Éqs. (5) à des facteurs multiplicatifs près qui sont comme indiqués. La quantité $a\phi_a^+(a) + a\phi_a^-(a)$ jouant un rôle important nous la désignerons par $\mu(a)$. On établit sans peine comme conséquence de (6) : $\frac{\partial}{\partial a} a\phi_a^+\phi_a^- = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} x((\phi_a^+)^2 + (\phi_a^-)^2)$ et à partir de là la formule suivante :

$$\mu(a)^2 = a^2\big(\phi_a^+(a) + \phi_a^-(a)\big)^2 = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} a\int_{-a}^{a} \phi_a^+(x)\phi_a^-(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

2. Le lien avec les déterminants de Fredholm

Par une formule connue de la théorie générale des déterminants de Fredholm :

$$\phi_a^+(a) = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log\det\big(1 + F_a^+\big), \qquad \phi_a^-(a) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log\det\big(1 - F_a^+\big), \tag{8}$$

Ainsi, on a aussi :

$$\mu(a) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log\frac{\det(1 + F_a^+)}{\det(1 - F_a^+)}. \tag{9}$$

Nous relions maintenant $\mu(a)$ au déterminant de Fredholm $\det(1-D_a^+)$. Par une formule bien connue on a : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log d_a^+ = -\operatorname{Tr}((1-D_a^+)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}D_a^+)$. Or le calcul immédiat du noyau de la dérivée de D_a^+ montre qu'il s'agit d'un opérateur de rang un, et donc que $(1-D_a^+)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}D_a^+$ l'est également. Son vecteur propre est donné par la fonction $(1-D_a^+)^{-1}(2\cos(2\pi a^2x))$ (nous sommes ici sur $[0,1]$), et on trouve que la valeur propre est égale au produit scalaire de cette fonction avec $(2a)2\cos(2\pi a^2x)$. En faisant usage de la factorisation $1-D_a^+ = (1+F_a^+)(1-F_a^+)$ et du caractère auto-adjoint de ces opérateurs on obtient finalement la formule : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log d_a^+ = -\int_{-a}^{a}\phi_a^+(x)\phi_a^-(x)\,\mathrm{d}x$, où l'on est revenu à l'intervalle $[-a,a]$.

La comparaison avec (7), (8), permet donc d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $d_+(u) = d_a^+ = \det(1-D_a^+)$, et $\mu_+(u) = \mu(a)$ pour $a = \exp(u)$, $u \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\mu_+^2(u) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log d_+(u), \tag{10}$$

$$\mu_+^2(u) - \mu_+'(u) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\det\big(1+F_a^+\big), \tag{11}$$

$$\mu_+^2(u) + \mu_+'(u) = -2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\det\big(1-F_a^+\big). \tag{12}$$

Dans (2), on a écrit $\sqrt{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log d_+(u)}$ pour désigner la fonction $u \mapsto \mu_+(u) = \mu(e^u)$.

3. Le système différentiel des distributions A_a et B_a

Les fonctions ϕ_a^+ et ϕ_a^- sont aussi des distributions tempérées dont on peut prendre la transformée de Fourier. On vérifie de suite que les distributions tempérées paires :

$$A_a = \frac{\sqrt{a}}{2}\big(\mathcal{F}(\phi_a^+) + \phi_a^+\big), \tag{13a}$$

$$B_a = \frac{\mathrm{i}\sqrt{a}}{2}\big(\mathcal{F}(\phi_a^-) - \phi_a^-\big) \tag{13b}$$

ont la propriété remarquable de s'annuler dans $]-a,a[$ tout comme leurs transformées de Fourier puisque A_a est invariante et B_a est anti-invariante. Or un théorème général [10, Théorème 2.1] nous dit que toute distribution D (paire ou impaire) ayant cette propriété a comme transformée de Mellin droite $\int_0^\infty D(t)t^{-s}\,\mathrm{d}t$ (a priori définie pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$) une fonction entière de s qui a des zéros triviaux en $s=-2n$, $n \in \mathbb{N}$ ($-1-2n$, dans le cas impair). Nous noterons $\mathcal{A}_a(s)$ et $\mathcal{B}_a(s)$ les transformées de Mellin de A_a et B_a, complétées par le facteur Gamma $\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$. Nous avons démontré dans [10] que ces fonctions entières sont en fait les fonctions de structure (dans une certaine normalisation) de certains espaces de Hilbert de fonctions entières que de Branges a associé à la transformation de Fourier [1]. Avec nos conventions, l'axe de symétrie de ces espaces est la droite critique, et donc par ce fait même, les fonctions entières $\mathcal{A}_a$ et $\mathcal{B}_a$ vérifient l'hypothèse de Riemann. Nous avons aussi montré que la densité de leurs zéros est au premier ordre identique à celle pour les zéros de la fonction dzêta de Riemann [9].

Cela étant dit, à partir du système différentiel (6) on obtient : $a\frac{\partial}{\partial a}A_a = \mathrm{i}\delta_x B_a - \mu(a)A_a$, et $a\frac{\partial}{\partial a}B_a = -\mathrm{i}\delta_x A_a + \mu(a)B_a$. Au niveau des transformées de Mellin droites on a $\delta_x = s - \frac{1}{2} = \mathrm{i}\gamma$. On obtient donc : $a\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{A}_a = -\gamma\mathcal{B}_a - \mu(a)\mathcal{A}_a$, et $a\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{B}_a = +\gamma\mathcal{A}_a + \mu(a)\mathcal{B}_a$.

Nous poserons $\mathcal{A}^s(u) = \mathcal{A}_a(s)$, $\mathcal{B}^s(u) = \mathcal{B}_a(s)$, $\mu_+(u) = \mu(a)$ avec $a = \exp(u)$, $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$. Ainsi :

Théorème 3.1. *Les fonctions $\mathcal{A}^s(u)$ et $\mathcal{B}^s(u)$ de la variable $u \in \mathbb{R}$ vérifient le système différentiel suivant* ($s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathcal{A}^s(u) = -\gamma\mathcal{B}^s(u) - \mu_+(u)\mathcal{A}^s(u), \tag{14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathcal{B}^s(u) = +\gamma\mathcal{A}^s(u) + \mu_+(u)\mathcal{B}^s(u). \tag{14b}$$

Les équations de Schrödinger associées en découlent :

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\mathcal{A}^s(u) + \left(-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\det\bigl(1+F_a^+\bigr)\right)\mathcal{A}^s(u) = \gamma^2\mathcal{A}^s(u), \tag{15a}$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\mathcal{B}^s(u) + \left(-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\det\bigl(1-F_a^+\bigr)\right)\mathcal{B}^s(u) = \gamma^2\mathcal{B}^s(u). \tag{15b}$$

Pour la transformation en sinus on obtiendrait :

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\alpha(u) + \left(-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\det(1+F_a^-)\right)\alpha(u) = \gamma^2\alpha(u), \tag{16a}$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\beta(u) + \left(-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\det(1-F_a^-)\right)\beta(u) = \gamma^2\beta(u). \tag{16b}$$

On notera que si l'on normalise les fonctions de structure $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des espaces de de Branges en imposant $\mathcal{A}_a(\frac{1}{2}) = 1$ alors les équations du deuxième ordre vérifiées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ prennent la forme d'équations de Sturm–Liouville.

4. Compléments

La théorie générale de de Branges [2] établit l'existence d'équations intégrales (qui peuvent parfois prendre, comme il était connu a priori que cela serait le cas ici [2], une forme différentielle) pour certaines chaînes de sous-espaces (dont les éléments sont aussi des fonctions entières) d'un même espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\Delta(\gamma))$. Elle les utilise pour obtenir une représentation isométrique de $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\Delta(\gamma))$, apportant ainsi une vaste généralisation au théorème de Paley–Wiener. Dans le cas particulier qui est considéré ici nous avons vérifié que l'expansion isométrique des espaces de Sonine (associés à la transformation en cosinus) prend la forme suivante : l'application $\left[\begin{smallmatrix}\alpha(u)\\ \beta(u)\end{smallmatrix}\right] \mapsto f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{A}^s(u)\alpha(u) + \mathcal{B}^s(u)\beta(u))\,\mathrm{d}u$ est isométrique de $L^2(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2; \frac{\mathrm{d}u}{2})$ sur $L^2(\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}; \mathrm{d}\Delta(\gamma))$ avec : $\mathrm{d}\Delta(\gamma) = \frac{1}{|\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)|^2}\frac{|\mathrm{d}s|}{2\pi}$, $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$. Ce type d'expansion isométrique est aussi intimement lié à des considérations antérieures de Krein, comme il est expliqué dans le livre de Dym et McKean [13].

Les potentiels pour les équations de Schrödinger sont exponentiellement croissants en $u \to +\infty$ et s'annulent exponentiellement en $u \to -\infty$: cela suggère, au-delà des considérations liées à l'expansion isométrique, d'aborder le problème du scattering d'ondes provenant de $-\infty$ et y étant renvoyées. Krein a utilisé ses techniques pour aborder sur un demi-axe les problèmes de scattering également traités par les approches de Gel'fand–Levitan et Marchenko, dans un cadre où la mesure spectrale $\mathrm{d}\Delta(\gamma)$ satisfait la condition $\int \frac{\mathrm{d}\Delta(\gamma)}{1+\gamma^2} < \infty$, ce qui n'est pas le cas ici, bien qu'un grand nombre de considérations restent valables. En fait la différence essentielle avec la situation habituellement envisagée est qu'ici, heuristiquement, plus l'onde est énergétique, plus profondément elle pénètrera dans le potentiel et plus longtemps elle mettra pour en être renvoyée : de sorte que l'on s'attend à ce que les décalages de phase soient divergents lorsque la fréquence γ tend vers $\pm\infty$.

Ce problème, pour (15a) par exemple, est rendu précis par le fait que la condition « être de carré intégrable en $+\infty$ » est une condition au bord appropriée en $+\infty$, avec pour unique solution (à une constante multiplicative près) de fréquence réelle γ (ou complexe) la fonction $u \mapsto \mathcal{A}^s(u)$. Le calcul de la matrice de scattering découle alors de la détermination, pour chacune des équations de Schrödinger (15a), (15b), (16a), (16b), des solutions satisfaisant la

« condition de Jost » en $-\infty$. Par exemple, on trouve, pour l'Éq. (15a), que la solution (complexe) qui se comporte asymptotiquement en $-\infty$ comme $\exp(-\mathrm{i}\gamma u)$ est donnée exactement par ($a = \exp(u)$, $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$, $\mathrm{Re}(s) < 1$) :

$$u \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma u} - \mathrm{e}^{u/2} \int_0^a \phi_a^+(x) x^{-s}\, \mathrm{d}x \tag{17}$$

et à partir de là on établit que la « matrice de scattering » de $-\infty$ vers $-\infty$ est, pour l'Éq. (15a), exactement donnée par la fonction $\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)/\pi^{-s/2}\Gamma(s/2) = \chi_+(s)$, $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma$, qui donne la représentation multiplicative (sur la droite critique) de la transformation en cosinus. Pour l'Éq. (15b) on trouve $-\chi_+(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma)$ comme matrice de scattering. Pour les Éqs. (16a) et (16b) associées à la transformation en sinus on remplace χ_+ par la fonction χ_- donnant la représentation multiplicative de la transformation en sinus. Peut-être existe-t-il un moyen d'utiliser cette information pour remonter aux potentiels eux-mêmes et obtenir ainsi une autre approche (spécifique au cas d'un unique intervalle) aux résultats de Deift, Its et Zhou [12] et des autres auteurs cités.

Ces « matrices de scattering » sont aussi les fonctions qui apparaissent dans les équations fonctionnelles de la fonction dzêta de Riemann et des séries L de Dirichlet. Signalons à ce sujet que la présente Note est la continuation logique de nos travaux antérieurs [3,4] (voir [5] pour un résumé) sur l'opérateur conducteur $\log|x| + \log|y|$, opérateur qui entre autres choses, révéla que la transformation de Fourier était une symétrie des formules explicites.

Références

[1] L. de Branges, Self-reciprocal functions, J. Math. Anal. Appl. 9 (1964) 433–457.

[2] L. de Branges, Espaces de Hilbert de Fonctions Entières, Masson, Paris, 1972.

[3] J.-F. Burnol, The explicit formula and a propagator, 1998, 21 p. Disponible sur math/9809119.

[4] J.-F. Burnol, The explicit formula and the conductor operator, 1999, 28 p. Disponible sur math/9902080.

[5] J.-F. Burnol, Sur les formules explicites I : analyse invariante, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 423–428.

[6] J.-F. Burnol, Scattering on the p-adic field and a trace formula, Internet Math. Res. Notices 2000 (2) (2000) 57–70.

[7] J.-F. Burnol, Sur certains espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 201–206.

[8] J.-F. Burnol, On Fourier and Zeta(s), Habilitationsschrift, Forum Mathematicum, 2001, à paraître.

[9] J.-F. Burnol, Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann zeta function, 28 p. Soumis à une revue avec comité de lecture (Janvier 2003). Disponible sur math/0203120.

[10] J.-F. Burnol, Sur les « espaces de Sonine » associés par de Branges à la transformation de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.

[11] J. des Cloizeaux, M.L. Mehta, Asymptotic behavior of spacing distributions for the eigenvalues of random matrices, J. Math. Phys. 14 (1973) 1648–1650.

[12] P. Deift, A.R. Its, X. Zhou, A Riemann–Hilbert approach to asymptotic problems arising in the theory of the random matrix models, and also in the theory of integrable statistical mechanics, Ann. of Math. 146 (1997) 149–235.

[13] H. Dym, H.P. McKean, Gaussian processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Academic Press, New York, 1976.

[14] F. Dyson, Fredholm determinants and inverse scattering problems, Comm. Math. Phys. 47 (1976) 171–183.

[15] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato, Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent, Physica D 1 (1980) 80–158.

[16] M.L. Mehta, Random Matrices, 2nd edition, Academic Press, San Diego, 1991.

[17] C.A. Tracy, H. Widom, Fredholm determinants, differential equations and matrix models, Comm. Math. Phys. 163 (1994) 33–72.

[18] H. Widom, The asymptotics of a continuous analogue of orthogonal polynomials, J. Approx. Theory 77 (1994) 51–64.