Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 499–504

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Densité des zéros des transformés de Lévy itérés d'un mouvement brownien

Density of zeros for iterated Lévy transforms of Brownian motion

Marc Malric

15, avenue Gambetta, 94160 Saint-Mandé, France

Reçu le 16 décembre 2002 ; accepté le 31 janvier 2003

Présenté par Marc Yor

Résumé

Le transformé de Lévy d'un mouvement brownien B est le mouvement brownien $B'_t=\int_0^t \operatorname{sign} B_s\,\mathrm{d}B_s$; appelons B^n le mouvement brownien obtenu à partir de B en itérant n fois la transformation de Lévy. Nous montrons que, presque sûrement, l'ensemble des instants t où l'un au moins des B^n s'annule est dense dans l'axe des temps $\mathbb{R}_+$. ***Pour citer cet article : M. Malric, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

The Lévy transform of a Brownian motion B is the Brownian motion $B'_t=\int_0^t \operatorname{sgn} B_s\,\mathrm{d}B_s$; denote by B^n the Brownian motion obtained from B by iterating n times the Lévy transform. We establish that the set of all instants t such that $B^n_t=0$ for some n, is a.s. dense in the time-axis $\mathbb{R}_+$. ***To cite this article: M. Malric, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Let $(B_t)_{t\geqslant 0}$ be a one-dimensional Brownian motion started at 0, and $(L_t)_{t\geqslant 0}$ its local time at 0. The *Lévy transform* of B is the Brownian motion

$$B'_t=\int_0^t \operatorname{sgn} B_s\,\mathrm{d}B_s=|B_t|-L_t;$$

iterating this transformation yields the Brownian motions B^n defined by

$$B^0=B,\qquad B^{n+1}=\big(B^n\big)'.$$

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00083-9

Call $Z^n = \{t \geqslant 0\colon\ B^n_t = 0\}$ the (random) set of zeros of B^n, and put $Z = \bigcup_{n \geqslant 0} Z^n$.

Theorem. *With probability* 1*, the set* Z *is dense in* $\mathbb{R}_+$.

At the end of Chapter XII of [2], Revuz and Yor raise the question whether the Lévy transform $B \mapsto B'$ is ergodic, and give references on this problem. We believe our result – a necessary condition for ergodicity – may prove useful in studying this question. Other properties of the zeros of the B_n are given in [1].

Notation

If f is a continuous function on $[u, v]$, we call $\arg\min_{[u,v]} f$, resp. $\arg\max_{[u,v]} f$, the largest $t \in [u, v]$ such that $f(t) = \min_{[u,v]} f$, resp. $f(t) = \max_{[u,v]} f$.

The sample space will be the Wiener space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ of continuous paths started at 0, B is the canonical process $(B_t(\omega) = \omega(t))$, and $T : \Omega \to \Omega$ denotes the ($\mathbb{P}$-preserving) Lévy transform, defined up to a null event. All equalities and inequalities between r.v.'s or between events are to be understood $\mathbb{P}$-almost everywhere.

If $X : \Omega \to \mathbb{R}$ is a r.v., the r.v. $X \circ T$ will also be denoted by X'. The σ-field $T^{-1}\mathcal{A}$ is generated (up to null events) by the process $B'(= B^1 = B \circ T)$, and $T^{-n}\mathcal{A}$ by B^n.

Proof of the theorem

It suffices to prove that with probability 1 the closure $\overline{Z}$ of Z contains all positive rationals. So, fixing in the sequel some $a > 0$, we proceed to show that the r.v. $Y = \sup(Z \cap [0, a])$, which verifies $Y(\omega) \in \overline{Z}(\omega)$, is a.s. equal to a.

Introduce an increasing sequence of r.v.'s in $[0, a]$ by setting

$$S_0 = \arg\min_{[0,a]} |B| = \text{ last zero of } B \text{ before } a,$$

$$S_1 = \arg\max_{[S_0,a]} |B|, \quad S_2 = \arg\min_{[S_1,a]} |B|, \quad S_3 = \arg\max_{[S_2,a]} |B|, \quad \text{etc.}$$

Lemma 1. *The sequence* S_n *converges a.s. to* a.

Only at the very end of the proof will this lemma be used; meanwhile we shall establish the inequality $S_n \leqslant Y$, which, together with Lemma 1, will give $Y = a$ a.s.

Borrowed from excursion theory (see for instance Chapter VI of Revuz and Yor [2]), the next lemma is fundamental. The σ-field $\sigma(|B|)$ showing up is nothing but $\sigma(B')$, that is, $T^{-1}\mathcal{A}$; see [2], VI (2.2).

Lemma 2. *Let* M *be an* $\mathbb{N}$*-valued,* $\sigma(|B|)$*-measurable r.v. Let* $G_1, G_2, \ldots$ *be* $\sigma(|B|)$*-measurable r.v.'s such that each* G_i *is the starting time of an excursion of* B *and that, for* $i < j$, $G_i \neq G_j$ *a.s. on* $\{j \leqslant M\}$. *Call* $E_i = \lim_{t \downarrow\downarrow G_i} \operatorname{sgn} B_t$ *the sign of the excursion starting at* G_i. *Let* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *be* $\sigma(|B|)$*-measurable r.v.'s with values in* $\{-1, 1\}$.

The event $A = \{\forall i \leqslant M,\ E_i = \varepsilon_i\}$ *verifies* $\mathbb{P}[A \,|\, |B|] = 2^{-M}$.

Put $R = \arg\min_{[0,a]} B$, and call C the event $\{S_0 < R\}$ that the minimum of B before a is reached during the excursion straddling a.

Lemma 3. *This event* C *satisfies* $\mathbb{P}[C | T^{-1}\mathcal{A}] > 0$ *a.s.*

Proof. Put

$$H = \max_{[S_0,a]} |B|, \qquad \overline{C} = \big\{B > -H \text{ on } [0, S_0] \text{ and } B < 0 \text{ on }]S_0, a]\big\},$$

and observe that $\overline{C} = C$ a.s. Lemma 2 gives $\mathbb{P}[\overline{C}||B|] = 2^{-N-1}$, where N is the number of excursions of $|B|$ before S_0 and taller than H. $\square$

Lemma 3 is self-iterating; it just suffices to introduce $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} T^{-k}C$ to obtain:

Lemma 4. *The events C_n verify $\mathbb{P}[C_n|T^{-n-1}\mathcal{A}] > 0$ a.s.*

These events C_n can be expressed in terms of the times $R \circ T^k$ when the B^k reach their minima before a:

$$C_n = \{R \circ T^{n+1} < R \circ T^n < \cdots < R \circ T < R\},$$

and, since $R \circ T = S_0$, also in terms of the last zeros $S_0 \circ T^k$ of the B^k before a:

$$\begin{aligned} C_n &= \{S_0 \circ T^n < S_0 \circ T^{n-1} < \cdots < S_0 \circ T < S_0 < R\} \\ &\subset \{S_0 \circ T^n < S_0 \circ T^{n-1} < \cdots < S_0 \circ T < S_0\} = D_n. \end{aligned}$$

Lemma 5. *On D_n (and also a fortiori on C_n), one has $S_0 = S_n \circ T^n$.*

Proof. For $n = 0$ it is trivial ($D_0 = \Omega$); for $n = 1$ it stems from the fact that $\arg\min_{[0,a]} B' = S_0$. By induction on k, one then gets $S_k = S'_{k+1}$ for all $k \geqslant 0$ on D_1; and last, by induction on n, $S_k = S_{k+n} \circ T^n$ for all $k \geqslant 0$ on D_n. $\square$

Proof of the theorem. As $Y \circ T \leqslant Y$ and as these two r.v.'s have the same law, Y is T-invariant.

Lemmas 4 et 5 give $\mathbb{P}[S_n \circ T^n = S_0|T^{-n-1}\mathcal{A}] > 0$. From $S_0 \leqslant Y = Y \circ T^n$, one obtains $\mathbb{P}[S_n \circ T^n \leqslant Y \circ T^n|T^{-n-1}\mathcal{A}] > 0$, that is, $\mathbb{P}[S_n \leqslant Y|T^{-1}\mathcal{A}] \circ T^n > 0$, wherefrom $\mathbb{P}[S_n \leqslant Y|T^{-1}\mathcal{A}] > 0$. But both S_n and Y are measurable for $T^{-1}\mathcal{A} = \sigma(|B|)$, the former by definition, and the latter by invariance; so $\mathbb{1}_{\{S_n \leqslant Y\}} > 0$, that is, $S_n \leqslant Y$. And now Lemma 1 implies $Y = a$ a.s., proving the theorem. $\square$

1. Introduction

Soient $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien (unidimensionnel, issu de l'origine), et $(L_t)_{t\geqslant 0}$ son temps local en 0. Le *transformé de Lévy* de B est le mouvement brownien

$$B'_t = \int_0^t \operatorname{sign} B_s \, \mathrm{d}B_s = |B_t| - L_t \ ;$$

en itérant cette transformation, on obtient les mouvements browniens B^n définis par

$$B^0 = B, \qquad B^{n+1} = (B^n)'.$$

Appelons $Z^n = \{t \geqslant 0\colon\ B^n_t = 0\}$ l'ensemble (aléatoire) des zéros de B^n, et $Z = \bigcup_{n\geqslant 0} Z^n$ la réunion des Z^n. Notre but est d'établir le théorème que voici.

Théorème 1. *Presque sûrement, l'ensemble Z est dense dans $\mathbb{R}_+$.*

En fin du Chapitre VI de [2], Revuz et Yor posent la question de savoir si la transformation $B \mapsto B'$ est ergodique. La densité des zéros est une condition nécessaire pour l'ergodicité ; nous considérons le théorème ci-dessus comme une base de départ pour attaquer la question de Revuz et Yor. On pourra se reporter à [2] pour des références sur ce problème, et à [1] pour d'autres propriétés des zéros des browniens itérés.

2. Notations

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[u, v]$, nous poserons

$$\arg\min_{[u,v]} f = \sup\Bigl\{t \in [u, v]\colon\ f(t) = \min_{s\in[u,v]} f(s)\Bigr\}, \qquad \arg\max_{[u,v]} f = \sup\Bigl\{t \in [u, v]\colon\ f(t) = \max_{s\in[u,v]} f(s)\Bigr\}.$$

Le brownien B est défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; sans perdre en généralité, nous supposerons la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par B (et les négligeables). Les égalités ou inégalités entre variables aléatoires ou entre événements seront toujours entendues presque partout.

Toute v.a. X est une fonctionnelle $\phi(B)$ du brownien B ; ceci permet de définir une nouvelle v.a. $\phi(B')$, que nous écrirons X', ou $X \circ T$ pour respecter les habitudes de la théorie ergodique – bien que Ω ne soit pas nécessairement l'espace canonique. De même, si $A \in \mathcal{A}$, nous noterons $T^{-1}A$ l'événement A' tel que $\mathbb{1}_{A'} = \mathbb{1}_A \circ T$; et la tribu engendrée par B' sera appelée $T^{-1}\mathcal{A}$. La notation en T peut être itérée : la tribu $T^{-n}\mathcal{A}$ est celle engendrée par B^n, elle rend mesurable $X \circ T^n$, etc.

3. Démonstration du théorème

Il suffit de montrer que tout rationnel $a > 0$ est p.s. dans l'adhérence $\overline{Z}$ de Z. Nous fixons donc dans toute la suite un $a > 0$, et nous allons prouver que la v.a. $Y = \sup(Z \cap [0, a])$, évidemment à valeurs dans $\overline{Z}$, est p.s. égale à a.

Définissons une suite croissante de v.a. dans $[0, a]$ par

$$S_0 = \arg\min_{[0,a]} |B| = \text{ dernier zéro de } B \text{ avant } a,$$

$$S_1 = \arg\max_{[S_0,a]} |B|, \quad S_2 = \arg\min_{[S_1,a]} |B|, \quad S_3 = \arg\max_{[S_2,a]} |B|, \quad \text{etc.},$$

de sorte que $S_{n+1} = \arg\max_{[S_n,a]}((-1)^n|B|)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Lemme 1. *Lorsque n tend vers l'infini, S_n tend p.s. vers a.*

Démonstration. Appelons S_∞ la limite des S_n. Le maximum de $|B|$ sur $[S_{2n}, a]$ est $|B_{S_{2n+1}}|$; le minimum de $|B|$ sur $[S_{2n+1}, a]$ est $|B_{S_{2n+2}}|$; donc sur $[S_\infty, a]$ on a $|B_{S_{2n+2}}| \leqslant |B| \leqslant |B_{S_{2n+1}}|$ et, à la limite, $|B_{S_\infty}| \leqslant |B| \leqslant |B_{S_\infty}|$. Ainsi, $|B|$ est constant sur $[S_\infty, a]$; ceci entraîne $S_\infty = a$ p.s. $\square$

Mettons ce lemme de côté pour un moment ; le reste de la démonstration va consister à établir l'inégalité $S_n \leqslant Y$, qui, jointe au Lemme 1, donnera $Y = a$ p.s.

Notre outil fondamental sera le lemme ci-dessous, qui permet de changer de signe quelques excursions de B sans trop bouleverser certaines probabilités. La tribu $\sigma(|B|)$ qui y apparaît est aussi $\sigma(B')$, c'est-à-dire $T^{-1}\mathcal{A}$; voir à ce sujet Revuz et Yor [2], VI (2.2). Le codage des excursions par leurs instants de début est purement conventionnel ; on pourrait tout aussi bien faire d'autres choix.

Lemme 2 (principe de retournement des excursions). *Soit M une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, mesurable pour la tribu $\sigma(|B|)$. Soient $G_1, G_2, \ldots$ des v.a. > 0, mesurables pour $\sigma(|B|)$, telles que chaque G_i soit l'instant de début d'une excursion de B et que, pour $i < j$, $G_i \neq G_j$ p.s. sur $\{j \leqslant M\}$. Soit $E_i = \lim_{t\downarrow\downarrow G_i} \operatorname{sign} B_t$ le signe de l'excursion correspondante. Soient enfin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ des v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mesurables pour $\sigma(|B|)$.*

L'événement $A = \{\forall i \leqslant M,\ E_i = \varepsilon_i\}$ vérifie $\mathbb{P}[A \,|\, |B|] = 2^{-M}$.

Démonstration. Quitte à modifier les G_i sur $\{i > M\}$ (en y remplaçant par exemple G_i par le début de la première excursion de $|B|$ plus haute que 1 et postérieure à $G_1 \vee \cdots \vee G_{i-1}$), on est ramené au cas où $G_i \neq G_j$ p. s. La théorie des excursions (Revuz et Yor [2], Chapitre XII) entraîne que les v.a. E_i sont uniformes sur $\{-1, 1\}$, indépendantes entre elles et de $\sigma(|B|)$. En conséquence, sur $\{M = m\}$, on a

$$\mathbb{P}\big[A\,\big|\,|B|\big] = \mathbb{P}\big[E_1 = \varepsilon_1, \ldots, E_m = \varepsilon_m\,\big|\,|B|\big] = 2^{-m},$$

d'où finalement $\mathbb{P}[A\,|\,|B|] = 2^{-M}$. $\square$

Posons $R = \arg\min_{[0,a]} B$, et appelons C l'événement $\{S_0 < R\}$, qui signifie que le minimum avant a de B est atteint durant l'excursion qui enjambe a.

Lemme 3. *Cet événement C vérifie $\mathbb{P}[C|T^{-1}\mathcal{A}] > 0$ p.s.*

Démonstration. Posons

$$H = \max_{[S_0,a]} |B| \quad \text{et} \quad \overline{C} = \big\{B > -H \text{ sur } [0, S_0] \text{ et } B < 0 \text{ sur }]S_0, a]\big\}.$$

Sur $\overline{C}$, B atteint la valeur – H en un point de $]S_0, a]$, donc $\overline{C} \subset C$ (on a en fait $\overline{C} = C$ p.s., mais peu importe). L'événement $\overline{C}$ est réalisé lorsque toutes les excursions de $|B|$ antérieures à S_0 et de hauteurs excédant H (qui sont en nombre fini N) sont positives pour B, et que l'excursion de B commençant en S_0 est négative. Comme N, H et S_0 sont mesurables pour $\sigma(|B|)$, le Lemme 2 donne $\mathbb{P}[\overline{C}\,|\,|B|] = 2^{-N-1}$; d'où le résultat, puisque, rappelons-le, $|B|$ engendre $T^{-1}\mathcal{A}$. $\square$

Le Lemme 3 s'itère mécaniquement, en faisant intervenir $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} T^{-k}C$:

Lemme 4. *Les événements C_n vérifient $\mathbb{P}[C_n|T^{-n-1}\mathcal{A}] > 0$ p.s.*

Démonstration. Pour $n = 0$, cela résulte de $C_0 = C$ et du Lemme 3. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$, c'est-à-dire $\mathbb{P}[C_{n-1}|T^{-n}\mathcal{A}] > 0$. Il existe une v.a. $\Phi > 0$ telle que $\mathbb{P}[C_{n-1}|T^{-n}\mathcal{A}] = \Phi \circ T^n$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[C_n|T^{-n-1}\mathcal{A}\big] &= \mathbb{P}\big[C_{n-1} \cap T^{-n}C|T^{-n-1}\mathcal{A}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}\big[C_{n-1}|T^{-n}\mathcal{A}\big]\mathbb{1}_{T^{-n}C}|T^{-n-1}\mathcal{A}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[(\Phi \circ T^n)\mathbb{1}_{T^{-n}C}|T^{-n-1}\mathcal{A}\big] = \mathbb{E}\big[\Phi\mathbb{1}_C|T^{-1}\mathcal{A}\big] \circ T^n,\end{aligned}$$

et il ne reste qu'à vérifier que $\mathbb{E}[\Phi\mathbb{1}_C|T^{-1}\mathcal{A}] > 0$, c'est-à-dire que l'événement $\Gamma = \{\mathbb{E}[\Phi\mathbb{1}_C|T^{-1}\mathcal{A}] = 0\}$ est négligeable. Mais sur Γ on a $\Phi\mathbb{1}_C = 0$, donc $\mathbb{1}_C = 0$; d'où $\mathbb{P}[C \cap \Gamma] = 0$, puis $\mathbb{1}_\Gamma\mathbb{P}[C|T^{-1}\mathcal{A}] = \mathbb{P}[C \cap \Gamma|T^{-1}\mathcal{A}] = 0$, et enfin, par le Lemme 3, $\mathbb{1}_\Gamma = 0$. $\square$

Ces événements C_n ont une interprétation simple, à l'aide des instants $R \circ T^k$ où B^k atteint son minimum : puisque $B' = |B| - L$ et que L est constant sur $[S_0, a]$, on a $B' > B'_{S_0}$ sur $]S_0, a]$ et $B' \geqslant B'_{S_0}$ sur $[0, S_0]$. Il en résulte que $R \circ T$ ($= R'$, instant du minimum de B' avant a) n'est autre que S_0, et $C = \{R \circ T < R\}$, d'où

$$C_n = \big\{R \circ T^{n+1} < R \circ T^n < \cdots < R \circ T < R\big\}.$$

Les C_n s'interprètent aussi en termes des zéros des B^k : de $R \circ T = S_0$, on tire $R \circ T^{k+1} = S_0 \circ T^k$ (= dernier zéro de B^k avant a), puis

$$C_n = \big\{S_0 \circ T^n < S_0 \circ T^{n-1} < \cdots < S_0 \circ T < S_0 < R\big\} = D_n \cap \{S_0 < R\},$$

où l'on a posé $D_0 = \Omega$, $D_1 = \{S'_0 < S_0\}$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$D_n = \big\{S_0 \circ T^n < S_0 \circ T^{n-1} < \cdots < S_0 \circ T < S_0\big\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}D_1.$$

Lemme 5. *Sur D_n et a fortiori sur C_n, on a $S_0 = S_n \circ T^n$.*

Démonstration. Plus généralement, nous allons établir que, *sur D_n, on a $S_k = S_{k+n} \circ T^n$ pour tout $k \geqslant 0$.*

Le cas $n = 0$ étant trivial, commençons par le cas $n = 1$. Il s'agit de vérifier que, *sur l'événement $D_1 = \{S'_0 < S_0\}$, on a $S_k = S'_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 0$.*

Nous savons que $S_0 = \arg\min_{[0,a]} B'$; a fortiori, sur l'événement D_1, on a $\arg\min_{[S'_0,a]} B' = S_0$. Sur D_1, sign B' est constant sur $[S_0, a]$, et négatif car $B'_{S_0} = -L_{S_0}$; on en tire $\arg\min_{[S_0,a]} B' = \arg\max_{[S'_0,a]} |B'|$, c'est-à-dire $S_0 = S'_1$.

Toujours sur D_1, le processus $|B'| + |B|$ est, sur l'intervalle $[S_0, a]$, égal à $-B' + |B|$ donc à L : il y est constant. Sur cet événement, l'égalité $S_k = S'_{k+1}$ a lieu, nous venons de le voir, pour $k = 0$; et si elle a lieu pour un k, en écrivant

$$\begin{aligned} S_{k+1} = \arg\max_{[S_k,a]}\big((-1)^k|B|\big) &= \arg\max_{[S_k,a]}\big((-1)^k\big(-|B'|\big)\big) \\ &= \arg\max_{[S'_{k+1},a]}\big((-1)^{k+1}|B'|\big) = S'_{k+2}, \end{aligned}$$

on voit qu'elle a également lieu pour $k + 1$. Ainsi, l'affirmation est vraie pour $n = 1$.

Passons au cas général. Puisque $D_n \subset T^{-\ell} D_1$ pour tout $\ell < n$, l'étape précédente implique que, sur D_n, $S_k \circ T^\ell = S_{k+1} \circ T^{\ell+1}$ pour tout k et tout $\ell < n$. On en tire $S_{k+\ell} \circ T^\ell = S_{k+\ell+1} \circ T^{\ell+1}$ pour $0 \leqslant \ell \leqslant n - 1$, puis $S_k = S_{k+n} \circ T^n$. □

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le théorème.

Démonstration du théorème. Remarquons que $Y \circ T \leqslant Y$; ayant même loi, ces deux v.a. sont p.s. égales (Y est invariant).

Pris ensemble, les Lemmes 4 et 5 donnent $\mathbb{P}[S_n \circ T^n = S_0 | T^{-n-1}\mathcal{A}] > 0$. Comme $S_0 \leqslant Y = Y \circ T^n$, on en tire $\mathbb{P}[S_n \circ T^n \leqslant Y \circ T^n | T^{-n-1}\mathcal{A}] > 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}[S_n \leqslant Y | T^{-1}\mathcal{A}] \circ T^n > 0$, et il en résulte $\mathbb{P}[S_n \leqslant Y | T^{-1}\mathcal{A}] > 0$. Mais S_n et Y sont tous deux mesurables pour $T^{-1}\mathcal{A} = \sigma(|B|)$, le premier par définition, le second par invariance ; on a donc $\mathbb{1}_{\{S_n \leqslant Y\}} > 0$, c'est-à-dire $S_n \leqslant Y$. Jointe au Lemme 1, cette inégalité entraîne $Y = a$ p.s., et le théorème est établi. □

Références

[1] M. Malric, Transformation de Lévy et zéros du mouvement brownien, Probab. Theory Related Fields 101 (1995) 227–236.

[2] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, Third edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.