



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 893–896



Analyse mathématique/Analyse complexe

# Asymptotique des approximants de Hermite–Padé quadratiques de la fonction exponentielle et problèmes de Riemann–Hilbert <sup>☆</sup>

Arno Kuijlaars <sup>a</sup>, Herbert Stahl <sup>b</sup>, Walter Van Assche <sup>a</sup>, Franck Wielonsky <sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Katholieke Universiteit Leuven, Department of Mathematics, Celestijnenlaan 200B, B-3001 Leuven, Belgique

<sup>b</sup> TFH-Berlin, FB II, Luxemburger Straße 10, 13353 Berlin, Allemagne

<sup>c</sup> UFR Math, FRE CNRS 2222, bat. M2, Université des sciences et technologies Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

<sup>d</sup> INRIA, 2004, route des Lucioles, BP 93, 06902, Sophia Antipolis, France

Reçu le 11 mars 2003 ; accepté le 22 avril 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

## Résumé

Nous étudions le comportement asymptotique des polynômes  $p$ ,  $q$ ,  $r$  de degrés  $n$ , approximants de Hermite–Padé de type I de la fonction exponentielle, i.e.,  $p(z)e^{-z} + q(z) + r(z)e^z = \mathcal{O}(z^{3n+2})$  lorsque  $z \rightarrow 0$ . Une méthode du col pour les problèmes de Riemann–Hilbert, introduite par Deift et Zhou, est utilisée pour obtenir l'asymptotique forte des polynômes  $p(3nz)$ ,  $q(3nz)$ ,  $r(3nz)$  localement uniformément dans toute région du plan complexe. Une surface de Riemann, obtenue naturellement à partir des expressions intégrales des polynômes  $p$ ,  $q$ ,  $r$  est introduite, ainsi que certaines mesures et fonctions définies sur cette surface. **Pour citer cet article :** A. Kuijlaars et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003)*.

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Asymptotic behavior of quadratic Hermite–Padé approximants to the exponential function and Riemann–Hilbert problems.** We describe the asymptotic behavior of the polynomials  $p$ ,  $q$ ,  $r$  of degree  $n$  in type I Hermite–Padé approximation to the exponential function, i.e.,  $p(z)e^{-z} + q(z) + r(z)e^z = \mathcal{O}(z^{3n+2})$  as  $z \rightarrow 0$ . A steepest descent method for Riemann–Hilbert problems, due to Deift and Zhou, is used to obtain strong uniform asymptotics for the scaled polynomials  $p(3nz)$ ,  $q(3nz)$ ,  $r(3nz)$  in every domain of the complex plane. An important role is played by a three-sheeted Riemann surface and certain measures and functions defined on it. **To cite this article:** A. Kuijlaars et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003)*.

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

Comme il est bien connu, les approximants de Hermite–Padé d'un ensemble d'exponentielles ont été introduits par Hermite, en relation avec sa preuve de la transcendance du nombre  $e$ . Les approximants quadratiques de type I sont constitués d'un triplet de polynômes  $p_{n_1}$ ,  $q_{n_2}$  et  $r_{n_3}$  de degrés respectifs  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  tels que  $p_{n_1}(z) +$

<sup>☆</sup> Ce travail a été réalisé avec le support des projets INTAS 2000-0272, G.0176.02 et G.0184.02 (FWO-Vlaanderen).

Adresses e-mail : arno@wis.kuleuven.ac.be (A. Kuijlaars), stahl@tfh-berlin.de (H. Stahl), walter@wis.kuleuven.ac.be (W. Van Assche), wielonsk@ano.univ-lille1.fr (F. Wielonsky).

$q_{n_2}(z)e^z + r_{n_3}(z)e^{2z} = \mathcal{O}(z^{n_1+n_2+n_3+2})$ ,  $z \rightarrow 0$ . Ces approximants existent et sont uniques à une constante multiplicative près. Les racines des polynômes  $p_{n_1}$ ,  $q_{n_2}$  et  $r_{n_3}$  se distribuent dans le plan complexe de manière bien particulière, comme le montre la Fig. 1 dans le cas diagonal où  $n_1 = n_2 = n_3 = 60$ . On décrit des résultats sur l'asymptotique des polynômes diagonaux, obtenus après un changement d'échelle au voisinage de l'infini, c'est à dire les polynômes  $P_n(z) = p_n(3nz)$ ,  $Q_n(z) = q_n(3nz)$ ,  $R_n(z) = r_n(3nz)$ , voir [5,6,3]. On déduit de ces résultats la distribution limite des racines de  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $R_n$  et du reste  $E_n(z) = P_n(z)e^{-3nz} + Q_n(z) + R_n(z)e^{3nz}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . L'étude menée dans [5,6] repose sur une utilisation de la méthode du col appliquée aux expressions intégrales des quantités  $e^{-3nz}P_n(z)$ ,  $Q_n(z)$  et  $e^{3nz}R_n(z)$  données, à un facteur de normalisation près, par

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{e^{3nz w} dw}{[w(w^2 - 1)]^{n+1}}, \quad i = -1, 0, 1, \tag{1}$$

où  $C_i$  est un cercle orienté positivement autour du point  $i$ ,  $i = -1, 0, 1$ , et n'entourant pas les autres points de  $\{-1, 0, 1\}$ .

Le manuscrit [3] propose une deuxième approche, basée sur la méthode du col introduite par Deift et Zhou [2,1] pour l'étude asymptotique de problèmes de Riemann–Hilbert. Cette méthode a été développée dans le contexte des systèmes intégrables et a été appliquée récemment à des problèmes asymptotiques pour les polynômes orthogonaux, les matrices aléatoires, combinatoires, etc. [1]. La caractérisation des polynômes orthogonaux multiples comme solutions d'un tel problème est donnée dans [7]. Ici, les polynômes  $P_n$ ,  $Q_n$  et  $R_n$ , normalisés de sorte que  $Q_n$  soit monique, interviennent dans la solution d'un problème de Riemann–Hilbert pour une fonction analytique  $Y : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3}$  à valeurs matricielles  $3 \times 3$ , où  $\Gamma$  est un contour orienté autour de l'origine, et telle que

1. Les limites  $Y_+(z)$  et  $Y_-(z)$  de  $Y(z')$  lorsque  $z'$  approche  $z \in \Gamma$  respectivement de l'intérieur et de l'extérieur de  $\Gamma$ , satisfont  $Y_+(z) = Y_-(z)S(z)$ , où  $S(z)$  est la matrice de saut donnée par

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 & z^{-3n-2}e^{-3nz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & z^{-3n-2}e^{3nz} & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma.$$

2. Pour  $z$  grand, et  $I$  la matrice identité  $3 \times 3$ , on a

$$Y(z) = \left( I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-2n-2} & 0 \\ 0 & 0 & z^{n+1} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty.$$

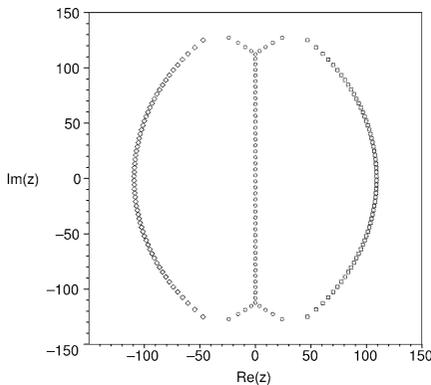


Fig. 1. Racines des polynômes  $p_{60}$  (à gauche)  $q_{60}$  (au milieu), et  $r_{60}$  (à droite).

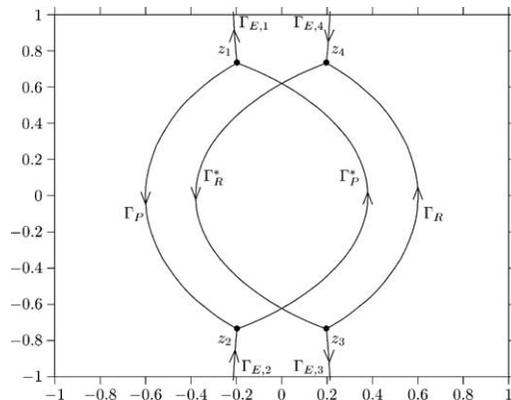


Fig. 2. Arcs pour lesquels  $\frac{3}{2\pi i} \int_{z_1}^z (\psi_Q - \psi_P)(s) ds$  ou  $\frac{3}{2\pi i} \int_{z_3}^z (\psi_Q - \psi_R)(s) ds$  est réelle.

On montre que ce problème admet une solution unique et que  $Y_{21}(z) = P_n(z)$ ,  $Y_{23}(z) = R_n(z)$ , et  $Y_{22}(z) = z^{-3n-2}Q_n(z)$  pour  $z$  extérieur à  $\Gamma$ ,  $Y_{22}(z) = z^{-3n-2}E_n(z)$  pour  $z$  intérieur à  $\Gamma$ .

**2. Trajectoires de différentielles quadratiques et potentiels logarithmiques**

D’après la méthode du col classique pour l’évaluation asymptotique des intégrales, la contribution principale dans (1), lorsque  $n$  tends vers l’infini, est obtenue en un point critique de la fonction  $w \mapsto 3zw - \log[w(w^2 - 1)]$ . Par suite, nous introduisons la surface de Riemann  $\mathcal{R}$  de la fonction rationnelle

$$z = z(w) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w+1} \right) = \frac{w^2 - 1/3}{w(w^2 - 1)}. \tag{2}$$

Cette surface est de genre 0, constituée de 3 feuillets  $\mathcal{R}_P$ ,  $\mathcal{R}_Q$ , et  $\mathcal{R}_R$ . On note  $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la bijection inverse de (2) et  $\psi_P(z)$ ,  $\psi_Q(z)$ , et  $\psi_R(z)$  ses restrictions à chacun des 3 feuillets. On suppose que le choix des 3 feuillets est tel que  $\psi_P(\infty) = -1$ ,  $\psi_Q(\infty) = 0$ , et  $\psi_R(\infty) = 1$ . On vérifie qu’il y a 4 points de branchement sur  $\mathcal{R}$  dénotés  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Les points  $z_1$  et  $z_2$  (resp.  $z_3$  et  $z_4$ ) sont connectés par un arc  $\Gamma_P$  (resp.  $\Gamma_R$ ) le long duquel sont collés les 2 feuillets  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{R}_Q$  (resp.  $\mathcal{R}_Q$  et  $\mathcal{R}_R$ ). Les 2 arcs  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_R$  sont choisis de telle sorte que  $\Gamma_P$  soit dans le demi-plan gauche,  $\Gamma_R$  soit dans le demi-plan droit et

$$\frac{3}{2\pi i} \int_{z_1}^z (\psi_Q - \psi_P)(s) ds \in \mathbb{R}, \quad z \in \Gamma_P, \quad \text{et} \quad \frac{3}{2\pi i} \int_{z_3}^z (\psi_Q - \psi_R)(s) ds \in \mathbb{R}, \quad z \in \Gamma_R. \tag{3}$$

Cependant, d’autres arcs satisfont à (3). Ils sont représentés, avec  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_R$ , sur la Fig. 2. Les arcs  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_R^*$  sont réfléchis des arcs  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_P^*$  par rapport à l’axe imaginaire. Les arcs  $\Gamma_{E,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , connectent chacun des points de branchement avec le point à l’infini. Les arcs issus de  $z_1$  et  $z_2$  sont les trajectoires d’une différentielle quadratique  $-(\psi_Q - \psi_P)^2(z) dz^2$  selon la terminologie utilisée en théorie géométrique des fonctions [4]. Des propriétés locales et globales de ces trajectoires (voir [4]), on déduit la configuration géométrique des arcs satisfaisant (3) telle qu’elle apparait sur la Fig. 2 obtenue par intégration numérique. On définit également l’arc  $\Gamma_Q$  tel que

$$\Gamma_Q = [-iy^*, iy^*] \cup (\Gamma_P^* \cap \{\text{Re } z < 0\}) \cup (\Gamma_R^* \cap \{\text{Re } z > 0\}), \tag{4}$$

où  $\pm iy^*$  désignent les points d’intersection de  $\Gamma_P^*$  et  $\Gamma_R^*$  avec l’axe imaginaire. Les sauts de  $\psi$  donnent des mesures de probabilité :  $d\mu_P(s) = \frac{3}{2\pi i}(\psi_Q - \psi_P)_+(s) ds$  et  $d\mu_R(s) = \frac{3}{2\pi i}(\psi_Q - \psi_R)_+(s) ds$  sur les arcs  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_R$ , respectivement. Finalement, on introduit les potentiels logarithmiques complexes  $g_P(z) = \int \log(z - s) d\mu_P(s)$  et  $g_R(z) = \int \log(z - s) d\mu_R(s)$  associés aux mesures  $\mu_P$  et  $\mu_R$ . Ce sont des fonctions définies modulo  $2i\pi$ , respectivement analytiques en dehors des coupures  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_R$ .

La méthode du col pour les problèmes de Riemann–Hilbert consiste en une succession de transformations, comme décrit par Deift [1]. Cette méthode a été appliquée avec des fonctions matricielles d’ordre  $2 \times 2$  dans [1]. Le travail [3] traite de fonctions matricielles d’ordre  $3 \times 3$ , apparemment pour la première fois. On choisit d’abord un contour  $\Gamma$  passant par les arcs  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_R$ . On renormalise ensuite le problème de sorte que  $Y(z) \rightarrow I$  pour  $z \rightarrow \infty$ . Cela utilise les potentiels introduits précédemment. Le choix des arcs  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_R$  satisfaisant la condition (3) entraîne que les éléments diagonaux de la matrice de saut sont oscillatoires sur ces arcs et que celle-ci converge vers  $I$  exponentiellement avec  $n$  sur le reste de  $\Gamma$ . On se ramène alors par déformation du contour  $\Gamma$  à un problème de Riemann–Hilbert élémentaire que l’on sait résoudre explicitement sur la surface de Riemann  $\mathcal{R}$ . Finalement, une étude locale autour des points de branchement justifie un passage à la limite avec  $n$  permettant d’obtenir le comportement asymptotique recherché. Cela fait intervenir la fonction classique de Airy.

### 3. Comportement asymptotique des approximants de Hermite–Padé

Par la méthode du col on obtient l'asymptotique forte des polynômes d'approximation de Hermite–Padé dans toute région du plan complexe. Le premier résultat est l'asymptotique faible des mesures de comptage des zéros. Soit  $p$  un polynôme. On note  $\nu_p$  la mesure de comptage des zéros de  $p$  normalisée par le degré de  $p$ . Alors

**Théorème 3.1.** *On a les convergences faible- $*$  des mesures de comptage  $\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \mu_P$ ,  $\nu_{Q_n} \xrightarrow{*} \mu_Q$ , et  $\nu_{R_n} \xrightarrow{*} \mu_R$ , lorsque  $n$  tends vers l'infini, où  $\mu_P$  et  $\mu_R$  sont les mesures décrites précédemment et  $\mu_Q$  est une mesure de probabilité sur  $\Gamma_Q$ .*

On donne l'asymptotique forte uniquement pour le polynôme  $P_n$ . Les polynômes  $Q_n$ ,  $R_n$  et le reste  $E_n$  satisfont des asymptotiques similaires.

**Théorème 3.2.** (a) *Avec les définitions précédentes, on a*

$$(-2)^{n+1} P_n(z) = \frac{2 e^{ng_P(z)}}{\sqrt{3\psi_P^4(z) + 1}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

localement uniformément dans  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_P$ .

(b) *Localement uniformément, dans un voisinage de l'arc ouvert  $\Gamma_P \setminus \{z_1, z_2\}$  on a*

$$(-2)^{n+1} P_n(z) = e^{ng_P(z)} \left[ \frac{2}{\sqrt{3\psi_P^4(z) + 1}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \pm \frac{2 e^{2n\varphi_P(z)}}{\sqrt{3\psi_Q^4(z) + 1}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right],$$

où  $\varphi_P(z) = \frac{3}{2} \int_{z_1}^z (\psi_Q - \psi_P)(s) ds$ , et avec le signe  $+$  (resp.  $-$ ) à droite (resp. gauche) de  $\Gamma_P$ .

(c) *Il existe  $\delta > 0$  tel que, uniformément pour  $|z - z_1| < \delta$ ,*

$$(-2)^{n+1} P_n(z) = \sqrt{\pi} e^{(n+1)(g_P(z) + \varphi_P(z))} \left[ n^{1/6} h_1(z) \text{Ai}((n+1)^{2/3} f_1(z)) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + n^{-1/6} h_2(z) \text{Ai}'((n+1)^{2/3} f_1(z)) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right],$$

où  $\text{Ai}$  est la fonction de Airy,  $f_1(z) = \left[\frac{3}{2}\varphi_P(z)\right]^{2/3}$ , et  $h_1, h_2$  sont certaines fonctions analytiques sans zéros dans  $|z - z_1| < \delta$ .

Les Théorèmes 3.1 et 3.2(a) ont été obtenus dans [5,6]. Des démonstrations complètes sont données dans [3].

### Références

- [1] P. Deift, Orthogonal Polynomials and Random Matrices: a Riemann–Hilbert Approach, in: Courant Lecture Notes, Vol. 3, New York University, 1999; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [2] P. Deift, X. Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems: asymptotics for the MKdV equation, Ann. of Math. 137 (1993) 295–368.
- [3] A.B.J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky, Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function: a Riemann–Hilbert approach, Manuscrit, 2003.
- [4] C. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [5] H. Stahl, Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function, Electron. Trans. Numer. Anal. 14 (2002) 193–220.
- [6] H. Stahl, Quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function, Manuscrit.
- [7] W. Van Assche, J.S. Geronimo, A.B.J. Kuijlaars, Riemann–Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials, in: J. Bustoz, et al. (Eds.), Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions, in: NATO Sci. Ser. II Math., Phys. and Chem., Vol. 30, Kluwer Academic, Dordrecht, 2001, pp. 23–59.