



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 597–600



Topologie

# Description chirurgicale des revêtements ramifiés simples à quatre feuillets de la 3-sphère

## Surgery description of 4-fold simple branched coverings of the 3-sphere

Franck Harou<sup>1</sup>

*CIRGET/LACIM, UQAM, case postale 8888, succursale Centre-Ville Montréal, Québec H3C 3P8, Canada*

Reçu le 18 novembre 2002 ; accepté après révision 6 mars 2003

Présenté par Étienne Ghys

---

### Résumé

Étant donné un revêtement ramifié à quatre feuillets simples  $p : M \rightarrow S^3$ , nous donnons une méthode effective pour trouver une description chirurgicale de  $M$ . *Pour citer cet article : F. Harou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

Given a simple 4-fold branched covering  $p : M \rightarrow S^3$ , we provide an effective method to find a surgery presentation of  $M$ . *To cite this article: F. Harou, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

---

### 1. Introduction

Montesinos, dans [3,4] a montré que toute 3-variété fermée connexe orientable pouvait être décrite comme un revêtement simple à trois feuillets de la sphère ramifié le long d'un nœud. Rappelons qu'un revêtement est *simple* si l'indice de ramification est au plus 2. Dans [1,2], nous donnons deux méthodes conceptuellement différentes qui permettent d'obtenir une présentation par chirurgie de tels revêtements ramifiés. Notre objectif est de généraliser ces deux méthodes aux revêtements simples à quatre feuillets de la sphère et ainsi de permettre par exemple le calcul d'invariants de 3-variétés utilisant des formules de chirurgie. La présente note pourrait constituer un addendum indépendamment à [1] ou [2].

Dans la Section 2, nous rappellerons comment un revêtement ramifié simple peut être vu comme un entrelacs coloré et nous présenterons différentes transformations *admissibles* d'entrelacs colorés. Dans la Section 3, nous montrerons le résultat suivant :

---

Adresse e-mail : [harou@math.uqam.ca](mailto:harou@math.uqam.ca) (F. Harou).

<sup>1</sup> Financé par la Chaire de recherche du Canada.

**Théorème 1.1.** *Étant donné un revêtement ramifié à quatre feuillet simple  $p : M \rightarrow S^3$ , il existe une suite de transformations admissibles qui transforme  $p$  en un revêtement standard  $p_0 : S^3 \rightarrow S^3$ .*

Un corollaire immédiat (voir Section 2 de [1]) de ce théorème est :

**Corollaire 1.2.** *Étant donné un revêtement ramifié à quatre feuillet simple  $p : M \rightarrow S^3$ , il existe une méthode effective donnant une présentation de chirurgie de  $M$ .*

**2. Équivalence de revêtements**

Soit  $p : M \rightarrow S^3$  un revêtement simple à  $n$  feuillet de la sphère ramifié le long d’un entrelacs  $L$ . Le revêtement  $p$  est entièrement déterminée par l’entrelacs  $L$  et la monodromie  $\rho : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow S_n$  où  $S_n$  désigne un groupe symétrique. De part la simplicité de  $p$ , l’image par  $\rho$  des méridiens de  $L$  sont des transpositions. La donnée de l’entrelacs  $L$  où chaque arc correspondant à un méridien  $m$  est coloré par la transposition  $\rho(m)$  est alors équivalente à celle du couple  $(L, \rho)$  et par là même à celle de  $p$ . Nous noterons alors  $(L, \rho)$  un tel entrelacs colorié et  $M(L, \rho)$  la 3-variété associée.

Étant donné un diagramme colorié  $D(L, \rho)$ , nous pouvons distinguer trois types de croisement : les croisements *monochromes* qui ne mettent en présence qu’une transposition (cf. Fig. 1(a)), les croisements *dichromes* qui mettent en présence deux transpositions distinctes commutantes (cf. Fig. 1(b)) et les croisements *trichromes* qui mettent en présence trois transpositions qui ne commutent pas (cf. Fig. 1(c)).

Une *transformation admissible* d’entrelacs colorié  $(L, \rho)$  est soit une isotopie colorée de  $(L, \rho)$ , soit l’une des transformations suivantes (voir Figs. 1(a)–(c)). La première transformation dite de Montésinos consiste en l’élimination ou l’introduction de 3 demi-tours consécutifs mettant en présence des transpositions ne commutant pas. Cette transformation est une équivalence de revêtement (cf. [1]). La seconde transformation consiste en l’élimination ou l’introduction de 2 demi-tours consécutifs mettant en présence des transpositions distinctes qui commutent. Cette transformation est aussi une équivalence de revêtement comme le montre Piergallini dans [5]. Enfin la dernière transformation consiste en l’élimination des croisements monochromes. Si  $(L', \rho')$  est obtenue à partir de  $(L, \rho)$  par une telle transformation alors  $M(L', \rho')$  est obtenue à partir de  $M(L, \rho)$  par une chirurgie (cf. [1]).

Nous appellerons revêtement standard à quatre feuillet de  $S^3$ , un revêtement  $p_0 : S^3 \rightarrow S^3$  associé à l’entrelacs trivial à 3 composantes colorié par trois transpositions qui engendrent  $S_4$ .

**3. Preuve du Théorème 1.1**

Notons  $T_n$  l’ensemble des transpositions du groupe symétrique  $S_n$ . Rappelons, tout d’abord, que pour toute transposition  $\tau \in T_4$ , il existe une unique transposition notée  $\tau_* \in T_4 \setminus \{\tau\}$  commutant avec  $\tau$ . De plus, si  $\tau \in T_4 \setminus T_3$  alors  $\tau_* \in T_3$ . Soit  $\kappa$  le morphisme défini par  $\kappa(\tau) = \tau_*$  si  $\tau \in T_4 \setminus T_3$  et  $\kappa(\tau) = \tau$  sinon. Nous avons alors :

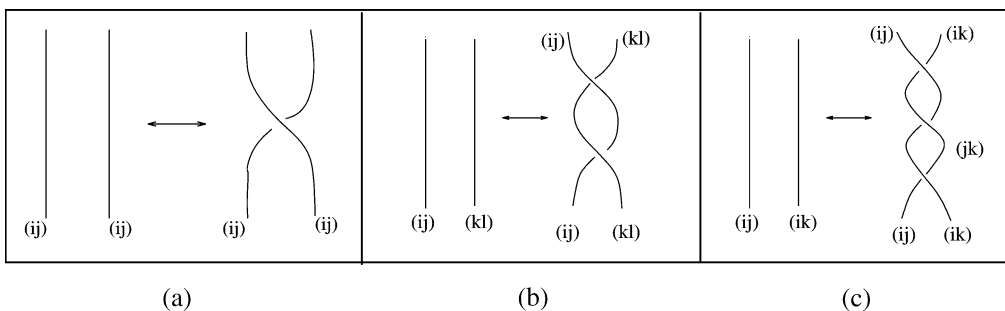


Fig. 1. Les trois types de croisements.

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow S_4 \xrightarrow{\kappa} S_3 \longrightarrow 1$$

avec  $K$  le sous-groupe (de Klein) engendré par  $\{\tau\tau_*\}_{\tau \in T_4 \setminus T_3}$ .

*Étape 1* : considérons l’entrelacs  $(L, \rho_*)$  avec  $\rho_* = \kappa \circ \rho$ . Par [1,2], il existe une suite de transformations admissibles  $T_1, \dots, T_n$  transformant  $(L, \rho_*)$  en  $(L_0, \rho_0)$  où  $L_0$  est un entrelacs trivial. Dans la mesure où un croisement monochrome de  $(L, \rho_*)$  correspond à un croisement  $(L, \rho)$  soit du même type soit dichrome, une transformation  $T_k$  de croisements monochromes de  $(L, \rho_*)$  correspond soit à une transformation de même type  $T_k : (L, \rho) \mapsto (L', \rho')$  soit à une transformation inadmissible. Dans ce dernier cas, nous introduisons formellement un arc proprement plongé dans  $(S^3, L')$  et étiqueté par le produit  $\tau\tau_*$  comme décrit dans la Fig. 2. Dans la suite, nous introduirons des transformations impliquant de tels arcs. L’arc résultant de cette transformation pourra alors symboliser (modulo transformations dichromes) deux brins qui soit se croisent, soit sont parallèles, la coloration des brins en présence levant toute ambiguïté.

Le résultat de l’application de ces transformations admissibles ou non est alors l’entrelacs  $L_0$ , un ensemble d’arcs  $\mathcal{A}$  proprement plongés dans  $(S^3, L_0)$  ainsi qu’une représentation  $\rho_0 : \pi_1(S^3 \setminus \Gamma) \rightarrow S_4$  où  $\Gamma$  est le graphe  $L_0 \cup \mathcal{A}$ . Considérons  $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{\ell} D_i$  une réunion disjointe de disques dont le bord est  $L_0$  et les intersections avec  $\mathcal{A} \setminus \partial\mathcal{A}$  sont transverses. Notre objectif est maintenant de dénouer les arcs de  $\mathcal{A}$  puis de restituer leur signification initiale. En premier lieu, par récurrence sur  $\text{Card}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D})$ , nous allons montrer qu’il existe une suite de transformations admissibles permettant de disjointer  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{D}$ . Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant dont la preuve, élémentaire, est omise.

**Lemme 3.1.** *Les transformations décrites dans la Fig. 3 qui impliquent uniquement des arcs dans le cas des transformations I et II (avec  $\tau, \theta \in T_3$ ,  $\tau \neq \theta$ ) et un arc et une portion d’entrelacs dans le cas de la transformation III et IV sont obtenues par une suite de transformations admissibles.*

*Étape 2* : s’il existe un arc  $\alpha \in \mathcal{A}$  qui intersecte l’intérieur d’un disque  $D_i$  tel que l’étiquette de  $\alpha$  commute avec l’étiquette d’un arc  $\beta$  de  $\partial D_i \setminus \partial\mathcal{A}$  alors nous pouvons éliminer cette intersection par application de la transformation étendue IV impliquant  $\alpha$  et  $\beta$ .

*Étape 3* : si  $\text{Card}(\partial\mathcal{A} \cap \partial D_i) > 1$  alors considérons deux points consécutifs distincts  $x_0, x_1 \in \partial\mathcal{A} \cap \partial D_i$ . Soit  $\alpha_0, \alpha_1$  deux arcs de  $\mathcal{A}$  (non nécessairement distincts) que nous pouvons supposer parallèles dans un voisinage de  $\partial D_i$  et tels que  $x_i \in \partial\alpha_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . Comme  $x_0$  et  $x_1$  sont consécutifs,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  ont la même étiquette et, de ce fait, une application de la transformation étendue I a pour résultat deux nouveaux arcs dont l’un a ses deux extrémités

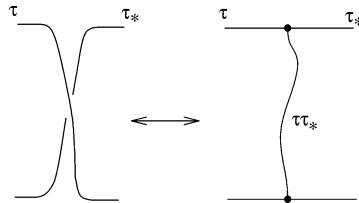


Fig. 2. Remplacement des croisements dichromes.

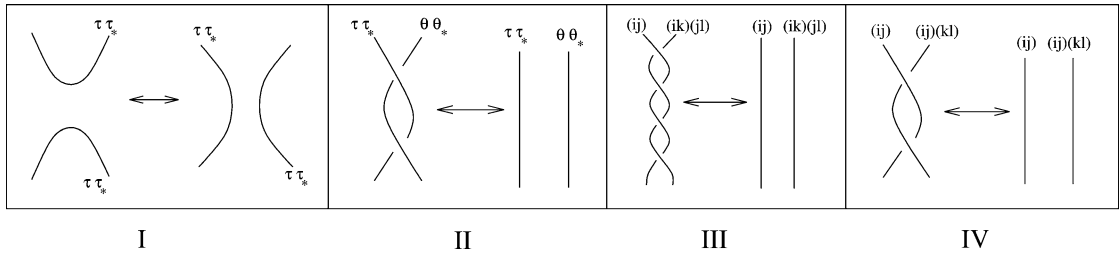


Fig. 3. Transformations étendues I, II, III, IV.

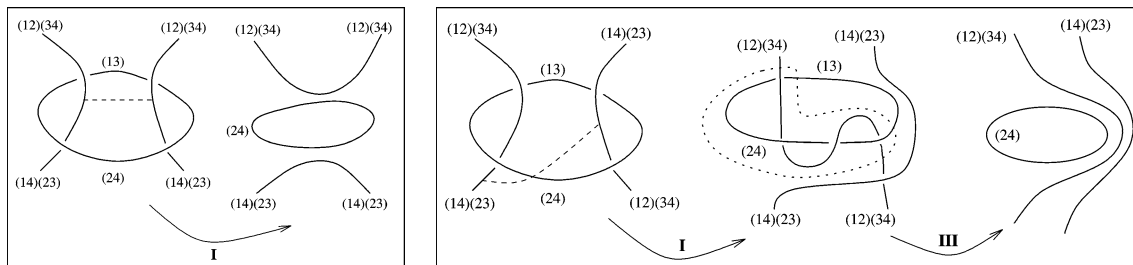


Fig. 4. Le disque percé par au moins deux arcs.

sur  $\partial D_i$ . A isotopie près, le remplacement de ce dernier arc par sa définition formelle ajoute à  $L_0$  une composante triviale non entrelacée et réduit  $\text{Card}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D})$ .

*Étape 4* : si un disque  $D_i$  est percé en son intérieur par au moins deux arcs,  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{A}$ , alors deux cas se présentent. Dans le premier cas illustré par la Fig. 4(a), les sous-arcs supérieurs de  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  possèdent la même étiquette. Nous appliquons alors la transformation étendue I de manière à faire décroître  $\text{Card}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D})$ . Dans le second cas illustré par la Fig. 4(b), les étiquettes des sous-arcs supérieurs sont différentes alors nous utilisons la transformation étendue I de façon à transformer  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  en deux nouveaux arcs dont l'un porte les deux intersections avec  $D_i$  et l'autre est disjoint de  $D_i$ . A l'aide de la transformation étendue III, nous éliminons les deux intersections.

*Étape 5* : nous obtenons alors que l'intérieur d'un disque  $D_i$  est percé par au plus un arc de  $\mathcal{A}$  et que  $\text{Card}(\partial D_i \cap \partial \mathcal{A}) \leq 1$ . Remarquons que si l'intérieur de  $D_i$  intersecte un arc de  $\mathcal{A}$  mais pas  $\partial D_i$  alors nous sommes dans la situation de l'étape 2. De manière analogue, si le bord de  $D_i$  intersecte  $\mathcal{A}$  mais pas l'intérieur alors, après être revenu à la définition initial de l'arc, par simples isotopies, nous pouvons fusionner les disques adjacents et ainsi diminuer  $\text{Card}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D})$ . Reste le cas où un disque  $D_i$  possède une intersection en son intérieur avec un arc  $\alpha$  ainsi qu'une sur son bord avec un arc  $\beta$ . Dans ce cas, nous restituons à  $\beta$  sa forme initiale puis faisons glisser l'arc  $\alpha$  entre les deux brins qui constituaient  $\beta$  jusqu'au disque adjacent. Nous simplifions alors  $\beta$  comme sus-décrit puis appliquons les étapes 2 ou 4 à l'arc  $\alpha$ .

Finalement, le résultat de ces opérations est, d'une part, un entrelacs  $\mathcal{A}$  et, d'autre part, un ensemble de disques  $\mathcal{D}$  tel que  $\text{Card}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}) = \emptyset$ .

*Étape 6* : comme le groupe  $K$  est abélien, nous pouvons appliquer les transformations étendues I, II et des isotopies de façons à changer chaque croisement de  $\mathcal{A}$  en son opposé. Il suit que nous pouvons rendre trivial  $\mathcal{A}$ . En revenant à la définition initiale des éléments de  $\mathcal{A}$ , nous obtenons ainsi une trivialisations  $(L_1, \rho_1)$  de notre entrelacs initial  $(L, \rho)$ .

Une généralisation triviale de la discussion du Paragraphe 2.4 de [1] nous permet de trouver une suite de transformations admissibles transformant le revêtement associé à  $(L_1, \rho_1)$  en un revêtement standard de  $S^3$  nous permettant ainsi de conclure la preuve.  $\square$

**Remarque.** La simplicité des groupes  $A_n$ , pour  $n > 4$ , implique que nous ne pouvons pas généraliser ce genre d'argument pour des revêtements simples à plus de quatre feuillets.

## Références

- [1] F. Harou, Description chirurgicale des revêtements triples simples de  $S^3$  ramifiés le long d'un entrelacs, Ann. Inst. Fourier 51 (5) (2001) 1229–1242.
- [2] F. Harou, A Geometrical method to find surgery presentation of 3-fold simple branched coverings of the 3-sphere, Prépublication CIRGET, 2002.
- [3] J. Montesinos, A representation of closed orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$ , Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 845–846.
- [4] J. Montesinos, Three-manifolds as 3-fold branched covers of  $S^3$ , Quart. J. Math. Oxford 27 (2) (1976) 85–90.
- [5] R. Piergallini, Four-manifolds as 4-fold branched covers of  $S^4$ , Topology 34 (1995) 497–508.