



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 757–762



Géométrie algébrique/Topologie

Sur la forme de Seifert entière des germes de courbe plane à deux branches

Philippe du Bois

UMR 6093 CNRS, Université d'Angers, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers, France

Reçu et accepté le 12 mars 2003

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Nous démontrons que deux germes de courbe plane à deux branches, qui sont isomères, ont des formes de Seifert entières isomorphes, en utilisant la filtration par le poids sur l'homologie entière de la fibre de Milnor. *Pour citer cet article : P. du Bois, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the integral Seifert form of plane curve germs with two branches. Two plane curve germs with two branches, which are isomeric, are shown to have isomorphic integral Seifert forms. The weight filtration on the integral homology of the Milnor fiber is the key ingredient of the proof. *To cite this article: P. du Bois, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ be a plane curve germ with an isolated singularity. We consider the weight filtration M on the homology $H_1(F, \mathbf{Z})$ of the Milnor fiber $F = F(f)$ of the germ f , as defined in [3] and used in [4] and [5], by the following formulas, where the homological monodromy is denoted as the multiplication by t , and e is an exponent of the monodromy.

$$M_0(H_1(F, \mathbf{Z})) = H_1(F, \mathbf{Z}), \quad M_{-1}(H_1(F, \mathbf{Z})) = \text{Ker}(t^e - 1),$$

$$M_{-2}(H_1(F, \mathbf{Z})) = ((\text{Ker}(t - 1) + \text{Im}(t^e - 1)) \otimes \mathbf{Q}) \cap H_1(F, \mathbf{Z}).$$

The M filtration is a useful tool for the study of the Seifert form on $H_1(F, \mathbf{Z})$, see [5]. In [7], Robin has studied the following problem: find the germ(s) which have a given integral Seifert form. Under certain technical assumptions concerning the cyclotomic units associated with the Seifert form, he shows that, if two plane curve germs with two branches have isomorphic integral Seifert forms, they are isomeric (see [7], or 5 below, for the definition).

Adresse e-mail : philippe.dubois@univ-angers.fr (P. du Bois).

1631-073X/03/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/S1631-073X(03)00165-1

We shall denote by $T(f)$ the desingularisation tree with multiplicities of f and by e_i the multiplicity of the vertex (i) . As in [5], r_i will denote the gcd of the multiplicities of (i) and its neighbours, and m_{ij} the gcd of e_i and e_j , when the vertices (i) and (j) are related by an edge (ij) of $T(f)$. A *rupture point* of $T(f)$ is a vertex with at least 3 neighbours. The union of the edges between two rupture points of $T(f)$, or between a rupture point and a vertex bearing an arrow (representing a branch of f) is called a *geodesic segment* if these two vertices are consecutive on a geodesic of $T(f)$, i.e., there are no other rupture points between these vertices on the geodesic. As shown in [3, 5.7], the gcd denoted by m_{ij} is constant along a geodesic segment.

From now on, we shall assume that f is a germ with two branches. We consider the geodesic G joining the arrows of $T(f)$ (the arrows represent the two branches of f). We call Γ the following graph: the vertices of Γ are the rupture points on G and the vertices bearing an arrow, the edges of Γ are the associated geodesic segments. We number the vertices from 1 to $N + 1$, and the edges from 1 (the edge (12)), to N (the edge $(N(N + 1))$). Let n be the map from the set $\text{vert}(\Gamma)$ of vertices of Γ to the set $\text{vert}(T(f))$ of vertices of $T(f)$, sending a vertex of Γ to the corresponding vertex of $T(f)$. We weigh the vertex i (resp. the edge i) of Γ by the corresponding $r_{n(i)}$ (resp. $m_{n(i)j}$, where j is the neighbour of $n(i)$ on the geodesic segment of $T(f)$ numbered by i). Using the new numbering, we put $r_i := r_{n(i)}$ and $m_i := m_{n(i)j}$.

Lemma. *One has the following divisibility relation between the m_i along Γ : if, for some pair (i, j) , $1 \leq i < j \leq N$, the integer a divides m_i and m_j , then, for all k , $i \leq k \leq j$, a divides m_k .*

Using [3, 6.6], one can write a presentation matrix for $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ and for $\text{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z})$. The non-zero entries of the matrix are product of cyclotomic polynomials, in the form $(t^{m_i} - 1)/(t^{r_i} - 1)$, $t^{m_i} - 1$ or $(t^{m_i} - 1)/(t^{r_i+1} - 1)$.

Two polynomials A and B in $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ are *strongly coprime* if there exists U and V in $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ such that $AU + BV = 1$. By [1] and [8], the cyclotomic polynomials Φ_a and Φ_b , $a < b$, are strongly coprime if, and only if, b/a is not a power of a prime number. Then, using the lemma, we can find, in the presentation matrix, certain entries which are strongly coprime. This allows to perform a sequence of elementary operations with coefficients in $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$, and we find the following result.

Theorem 1. *Let F denote the Milnor fiber of a plane curve germ with two branches, we have the following isomorphisms of $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules:*

$$M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / \left(\frac{(t^{m_1} - 1) \cdots (t^{m_N} - 1)}{(t^{r_2} - 1) \cdots (t^{r_N} - 1)} \right),$$

$$\text{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / \left(\frac{(t^{m_1} - 1) \cdots (t^{m_N} - 1)}{(t^{r_1} - 1) \cdots (t^{r_N} - 1)} \right).$$

Two plane curve germs f_1 and f_2 are *isomeric* if one can pass from $T(f_1)$ to $T(f_2)$ by a sequence of operations described in [7], see 5 below. The first examples of isomeric germs have been given in [5, 5.1 and 5.3], but the general definition is due to Robin in [7].

Theorem 2. *Let f_1 and f_2 be two plane curve germs with two branches. If the germs f_1 and f_2 are isomeric, the Seifert forms on $H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$, $a = 1$ et 2, are isomorphic.*

Proof. By Theorem 1 above and Theorem 4.6 of [5], the proof consists in checking that the twist polynomial (defined in [5, 2.21]) is the same for f_1 and f_2 . \square

0. Introduction

Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de courbe plane à singularité isolée. On considère la filtration par le poids M sur l’homologie $H_1(F, \mathbf{Z})$ de la fibre de Milnor F du germe f , définie dans [3] et utilisée dans [4] et [5], par les formules suivantes, où la monodromie homologique est notée comme la multiplication par t , et e désigne un exposant de la monodromie.

$$M_0(H_1(F, \mathbf{Z})) = H_1(F, \mathbf{Z}), \quad M_{-1}(H_1(F, \mathbf{Z})) = \text{Ker}(t^e - 1),$$

$$M_{-2}(H_1(F, \mathbf{Z})) = ((\text{Ker}(t - 1) + \text{Im}(t^e - 1)) \otimes \mathbf{Q}) \cap H_1(F, \mathbf{Z}).$$

La filtration M permet d’étudier la forme de Seifert sur $H_1(F, \mathbf{Z})$, voir [5]. Dans [7], Robin a étudié le problème qui consiste à retrouver le ou les germes ayant, à isomorphisme près, une forme de Seifert (entière) donnée. Sous certaines hypothèses techniques portant sur les unités cyclotomiques associées à la forme de Seifert, il trouve que, si deux germes de courbe plane à deux branches ont des formes de Seifert (entières) isomorphes, ils sont isomères (voir la définition en 5).

Dans toute la suite, f désignera un germe de courbe plane à deux branches, à singularité isolée. Nous allons démontrer que, dans ce cas, $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ et $\text{Gr}_0^M(H_1(F, \mathbf{Z}))$ sont des $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules cycliques. Nous en déduirons que deux germes de courbe plane à deux branches qui sont isomères ont des formes de Seifert entières isomorphes.

1. Notations

On notera φ et φ' des développements de Puiseux des branches du germe f . Les paires de Zariski de φ (resp. φ') seront notées $p_1/q_1, \dots, p_g/q_g$ (resp. $p'_1/q'_1, \dots, p'_g/q'_g$). On notera $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$ l’exposant de coïncidence de φ et φ' . Un nombre rationnel est un exposant permis pour φ s’il est dans $(q_1 \cdots q_g)^{-1}\mathbf{N}$. L’exposant de coïncidence est permis pour l’une au moins des deux branches, on conviendra qu’il est permis pour la branche φ . On définit l’entier c par la double inégalité suivante :

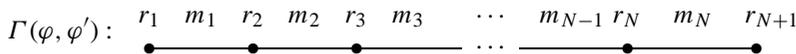
$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{p_c}{q_1 \cdots q_c} \leq \mathcal{C}(\varphi, \varphi') < \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{p_{c+1}}{q_1 \cdots q_{c+1}}.$$

On a donc $\mathcal{C}(\varphi, \varphi') \in \frac{1}{q_1 \cdots q_c} \mathbf{N}$.

On notera $T(f)$ l’arbre de désingularisation avec multiplicités de f , e_i la multiplicité du sommet (i) , $\#1$ le sommet de plus petite multiplicité et e_1 sa multiplicité. Comme dans [5], r_i désignera le pgcd des multiplicités du sommet (i) et des sommets voisins dans $T(f)$, et m_{ij} désignera le pgcd des multiplicités des sommets (i) et (j) , extrémités de l’arête (ij) de $T(f)$; ce pgcd est constant le long d’un segment géodésique, on rappelle qu’un *segment géodésique* est la réunion des arêtes situées entre deux sommets de rupture consécutifs sur une géodésique de $T(f)$, ou entre un sommet de rupture et un sommet de valence 2 portant une flèche symbolisant φ ou φ' , consécutifs sur une géodésique de $T(f)$.

On notera $\Gamma(\varphi, \varphi')$ la géodésique de $T(f)$ joignant les flèches symbolisant φ et φ' ; les *sommets* de $\Gamma(\varphi, \varphi')$ seront les sommets de rupture, le sommet $\#1$ s’il est sur $\Gamma(\varphi, \varphi')$ (i.e., si les deux branches sont transverses) et l’éventuel sommet de valence 2 portant la flèche associée à φ' de $T(f)$ portés par cette géodésique; les *arêtes* de $\Gamma(\varphi, \varphi')$ seront les segments géodésiques de $T(f)$ portés par cette géodésique.

Les sommets (resp. les arêtes) seront pondérés par les e_i et r_i (resp. les m_{ij}) calculés dans $T(f)$. Les sommets de $\Gamma(\varphi, \varphi')$ seront renumérotés en suivant leur position sur la géodésique, de 1 (correspondant au sommet de rupture sur lequel s’attache la flèche associée à φ) à $N + 1$ (associé à φ'). Les e_i et r_i seront numérotés par le nouveau numéro du sommet correspondant et les m_{ij} par le numéro du segment géodésique, comme indiqué ci-dessous.



L'arbre $T(f)$ est la réunion du sous-arbre $T^\top(f)$, constitué de la géodésique de $T(f)$ joignant les flèches symbolisant φ et φ' et des branches mortes qui y sont attachées, et d'un sous-arbre $T^\perp(f)$ isomorphe à l'arbre de désingularisation d'un certain germe irréductible, les deux sous-arbres étant rattachés par un segment géodésique qui joint le sommet de rupture de $T^\perp(f)$ ayant la plus grande multiplicité à celui de $T^\top(f)$ ayant la plus petite multiplicité, ou au sommet #1 si $c = 0$; ces deux sommets sont distincts, à l'exception du cas où $T(f)$ admet un sommet de rupture de valence 4, qui est alors l'unique sommet commun à $T^\perp(f)$ et $T^\top(f)$.

2. On considère ici les germes de courbe plane ayant un nombre de branches quelconque

Lemme 1 (Multiplicité sortante après un sommet de rupture). *Soit $g : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de courbe plane à singularité isolée, soit $T(g)$ l'arbre de désingularisation avec multiplicités de g . Soit (i) un sommet de rupture de $T(g)$, ou le sommet #1 s'il est de valence 2. Soit (i^\wedge) le sommet voisin de (i) sur une arête sortante de (i) . Notons $(\chi^\ell)_{\ell \in \Lambda}$ des développements de Puiseux des branches de g telles que la géodésique $\Gamma(1, \chi^\ell)$ de $T(g)$ joignant #1 à la flèche symbolisant χ^ℓ passe par l'arête qui porte le sommet (i^\wedge) ; notons $q_{k_\ell}, \dots, q_{g_\ell}$ les dénominateurs des paires de Zariski de χ^ℓ qui interviennent, dans la suite d'éclatements donnant la désingularisation minimale de g , après l'éclatement qui crée le diviseur représenté par (i) . On a alors : $e_i^\wedge \equiv \sum_{\ell \in \Lambda} q_{k_\ell} \cdots q_{g_\ell} \pmod{e_i}$.*

Démonstration. Ce résultat se déduit de [6, 5.4.1 et 6.6.4], voir aussi [2].

On peut calculer les $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules $M_{-2}H_1(F(g), \mathbf{Z})$ et $\text{Gr}_0^M(H_1(F(g), \mathbf{Z}))$ en considérant le graphe $G(g)$, revêtement ramifié de l'arbre $T(g)$, construit comme suit : le sommet (i) de $T(g)$ a pour image réciproque r_i sommets, l'arête (ij) de $T(g)$ a pour image réciproque m_{ij} arêtes, chaque flèche de $T(g)$ a pour image réciproque un segment de $G(g)$. L'ensemble des extrémités extérieures de ces segments sera noté ∂G , les points de ∂G sont donc en bijection avec l'ensemble des flèches de $T(g)$ ou avec l'ensemble des branches de g . De plus, l'action de la monodromie sur $G(g)$ est un isomorphisme du revêtement.

D'après [3, 5.5 et 6.5], les branches mortes de $T(g)$ n'apportent pas de contribution au calcul des $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules étudiés ici, et on a les isomorphismes de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivants :

$$M_{-2}H_1(F(g), \mathbf{Z}) \cong H^1(G(g), \partial G, \mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad \text{Gr}_0^M(H_1(F(g), \mathbf{Z})) \cong H^1(G(g), \mathbf{Z}).$$

3. Revenons maintenant au cas d'un germe à deux branches et aux notations de 1

Lemme 2. *Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de courbe plane à deux branches, à singularité isolée en 0. Les arêtes de $T^\perp(f)$ n'apportent pas de contribution au calcul des $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ et $\text{Gr}_0^M(H_1(F, \mathbf{Z}))$.*

Notons (l) le sommet de $\Gamma(\varphi, \varphi')$ dont la multiplicité e_l est minimale parmi les sommets de $\Gamma(\varphi, \varphi')$; à la renumérotation près, (l) est associé au sommet de rupture de $T^\top(f)$, noté (\tilde{l}) , sur lequel se rattache $T^\perp(f)$, ou au sommet #1 s'il est de valence 2. Le Lemme 1 donne les informations suivantes sur les multiplicités de certains voisins de (l) , ce qui permet de démontrer le Lemme 3.

Si $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$ est un exposant permis pour φ et pour φ' , le sommet (\tilde{l}) admet deux arêtes sortantes. La multiplicité e_l^φ (resp. $e_l^{\varphi'}$) du sommet de $T(f)$ voisin de (\tilde{l}) sur l'arête sortante dirigée vers φ (resp. φ') vérifie :

$$e_l^\varphi \equiv q_{c+1} \cdots q_g \pmod{e_l}, \quad e_l^{\varphi'} \equiv q'_{c+1} \cdots q'_{g'} \pmod{e_l}.$$

Si $\mathcal{C}(\varphi, \varphi')$ est un exposant permis pour φ , mais non pour φ' , le sommet (\tilde{l}) admet une unique arête sortante (vers φ) et le sommet $(l \mp 1)$ de $T(f)$, associé au sommet $(l + 1)$ sur $\Gamma(\varphi, \varphi')$, admet une unique arête sortante (vers φ').

La multiplicité e_l^φ (resp. $e_{l+1}^{\varphi'}$) du sommet de $T(f)$ voisin de (\tilde{l}) (resp. $(\widetilde{l+1})$) sur l'arête sortante dirigée vers φ (resp. φ') vérifie : $e_l^\varphi \equiv q_{c+1} \cdots q_g \pmod{e_l}$, $e_{l+1}^{\varphi'} \equiv q'_{c+1} \cdots q'_{g'} \pmod{e_{l+1}}$.

Lemme 3. On a la relation de divisibilité suivante entre les m_i le long de $\Gamma(\varphi, \varphi')$: si, pour un certain couple (i, j) , $1 \leq i < j \leq N$, l'entier a divise m_i et m_j , alors, pour tout k , $i \leq k \leq j$, a divise m_k .

4. Matrice de présentation de $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$

Deux éléments A et B de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ sont dits *fortement premiers entre eux* s'il existe U et V dans $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ tels que $AU + BV = 1$. On notera cette relation $(A, B)_{\mathbf{Z}} = 1$. D'après [1] et [8, §30, formule 4], les polynômes cyclotomiques Φ_a et Φ_b , $a < b$, sont fortement premiers entre eux si, et seulement si, b/a n'est pas une puissance d'un nombre premier.

On posera, pour $1 \leq i \leq N$, $\alpha_i = (t^{m_i} - 1)/(t^{r_i} - 1)$, $\beta_i = t^{m_i} - 1$ et $\gamma_i = (t^{m_i} - 1)/(t^{r_{i+1}} - 1)$. On a $r_1 = r_{N+1} = 1$, ce qui donne l'égalité $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_N$. On posera $\beta_0 = \beta_{N+1} = t - 1$, $\gamma_0 = \alpha_{N+1} = 1$, $u_0 = 1$, $v_1 = 0$, $u_N = 0$ et $v_{N+1} = 1$ de sorte que $u_0 \gamma_0 + v_1 \alpha_1 = 1$ et $u_N \gamma_1 \cdots \gamma_N + v_{N+1} \alpha_{N+1} = 1$.

Lemme 4. Les polynômes α_i et γ_i , $1 \leq i \leq N$, vérifient les relations suivantes :

$$(\gamma_1, \alpha_2)_{\mathbf{Z}} = 1, (\gamma_1 \gamma_2, \alpha_3)_{\mathbf{Z}} = 1, \dots, (\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{N-1}, \alpha_N)_{\mathbf{Z}} = 1.$$

D'après [3, 6.6] et le Lemme 2, $M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z})$ admet la matrice de présentation M suivante :

$$M = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_N & \beta_N & \gamma_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{N+1} & \beta_{N+1} \end{bmatrix}.$$

Une suite d'opérations élémentaires (à coefficients dans $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$) sur cette matrice, à l'aide des relations données par le Lemme 4, conduit au Théorème 1.

Théorème 1. Soit F la fibre de Milnor d'un germe de courbe plane à deux branches, on a les isomorphismes de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivants :

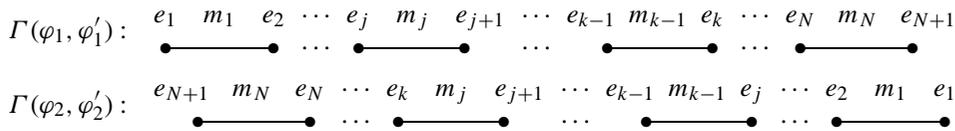
$$M_{-2}H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / ((t-1)\alpha_1 \cdots \alpha_N) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / \left(\frac{(t^{m_1} - 1) \cdots (t^{m_N} - 1)}{(t^{r_2} - 1) \cdots (t^{r_N} - 1)} \right),$$

$$\text{Gr}_0^M H_1(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / (\alpha_1 \cdots \alpha_N) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}] / \left(\frac{(t^{m_1} - 1) \cdots (t^{m_N} - 1)}{(t^{r_1} - 1) \cdots (t^{r_N} - 1)} \right).$$

5. Germes isomères

Suivant [7], deux germes de courbe plane f_1 et f_2 sont *isomères* si l'on peut passer de $T(f_1)$ à $T(f_2)$ par une suite d'opérations du type suivant : on échange deux sous-arbres situés en haut des deux arbres et constitués de halos en équerre avec branche morte, sous la condition que les halos en contact avec les sous-arbres échangés ont la même composante η_j sur leur arête sortante associée au sous-arbre et le même p.g.c.d. m_j le long de cette arête. Si f_1 et f_2 sont des germes à deux branches, la relation d'isométrie entre f_1 et f_2 signifie que l'on passe de $T(f_1)$ à $T(f_2)$ en effectuant une ou plusieurs fois l'opération élémentaire d'échange de sous-arbres qui fait

passer du graphe $\Gamma(\varphi_1, \varphi'_1)$ au graphe $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$ comme indiqué ci-dessous, en respectant les conditions suivantes : (i) $j + 1 \leq l \leq k - 1$ et $j + 1 < k - 1$, (ii) pour $a = 1$ ou 2 , soit $e_{j+1}^{\varphi_a}$ (resp. $e_{k-1}^{\varphi'_a}$) la multiplicité du voisin du sommet de rupture $(\widetilde{j + 1})$ (resp. $(\widetilde{k - 1})$) de $T(f_a)$ dans la direction de φ_a (resp. φ'_a), soit $\eta_{j+1}^{(a)}$ (resp. $\eta_{k-1}^{(a)}$) le reste de division euclidienne de $e_{j+1}^{\varphi_a}$ (resp. $e_{k-1}^{\varphi'_a}$) par e_{j+1} (resp. e_{k-1}), on impose l'égalité $\eta_{j+1}^{(1)} = \eta_{j+1}^{(2)} = \eta_{k-1}^{(1)} = \eta_{k-1}^{(2)}$.



Les sommets (resp. les arêtes) de $\Gamma(\varphi_2, \varphi'_2)$ seront numérotés par les indices des e_i (resp. m_i) correspondants dans le diagramme. Comme dans la démonstration du Lemme 3, la condition $\eta_{j+1} = \eta_{k-1}$ (on omet l'exposant (1) ou (2)) entraîne que $m_j = \eta_{j+1} = \eta_{k-1} = m_{k-1}$; on en déduit les égalités $r_{j+1}^{(1)} = r_{j+1}^{(2)}, r_{k-1}^{(1)} = r_{k-1}^{(2)}$.

Théorème 2. *Soit f_1 et f_2 deux germes de courbe plane à deux branches. Si f_1 et f_2 sont des germes isomères, les formes de Seifert sur $H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$, $a = 1$ et 2 , sont isomorphes.*

Démonstration. Les $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules $M_{-2}H_1(F(f_1), \mathbf{Z})$ et $M_{-2}H_1(F(f_2), \mathbf{Z})$ sont des $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules cycliques isomorphes, d'après le Théorème 1. On peut alors appliquer le Théorème 4.6 de [5] : la collection des halos de $T(f_1)$ est identique à celle de $T(f_2)$ et, en procédant comme dans [5, 5.2], on trouve que le polynôme de twist $\text{Tw}_e(t)$ (défini en [5, 2.21 et 4.5] et associé au choix d'un générateur x_a de $M_{-2}H_1(F(f_a), \mathbf{Z})$) est le même pour f_1 et pour f_2 .

Remarque. L'article [4] donne un exemple de deux germes de courbe plane à trois branches, isomères, dont les formes de Seifert ne sont pas isomorphes, ce qui permet de construire des nœuds algébriques (de grande dimension) cobordants et non isotopes.

Références

[1] T. Apostol, Resultants of cyclotomic polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 457–462.
 [2] E. Brieskorn, H. Knörrer, Plane Algebraic Curves, Birkhäuser, 1986.
 [3] Ph. du Bois, F. Michel, Filtration par le poids et monodromie entière, Bull. Soc. Math. France 120 (1992) 129–167.
 [4] Ph. du Bois, F. Michel, Cobordism of algebraic knots via Seifert forms, Invent. Math. 111 (1993) 151–169.
 [5] Ph. du Bois, F. Michel, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs, J. Algebraic Geometry 3 (1994) 1–38.
 [6] F. Michel, C. Weber, Topologie des germes de courbe planes à plusieurs branches, Prépublication de l'Université de Genève, 1985.
 [7] E. Robin, Dévissage de la forme de Seifert d'un germe de courbe plane, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 329 (1999) 863–866.
 [8] B. van der Waerden, Moderne Algebra, Springer-Verlag, Berlin, 1931.