Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 593–596

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Topologie/Informatique théorique

Automate parallèle à homotopie près (I)

Concurrent process up to homotopy (I)

Philippe Gaucher

Institut de recherche mathématique avancée, ULP et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 12 juillet 2002 ; accepté après révision le 2 décembre 2002

Présenté par Jean-Louis Koszol

Résumé

Les CW-complexes globulaires et les flots sont deux modélisations géométriques des automates parallèles qui permettent de formaliser la notion de dihomotopie. La dihomotopie est une relation d'équivalence sur les automates parallèles qui préserve des propriétés informatiques comme la présence ou non de deadlock. On construit un plongement des CW-complexes globulaires dans les flots et on démontre que deux CW-complexes globulaires sont dihomotopes si et seulement si les flots associés sont dihomotopes. ***Pour citer cet article : P. Gaucher, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

Globular CW-complexes and flows are both geometric models of concurrent processes which allow to model in a precise way the notion of dihomotopy. Dihomotopy is an equivalence relation which preserves computer-scientific properties like the presence or not of deadlock. One constructs an embedding from globular CW-complexes to flows and one proves that two globular CW-complexes are dihomotopic if and only if the corresponding flows are dihomotopic. ***To cite this article: P. Gaucher, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Rappels sur les CW-complexes globulaires

Cette Note est la première de deux Notes présentant quelques résultats de [3]. Tous les espaces topologiques sont supposés faiblement séparés et compactement engendrés, c'est-à-dire dans ce cas homéomorphes à la limite inductive de leurs sous-espaces compacts (cf. l'appendice de [6] pour un survol des propriétés de ces espaces). On travaille ainsi dans une catégorie d'espaces topologiques (notée **Top**) qui est non seulement complète et cocomplète mais en plus cartésiennement fermée [8]. En d'autres termes, le foncteur $- \times X : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ a un adjoint à droite $\mathbf{TOP}(X, -)$. Dans la suite, pour $n \geqslant 1$, D^n est le disque fermé de dimension n et S^{n-1} est le bord de D^n, à savoir la sphère de dimension $n-1$. En particulier la sphère de dimension 0 est la paire $\{-1, +1\}$.

Si Z est un espace topologique non vide, on note $Glob^{\mathrm{top}}(Z)$ l'espace topologique obtenu en partant de $Z \times [0,1]$ et en quotientant par les relations $(z, 0) = (z', 0)$ et $(z, 1) = (z', 1)$ pour tout $z, z' \in Z$. Cet espace est muni de l'ordre

Adresse e-mail : gaucher@math.u-strasbg.fr (P. Gaucher).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00118-3

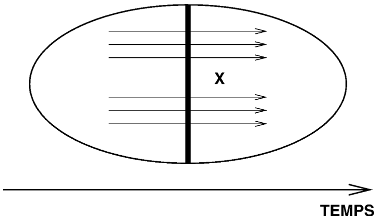

Fig. 1. Représentation symbolique de $Glob^{\mathrm{top}}(X)$ pour un espace topologique X.

partiel suivant : $(z,t) \leqslant (z',t')$ si et seulement si $z = z'$ et $t \leqslant t'$. La classe d'équivalence de $(z,0)$ (resp. $(z,1)$) est inférieure (resp. supérieure) à tous les points de $Glob^{\mathrm{top}}(Z)$. Le 0-*squelette* $Glob^{\mathrm{top}}(Z)^0$ de $Glob^{\mathrm{top}}(Z)$ sera la paire constituée de la classe de $(z,0)$ et de celle de $(z,1)$. On pose $\vec{I} = Glob^{\mathrm{top}}(\{*\})$ qui a donc pour 0-squelette $\{(*,0),(*,1)\}$.

Un *CW-complexe globulaire* X est, par définition, obtenu comme limite inductive $\varinjlim_n X_n^1$ d'espaces topologiques de la façon suivante. On part d'un espace discret X^0 appelé le 0-*squelette* et on commence par lui attacher des $\vec{I}$ pour obtenir un premier espace topologique X_0^1. Puis on suppose X_n^1 construit pour $n \geqslant 0$. On obtient alors X_{n+1}^1 en attachant à X_n^1 des $Glob^{\mathrm{top}}(D^{n+1})$ le long de $Glob^{\mathrm{top}}(S^n)$. Tout cela de telle façon que les attachements des $\vec{I}$ et les morphismes d'attachement $Glob^{\mathrm{top}}(S^n) \to X_n^1$ soient des morphismes de CW-complexes globulaires (cf. ci-dessous).

Un *chemin d'exécution* $\gamma : \vec{I} \to X$ est une application continue localement croissante pour l'ordre partiel défini sur chaque globe de X et telle que $\gamma(\vec{I}^0) \subset X^0$. L'ensemble de ces γ *non-constants* est noté $\mathbb{P}^{\mathrm{top}}(X)$. Un morphisme de CW-complexes globulaires $f : X \to Y$ pour X et Y quelconques est une application continue telle que $f(X^0) \subset Y^0$ et telle que $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ induise une application de $\mathbb{P}^{\mathrm{top}}(X)$ dans $\mathbb{P}^{\mathrm{top}}(Y)$. L'hypothèse de non-contractibilité des chemins d'exécution par f, qui peut paraître étrange en première lecture, est en fait essentielle pour pouvoir faire certaines constructions homologiques : cf. par exemple le chapitre « why non-contracting maps ? » de [4] ou bien [2].

Définition 1.1 [4]. Deux morphismes de CW-complexes globulaires f et g de X dans Y sont S-homotopes s'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que (1) $H(-,u)$ est un morphisme de CW-complexes globulaires de X dans Y pour tout $u \in [0,1]$. (2) $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = g$. On écrit $f \sim_S g$.

En particulier deux morphismes de CW-complexes globulaires S-homotopes coïncident sur le 0-squelette. De là on définit la notion de CW-complexes globulaires S-homotopes :

Définition 1.2 [4]. Deux CW-complexes globulaires X et Y sont S-homotopes s'il existe un morphisme de CW-complexes globulaires $f : X \to Y$ et un morphisme de CW-complexes globulaires $g : Y \to X$ telle que $f \circ g \sim_S \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f \sim_S \mathrm{Id}_X$.

Définition 1.3 [4]. Une T-homotopie $f : X \to Y$ est un morphisme de CW-complexes globulaires qui induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents. On dit alors que X et Y sont T-homotopes.

On peut alors démontrer le

Théorème 1.4 [4]. *La localisation* **Ho**(**glCW**) *de la catégorie* **glCW** *des CW-complexes globulaires par rapport aux S-homotopies et aux T-homotopies existe.*

La forme de globe suffit pour modéliser les automates parallèles [7]. De plus la S-homotopie et la T-homotopie ne modifient pas des propriétés informatiques comme la présence ou non de deadlock [4]. La catégorie **Ho**(**glCW**) est donc un cadre possible pour l'étude des automates parallèles à homotopie près.

2. Flot

Définition 2.1 [3]. Un flot X consiste en la donnée d'un ensemble X^0 appelé 0-squelette, d'un espace topologique $\mathbb{P}X$ appelé espace des chemins d'exécution (non-constants), de deux applications continues $s:\mathbb{P}X \to X^0$ et $t:\mathbb{P}X \to X^0$ (X^0 étant muni de la topologie discrète) et d'une application continue $*:\{(x,y)\in \mathbb{P}X\times\mathbb{P}X, t(x)=s(y)\}\to\mathbb{P}X$ satisfaisant les axiomes $s(x*y)=s(x)$, $t(x*y)=t(y)$ et enfin $x*(y*z)=(x*y)*z$ pour tout $x,y,z\in\mathbb{P}X$. Un morphisme de flots f de X vers Y est une application continue de $X^0\sqcup\mathbb{P}X$ vers $Y^0\sqcup\mathbb{P}Y$ tels que $f(X^0)\subset Y^0$, $f(\mathbb{P}X)\subset\mathbb{P}Y$, $s(f(x))=f(s(x))$, $t(f(x))=f(t(x))$, $f(x*y)=f(x)*f(y)$. La catégorie correspondante est notée **Flow**.

Si Z est un espace topologique, le flot $Glob(Z)$ est défini comme suit : $\mathbb{P}Glob(Z)=Z$, $Glob(Z)^0=\{0,1\}$, et enfin $s=0$ et $t=1$ (il n'y a pas de chemins d'exécution composables).

Définition 2.2 [3]. Deux morphismes de flots f et g de X dans Y sont S-homotopes s'il existe une application continue $H:X\times[0,1]\to Y$ telle que (1) $H(-,u)$ est un morphisme de flots de X dans Y pour tout $u\in[0,1]$. (2) $H(-,0)=f$ et $H(-,1)=g$. On écrit $f\sim_S g$.

On remarque que deux morphismes de flots S-homotopes coïncident sur le 0-squelette.

Définition 2.3 [3]. Deux flots X et Y sont S-homotopes s'il existe un morphisme de flots $f:X\to Y$ et un morphisme de flots $g:Y\to X$ tels que $f\circ g\sim_S \mathrm{Id}_Y$ et $g\circ f\sim_S \mathrm{Id}_X$.

Définition 2.4 [3]. Soit X un flot et soit Y un sous-ensemble de X^0. La restriction $X\restriction_Y$ de X à Y est le flot défini par (1) le 0-squelette de $X\restriction_Y$ est Y ; (2) $\mathbb{P}(X\restriction_Y)=\bigsqcup_{(\alpha,\beta)\in Y\times Y}\mathbb{P}_{\alpha,\beta}X$ avec une définition évidente des source, but et loi de composition.

Si X est un flot, l'ensemble $\mathbb{P}^-_\alpha X$ (resp. $\mathbb{P}^+_\alpha X$) est, dans la définition qui suit, l'ensemble des $\gamma\in\mathbb{P}X$ tels que $s(\gamma)=\alpha$ (resp. $t(\gamma)=\alpha$) quotienté par la relation d'équivalence identifiant γ avec $\gamma*\gamma'$ (resp. $\gamma'*\gamma$ et γ). C'est-à-dire que $\mathbb{P}^-_\alpha X$ (resp. $\mathbb{P}^+_\alpha X$) est l'ensemble des classes d'équivalence de chemins d'exécution non-constants commençant (resp. terminant) de la même façon en α.

Définition 2.5 [3]. Un morphisme de flots $f:X\to Y$ est une T-dihomotopie quand (1) Le morphisme de flots $X\to X\restriction_{f(X^0)}$ est un isomorphisme de flots ; (2) pour $\alpha\in Y^0\backslash f(X^0)$, $\mathbb{P}^-_\alpha Y$ et $\mathbb{P}^+_\alpha Y$ sont des singletons ; (3) pour tout $\gamma\in Y\backslash f(X)$, il existe $u,v\in Y$ tels que $u*\gamma*v$ soit dans l'image $f(X)$ (avec les conventions $s(x)*x=x*t(x)=x$). On dit alors que les flots X et Y sont T-dihomotopes.

3. Comparaison entre CW-complexe globulaire et flot

Théorème 3.1 [3]. *Il existe un et un seul foncteur cat (appelé réalisation catégorique) de* **glCW** *dans* **Flow** *tel que* $cat(X^0)=cat(X)^0$, $cat(Glob^{\mathrm{top}}(Z))=Glob(Z)$, *et* $cat(X)=\varinjlim_Z Glob(Z)$ *où Z parcourt la décomposition cellulaire du CW-complexe globulaire X.*

Si X est un espace discret, on pose naturellement $cat(X):=X$. Si Z est un compact, on pose naturellement $cat(Glob^{\mathrm{top}}(Z)):=Glob(Z)$. Puis on définit le plongement sur les objets en posant $cat(X):=\varinjlim_Z Glob(Z)$ où Z parcourt la décomposition cellulaire de X. Le plongement sur les morphismes est obtenu comme suit. On construit d'abord explicitement pour tout morphisme de CW-complexes globulaires $f:Glob^{\mathrm{top}}(Z)\to U$ le morphisme de flots $cat(f):Glob(Z)\to cat(U)$. Puis on pose pour $f:X\to U$ un morphisme de CW-complexes globulaires quelconque $cat(f):=\varinjlim_Z cat(f\restriction_{Glob^{\mathrm{top}}(Z)})$ où Z parcourt la décomposition cellulaire de X. On a donc par construction la bijection $\mathbf{Flow}(cat(X),cat(U))\cong\varprojlim_n \mathbf{Flow}(cat(X^1_n),cat(U))$.

Théorème 3.2 [3]. *Soit* $\mathbf{glTOP}(X,U)$ (*resp.* $\mathbf{FLOW}(cat(X),cat(U))$) *l'espace des morphismes de CW-complexes globulaires de* X *vers* U (*resp. de flots de* $cat(X)$ *vers* $cat(U)$) *muni de la Kelleyfication de la topologie induite par celle de* $\boldsymbol{TOP}(X,U)$ (*resp.* $\boldsymbol{TOP}(cat(X),cat(U))$). *Alors cat induit une homotopie faible* $cat_* : \mathbf{glTOP}(X,U) \to \mathbf{FLOW}(cat(X),cat(U))$. *De plus il existe une application continue* r *de* $\mathbf{FLOW}(cat(X),cat(U))$ *dans* $\mathbf{glTOP}(X,U)$ *telle que* $cat_* \circ r = \mathrm{Id}_{\mathbf{FLOW}(cat(X),cat(U))}$.

Considérons d'abord le cas $X = Glob^{\mathrm{top}}(Z)$. La construction de r se fait alors explicitement et on démontre que c'est un inverse homotopique de cat_*. Cela est essentiellement dû au fait que par un point donné de $Glob^{\mathrm{top}}(Z)$ autre que les deux points du 0-squelette, il ne passe qu'un et un seul chemin d'exécution non-constant (à reparamétrisation près).

On obtient alors r par itération sur la décomposition cellulaire de X. De plus avec [1] ou [5], on en déduit que $\underleftarrow{\mathrm{holim}}_n\, \mathbf{glTOP}(X_n^1, U)$ est faiblement homotope à $\underleftarrow{\mathrm{holim}}_n\, \mathbf{FLOW}(cat(X_n^1), cat(U))$.

On montre ensuite que les deux tours d'espaces donnant les deux limites projectives homotopiques sont des tours fibrantes, à savoir que toutes les applications apparaissant dans ces tours sont des fibrations d'espaces topologiques. Cela est essentiellement dû au fait que les inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ et donc $Glob^{\mathrm{top}}(S^{n-1}) \hookrightarrow Glob^{\mathrm{top}}(D^n)$ sont des cofibrations [9]. On en déduit donc, encore grâce à [1] ou [5], les équivalences d'homotopie faible $\underleftarrow{\lim}_n\, \mathbf{glTOP}(X_n^1, U) \cong \underleftarrow{\mathrm{holim}}_n\, \mathbf{glTOP}(X_n^1, U)$ et $\underleftarrow{\lim}_n\, \mathbf{FLOW}(cat(X_n^1), cat(U)) \cong \underleftarrow{\mathrm{holim}}_n\, \mathbf{FLOW}(cat(X_n^1), cat(U))$. Le résultat découle alors des homéomorphismes $\mathbf{glTOP}(X,U) \cong \underleftarrow{\lim}_n\, \mathbf{glTOP}(X_n^1, U)$ et $\mathbf{FLOW}(cat(X), cat(U)) \cong \underleftarrow{\lim}_n\, \mathbf{FLOW}(cat(X_n^1), cat(U))$.

Théorème 3.3 [3]. *Deux CW-complexes globulaires* X *et* Y *sont S-homotopes si et seulement si les flots* $cat(X)$ *et* $cat(Y)$ *sont S-homotopes.*

Les espaces topologiques $\mathbf{glTOP}(X,U)$ et $\mathbf{FLOW}(cat(X),cat(U))$ sont faiblement homotopes, et ont donc les mêmes composantes connexes par arc. Comme on travaille dans une catégorie d'espaces topologiques qui est cartésiennement fermée, une composante connexe par arc de $\mathbf{glTOP}(X,U)$ (resp. $\mathbf{FLOW}(cat(X),cat(U))$) est une classe de S-homotopie de morphismes de CW-complexes globulaires (resp. de flots). Le résultat découle alors de la surjectivité de l'application cat_*.

Enfin on a aussi :

Théorème 3.4 [3]. *Deux CW-complexes globulaires* X *et* Y *sont* T*-homotopes si et seulement si les flots* $cat(X)$ *et* $cat(Y)$ *sont* T*-homotopes.*

Références

[1] A.K. Bousfield, D.M. Kan, Homotopy Limits, Completions and Localizations, in: Lecture Notes in Math., Vol. 304, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[2] P. Gaucher, Homotopy invariants of higher dimensional categories and concurrency in computer science, Math. Structures Comput. Sci. 10 (4) (2000) 481–524.

[3] P. Gaucher, A convenient category for the homotopy theory of concurrency, 2002, math.AT/0201252.

[4] P. Gaucher, E. Goubault, Topological deformation of higher dimensional automata, 2001, math.AT/0107060, à paraître dans Homology, Homotopy and Applications.

[5] P.G. Goerss, J.F. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Birkhäuser, Basel, 1999.

[6] L.G. Lewis, The stable category and generalized Thom spectra, Ph.D. thesis, University of Chicago, 1978.

[7] V. Pratt, Modeling concurrency with geometry, in: Proc. of the 18th ACM Symposium on Principles of Programming Languages, ACM Press, 1991.

[8] N.E. Steenrod, A convenient category of topological spaces, Michigan Math. J. 14 (1967) 133–152.

[9] G.W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, New York, 1978.