



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 413–418



Équations aux dérivées partielles

Calcul pseudodifférentiel en grande dimension  
et limites thermodynamiques

Pseudodifferential calculus in large dimension  
and thermodynamic limits

Christophe Royer

*Département de mathématiques (UMR CNRS 6056), Université de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France*

Reçu le 3 février 2003 ; accepté le 4 février 2003

Présenté par Jean-Michel Bony

**Résumé**

Si  $P_n(h)$  est un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel dans  $\mathbb{R}^n$  associé à un symbole holomorphe semi-borné dans un certain voisinage de l'espace de phase réel et à gradient borné, on décrit le symbole de  $e^{-tP_n(h)}$  à l'aide d'inégalités dont les constantes ne dépendent que des normes des dérivées du symbole de  $P_n(h)$ , mais pas de la dimension  $n$ . On applique enfin nos résultats aux limites thermodynamiques. *Pour citer cet article : C. Royer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

**Abstract**

If  $P_n(h)$  is a  $h$ -pseudodifferential operator in  $\mathbb{R}^n$  associated to an holomorphic semi-bounded symbol in some neighborhood of the real phase space, with bounded derivatives, we describe the symbol of  $e^{-tP_n(h)}$ , by inequalities where the constants depend on the bounds for the derivatives of the symbol of  $P_n(h)$ , but not on the dimension  $n$ . Some applications to thermodynamic limits are given. *To cite this article: C. Royer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

**Abridged English version**

The study of a  $n$ -particles chain leads to introducing some Hamiltonian in  $\mathbb{R}^n$  of the following form, with  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  satisfying good hypothesis:  $p_n(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, x_{k+1}, \xi_k, \xi_{k+1})$ . Associating, by the semiclassical Weyl calculus, to the symbol  $p_n(x, \xi)$  the  $h$ -pseudodifferential operator  $P_n(h)$ , we want first to know if the following sequence, indexed by the dimension  $n$ ,

$$\Lambda_n(t, h) = \frac{1}{n} \ln((2\pi h)^n \text{Tr} e^{-tP_n(h)}), \tag{1}$$

Adresse e-mail : [christophe.royer@univ-reims.fr](mailto:christophe.royer@univ-reims.fr) (C. Royer).

has a limit when  $n \rightarrow +\infty$ , called thermodynamic limit. A second problem consists to show that this limit, when it exists, has an asymptotic expansion in powers of  $h$  when  $h \rightarrow 0$ .

In 1994, Sjöstrand [5] has studied a related problem for an  $n$ -dimensional Schrödinger operator  $P_n(h)$ . He has described the kernel of the operator  $e^{-t/hP_n(h)}$  in terms independent on the dimension  $n$ , before to apply his results to the thermodynamic limits.

In this work, we replace the Schrödinger operator by pseudodifferential operators  $P_n(h)$  associated to symbols  $p_n(x, \xi)$  holomorphic on following open sets, with  $a > 0$ ,

$$\Omega_{2n}(a) = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid |\operatorname{Im}(x, \xi)|_\infty < a\}, \quad (2)$$

and satisfying, for some constant  $M > 0$  independent of  $n$ :

$$\left| \frac{\partial p_n}{\partial x_j}(x, \xi) \right| + \left| \frac{\partial p_n}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| \leq M, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega_{2n}(a), \quad \forall n \geq 1. \quad (3)$$

Our first aim (Théorème 2.2) is to give, assuming also that  $\operatorname{Re} p_n(x, \xi)$  is lower bounded, a description of the symbol of the operator  $e^{-tP_n(h)}$  (and not of the kernel like in [5]), where the constants will be independent on the dimension  $n$ . More precisely we show that the symbol of this operator is  $e^{-q_n(\cdot, t, h)}$ , with  $q_n$  admitting an asymptotic expansion in  $h$  whose coefficients satisfy inequalities similar to (3). This result will rely on theorems of composition in large dimension proved in [1].

We shall next apply our results, linking the asymptotic expansion of the thermodynamic limit defined by (1) to the greatest eigenvalue of some integral operator on  $\mathbb{R}^p$ , for a suitable  $p$  depending of the order of the asymptotic expansion in powers of  $h$ . This study has some common points with the works of Helffer [2]. In the preprint [4], Nourrigat has proved a similar result under the additional hypothesis that  $p_n$  is bounded, but in this case with the usual trace in the expression (1) replaced by a suitable one.

Our work can be applied for example to the Klein–Gordon operator  $P_n(h) = \sum_{j=1}^n \sqrt{1 - h^2 \Delta_j} + V_n(x)$ , where  $\Delta_j$  is the Laplacian for the variable  $x^{(j)} \in \mathbb{R}^k$  and  $V_n(x)$  is satisfying good hypothesis (see Section 5).

## 1. Introduction

L'étude d'une chaîne de  $n$  particules conduit à introduire des Hamiltoniens dans  $\mathbb{R}^n$  de la forme suivante, avec  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  vérifiant de bonnes hypothèses :  $p_n(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, x_{k+1}, \xi_k, \xi_{k+1})$ . En associant, via le calcul de Weyl semi-classique, au symbole  $p_n(x, \xi)$  l'opérateur  $h$ -pseudodifférentiel  $P_n(h)$ , on cherche à savoir si la suite indexée par la dimension  $n$ , définie par :

$$\Lambda_n(t, h) = \frac{1}{n} \ln((2\pi h)^n \operatorname{Tr} e^{-tP_n(h)}), \quad (1)$$

admet une limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , dite limite thermodynamique. Un second problème consiste à montrer que cette limite, si elle existe, admet un développement asymptotique en puissances de  $h$ , lorsque  $h \rightarrow 0$ .

En 1994, Sjöstrand a étudié un problème voisin, en particulier pour un opérateur de Schrödinger  $n$ -dimensionnel  $P_n(h)$ . Dans [5], il donne la description du noyau de l'opérateur  $e^{-t/hP_n(h)}$ , en des termes indépendants de la dimension  $n$ , pour ensuite appliquer ses résultats aux limites thermodynamiques.

Le but de cet article est de remplacer l'opérateur de Schrödinger par des opérateurs pseudodifférentiels  $P_n(h)$  associé à des symboles  $p_n(x, \xi)$  holomorphes sur des ouverts du type suivant, avec  $a > 0$

$$\Omega_{2n}(a) = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \mid |\operatorname{Im}(x, \xi)|_\infty < a\}, \quad (2)$$

dont les dérivées sont bornées indépendamment de la dimension  $n$ . En supposant que  $\operatorname{Re} p_n(x, \xi)$  est minoré, on détermine (Théorème 2.2) le symbole de  $e^{-tP_n(h)}$  sous la forme  $e^{-q_n(\cdot, t, h)}$ , en donnant un développement asymptotique en puissance de  $h$  de  $q_n(\cdot, t, h)$  dont les coefficients seront majorés indépendamment de la dimension  $n$ . On fera notamment appel à des résultats de [1], dans lequel la classe de symboles considérée est voisine de la nôtre.

On appliquera enfin nos résultats en reliant le développement asymptotique de la limite thermodynamique à l'étude de la plus grande valeur propre d'un opérateur intégral, démarche similaire aux travaux de Helffer [2]. Dans la prépublication [4], Nourrigat a obtenu un résultat analogue en supposant  $p_n$  borné, la trace usuelle dans l'expression (1) devant alors être remplacée par une trace admissible.

## 2. Enoncé du résultat principal pour l'exponentielle

On donne ci-dessous la définition de notre classe de symboles. Pour tout  $a > 0$ , l'ensemble  $\Omega_{2n}(a)$  est défini en (2). Si  $f$  est une fonction bornée dans  $\Omega_{2n}(a)$ , on pose  $\|f\|_a = \sup_{X \in \Omega_{2n}(a)} |f(x)|$ .

**Définition 2.1.** Pour tout  $a > 0$ , on note  $S(a)$  l'ensemble dont les éléments sont des suites  $(f_n)_{n \geq 1}$ , où  $f_n = f_n(h) = f_n(\cdot, h)$  est une fonction holomorphe dans l'ouvert  $\Omega_{2n}(a)$ , dépendant d'un paramètre  $h$  variant dans un intervalle de la forme  $]0, h_n]$ , où  $h_n > 0$ , et vérifiant les conditions suivantes. Il existe  $M > 0$ , indépendant de  $n$ , et des constantes  $C_n > 0$  telles que, si  $1 \leq j \leq n$  et si  $h \in ]0, h_n]$ , on ait :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f_n(x, \xi, h)) &\geq -C_n, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega_{2n}(a), \\ \left| \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x, \xi, h) \right| + \left| \frac{\partial f_n}{\partial \xi_j}(x, \xi, h) \right| &\leq M, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega_{2n}(a). \end{aligned} \tag{3}$$

Par le calcul de Weyl semi-classique, on associe à une fonction  $f$  convenable l'opérateur  $h$ -pseudodifférentiel  $\operatorname{Op}_h(f)$  défini par :

$$(\operatorname{Op}_h(f)u)(x) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \, dy \, d\xi.$$

On sait, par le calcul fonctionnel de Helffer–Robert, que l'exponentielle  $e^{-t \operatorname{Op}_h(p_n)}$  est également un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel. Notre problème est de décrire son symbole en des termes qui soient uniforme par rapport à la dimension  $n$ . Le résultat principal de ce travail est le suivant.

**Théorème 2.2.** Soient  $m \geq 2$  un entier,  $a$  et  $b$  deux réels vérifiant  $0 < a < b$  et  $p = (p_n)_{n \geq 1}$  un élément de  $S(b)$ , alors il existe  $\varepsilon_m > 0$ ,  $C_j > 0$  avec  $j \in \{1, \dots, m\}$ , indépendants de  $n$ , et une suite de fonctions  $q = (q_n)(x, \xi, t, h)$  holomorphes bornées sur  $\Omega_{2n}(a)$  tels que, si  $nh^m \leq \varepsilon_m$  :

$$e^{-t \operatorname{Op}_h(p_n)} = \operatorname{Op}_h(e^{-q_n(\cdot, t, h)}), \quad n \geq 1. \tag{4}$$

De plus,  $q_n$  admet le développement asymptotique suivant :

$$q_n(\cdot, t, h) = \sum_{j=0}^{m-1} E_n^{(j)}(\cdot, t, h) h^j + h^m R_n^{(m)}(\cdot, t, h), \tag{5}$$

où les familles de fonctions  $E_n^{(j)}$  sont dans  $S(a)$  et satisfont l'inégalité (3) de la Définition 2.1 si les conditions précédentes sont vérifiées. On a en particulier,  $E_n^{(0)}(x, \xi, t) = t p_n(x, \xi)$  et

$$\|E_n^{(j)}(\cdot, t)\|_a \leq n C_j, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \quad \|R_n^{(m)}(\cdot, t, h)\|_a \leq n C_m.$$

## 3. Intégrales oscillantes et composition de symboles en grande dimension

On note  $\sigma$  la forme symplectique dans  $\mathbb{C}^{2n}$  définie par  $\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = y \cdot \xi - x \cdot \eta$ . Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , bornées ainsi que toutes leurs dérivées, on note  $f \sharp_h g$  la fonction définie par l'intégrale

oscillante suivante :  $(f \sharp_h g)(X) = (\pi h)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{-\frac{2i}{h}\sigma(Y,Z)} f(X+Y)g(X+Z) dY dZ$ . On a alors le résultat suivant qui est obtenu de manière similaire au Lemme 5.1 de [1].

**Proposition 3.1.** *Soit deux réels  $a$  et  $b$  tel que  $0 < a < b$ , et soit  $f$  et  $g$  des fonctions holomorphes bornées dans  $\Omega_{2n}(b)$ . Alors  $f \sharp_h g$  est holomorphe bornée dans  $\Omega_{2n}(a)$  et on a*

$$\|f \sharp_h g\|_a \leq \|f\|_b \|g\|_b \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{h}}{b-a} e^{-(b-a)^2/h}\right)^{4n}. \tag{6}$$

La démonstration du Théorème 2.2 va se faire en utilisant un théorème du point fixe. Il nous faut pour cela estimer des quotients du type

$$\psi_h(f_1, f_2) = \frac{(e^{-p_1} f_1) \sharp_h (e^{-p_2} f_2)}{e^{-p_1} \sharp_h e^{-p_2}}. \tag{7}$$

**Théorème 3.2.** *Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux fonctions holomorphes dans  $\Omega_{2n}(R)$  ( $R > 0$ ), ayant leur dérivées bornées. Soit  $f_1$  et  $f_2$  des fonctions holomorphes, bornées respectivement sur  $\Omega_{2n}(\mu_1)$  et  $\Omega_{2n}(\mu_2)$ , avec  $0 < \mu_i < R$  ( $j = 1, 2$ ). Alors la fonction  $\psi_h(f_1, f_2)$  définie en (7) est holomorphe et bornée dans  $\Omega_{2n}(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in ]0, \min(\mu_1, \mu_2)[$ , et satisfait pour chaque entier  $m$ , si on pose  $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$  et  $R' = \max(\mu_1, \mu_2)$*

$$\|\psi_h(f_1, f_2)\|_\lambda \leq \left(1 + \frac{K_m h^m}{(\mu - \lambda)^{2m}}\right)^n \|f_1\|_{\mu_1} \|f_2\|_{\mu_2}, \tag{8}$$

si  $h$  vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} h \|\nabla p_2\|_R \leq \frac{\mu_1 - \lambda}{4} \\ h \|\nabla p_1\|_R \leq \frac{\mu_2 - \lambda}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad nh^m \leq \varepsilon_m,$$

où  $K_m > 0$  et  $\varepsilon_m > 0$  dépendent de  $R, R', m$  et  $\|\nabla p_j\|_R$  ( $j = 1, 2$ ), mais pas de  $n$ .

#### 4. Construction d’une solution approchée, idée de la preuve du Théorème 2.2

L’aspect formel du Théorème 2.2 est très similaire de celui du Théorème 2.2 de [1]. La seule différence est que le calcul standard est maintenant remplacé par le calcul de Weyl. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dans  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , on pose  $(f \otimes g)(x, \xi, y, \eta) = f(x, \xi)g(y, \eta)$  et  $a_k(f, g)(x, \xi) = \frac{i^k}{2^k k!} \sigma((D_x, D_\xi), (D_y, D_\eta))^k (f \otimes g)(x, \xi, x, \xi)$ . Si  $f$  et  $g$  sont bornées, ainsi que toutes leurs dérivées, on a  $(f \sharp_h g)(X) \sim \sum_{k \geq 0} a_k(f, g)(X) h^k$ .

**Définition 4.1.** Soit  $j$  et  $k$  des entiers  $\geq 1$ , pour toutes fonctions  $p$  et  $\Phi_0, \dots, \Phi_{k-1}$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , on note  $c_j^{(k)}(p, \Phi_0, \dots, \Phi_{k-1})$  le coefficient de  $h^j$  dans le polynôme  $e^\Phi a_k(p, e^{-\Phi})$ , avec  $\Phi = \Phi_0 + \dots + h^{k-1} \Phi_{k-1}$ . Si  $p = (p_n)$  est dans  $S(b)$  ( $b > 0$ ), on peut alors construire, pour tout réel  $a$  vérifiant  $0 < a < b$ , une suite  $(E_n^{(k)}(\cdot, t))_{k \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $S(a)$ , définie par  $E_n^{(0)}(x, \xi, t) = t p_n(x, \xi)$  et, si  $k \geq 1$ , par

$$\frac{\partial E_n^{(k)}}{\partial t} = \sum_{j=1}^k c_j^{(k-j)}(p, E_n^{(0)}, \dots, E_n^{(k-1)}), \quad E_n^{(k)}(x, \xi, 0) = 0.$$

Pour tout  $m \geq 1$ , on pose  $\Phi_n^{(m)}(x, \xi, t, h) = \sum_{j=0}^{m-1} E_n^{(j)}(x, \xi, t) h^j$ .

La fonction  $e^{-\Phi_n^{(m)}(\cdot, t, h)}$  va être une approximation de l'exponentielle du Théorème 2.2. Dans la proposition suivante, on donne une majoration du terme d'erreur  $r_n^{(m)}(\cdot, t, h)$ , défini par :

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-\Phi_n^{(m)}(\cdot, t, h)} = -p_n \#_h e^{-\Phi_n^{(m)}(\cdot, t, h)} + e^{-\Phi_n^{(m)}(\cdot, t, h)} r_n^{(m)}(\cdot, t, h). \tag{9}$$

**Proposition 4.2.** *Soit  $a$  et  $b$  tel que  $0 < a < b$ , avec les notations de la Définition 4.1, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  indépendant de  $n$  tel que si  $0 < h \leq \varepsilon_0(1 + \ln n)^{-1}$  et  $t \in [0, 1]$ , la famille de fonctions  $r_n^{(m)}(\cdot, t, h)$  définie en (9) est dans  $S(a)$ , et vérifie*

$$\|r_n^{(m)}(\cdot, t, h)\|_a \leq A_m n h^m, \tag{10}$$

la constante  $A_m$  étant indépendante de  $n$  et de  $h$ .

La preuve du Théorème 2.2 se ramène alors, via Éq. (9) et l'inégalité (10), à l'étude d'une équation intégrale dont on détermine la solution par un théorème du point fixe. Pour le mettre en œuvre, on utilise le Théorème 3.2 en remplaçant  $p_i$  par la fonction  $\Phi_n^{(m)}(t_i, h)$  ( $i = 1, 2$ ) de la Définition 4.1 et en généralisant la majoration (8) à la composition de  $k$  termes.

### 5. Application aux limites thermodynamiques

En chaque point du réseau uni-dimensionnel  $\mathbb{Z}$ , on considère une particule  $A_j$  décrite, s'il n'y a pas d'interaction, par un Hamiltonien  $A(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ , avec  $k \geq 1$ . L'interaction entre  $A_j$  et  $A_{j+1}$  sera décrite par une fonction  $B(x, \xi, y, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^{4k})$ . On fait les hypothèses suivantes sur les fonctions  $A$  et  $B$  :

- $A$  (resp.  $B$ ) se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\Omega_{2p}(a)$  (resp. sur  $\Omega_{4p}(a)$ ).
- $A$  (resp.  $B$ ) est à valeurs réelles pour  $(x, \xi)$  réel (resp. pour  $(x, \xi, y, \eta)$  réel) et  $B(x, \xi, y, \eta) = B(y, \eta, x, \xi)$ .
- La partie réelle de  $A$  est semi-bornée inférieurement sur  $\Omega_{2p}(a)$ ,  $A$  a toutes ses dérivées bornées sur  $\Omega_{2p}(a)$  et vérifie, avec  $\delta > 0 : \exists R > 0, \exists C > 0$  tels que  $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2p}, |x, \xi|_\infty \geq R \Rightarrow A(x, \xi) \geq C|x, \xi|_\infty^\delta$ .
- $B$  est bornée sur  $\Omega_{4p}(a)$  ainsi que toutes ses dérivées.

S'il n'y pas d'interaction entre  $A_n$  et  $A_{-n}$ , l'Hamiltonien décrivant le système de particules  $A_j$  ( $|j| \leq n$ ) est le suivant, en posant  $X^{(j)} = (x^{(j)}, \xi^{(j)}) \in \mathbb{R}^{2k}$  et en notant  $X = (X^{(-n)}, \dots, X^{(n)})$  la variable de  $\mathbb{R}^{2k(2n+1)}$  :

$$\tilde{p}_n(X) = \sum_{j=-n}^n A(X^{(j)}) + \sum_{j=-n}^{n-1} B(X^{(j)}, X^{(j+1)}).$$

Dans le cas d'une interaction entre  $A_n$  et  $A_{-n}$ , l'Hamiltonien devient  $p_n(X) = \tilde{p}_n(X) + B(X^{(n)}, X^{(-n)})$ .

On note  $P_n(h) = \text{Op}_h(p_n)$  et  $\tilde{P}_n(h) = \text{Op}_h(\tilde{p}_n)$ . Sous nos hypothèses,  $(p_n)_{n \geq 1}$  et  $(\tilde{p}_n)_{n \geq 1}$  sont dans  $S(a)$ , on peut donc appliquer le Théorème 2.2. On définit alors la limite thermodynamique comme étant la limite, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , de la suite :

$$\Lambda_n(t, h) = \frac{1}{2n+1} \ln((2\pi h)^{(2n+1)k} \text{Tr} e^{-t P_n(h)}).$$

On définit de même  $\tilde{\Lambda}_n(t, h)$  pour  $\tilde{P}_n(h)$ . L'existence de la limite thermodynamique est donnée par le théorème suivant, conséquence d'un résultat classique (cf. Lemme 2.5 [3]).

**Théorème 5.1.** *Pour tout  $t \in ]0, 1]$  et  $h \in ]0, 1]$ , les suites  $(\Lambda_n(t, h))$  et  $(\tilde{\Lambda}_n(t, h))$  ont la même limite  $\Lambda(t, h)$ . De plus il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall n \geq 1, \forall h \in ]0, 1], \forall t \in ]0, 1]$  :*

$$|\Lambda_n(t, h) - \Lambda(t, h)| + |\tilde{\Lambda}_n(t, h) - \Lambda(t, h)| \leq \frac{C}{n}. \tag{11}$$

Pour définir le premier terme du développement asymptotique de  $\Lambda(t, h)$ , on utilise l'opérateur intégral  $S_0(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^{2k})$ , défini par :

$$(S_0(t)u)(X) = \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-t/2(A(X)+2B(X,Y)+A(Y))} u(Y) dY \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^{2k}). \quad (12)$$

Cet opérateur est auto-adjoint et traçable. Par le Théorème de Krein–Rutman, la norme  $\|S_0(t)\|$  est une valeur propre simple de  $S_0(t)$  et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à  $\|S_0(t)\|$ .

En posant pour  $m \geq 0$ , via la relation (5) du Théorème 2.2,  $q_n^{(m)}(x, \xi, t, h) = \sum_{j=0}^m E_n^{(j)}(x, \xi, t) h^j$ , on remarque qu'il existe  $d_m \in \mathbb{N}$  et  $F^{(m)}(\cdot, t, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2k(d_m+1)})$  tels que :

$$q_n^{(m)}(x, \xi, t, h) = \sum_{j=-n}^n F^{(m)}(X^{(j)}, \dots, X^{(j+d_m)}, t, h).$$

On définit alors, à partir de la fonction  $F^{(m)}$  et de manière analogue à  $S_0(t)$ , un opérateur intégral  $S_m(t, h)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^{2kd_m})$ . En montrant que  $S_m(t, 0)$  et  $S_0(t)^{d_m}$  sont isospectraux et en notant  $\lambda_m(t, h)$  la plus grande valeur propre de  $S_m(t, h)$ , on obtient alors par le Théorème 2.2 et la théorie classique de perturbation d'une valeur propre simple :

$$\Lambda(t, h) = \frac{1}{d_m} \ln(\lambda_m(t, h)) + \mathcal{O}(h^m).$$

**Théorème 5.2.** *La limite thermodynamique  $\Lambda(t, h)$  admet le développement asymptotique suivant, quand  $h \rightarrow 0$  :  $\Lambda(t, h) \sim \sum_{j \geq 0} \gamma_j(t) h^j$ , où les  $\gamma_j(t)$  sont des nombres réels, et  $\gamma_0(t) = \ln(\|S_0(t)\|)$ , l'opérateur  $S_0(t)$  étant défini en (12).*

Nos résultats peuvent par exemple s'appliquer à l'opérateur de Klein–Gordon suivant :

$$P_n(h) = \sum_{j=-n}^n \sqrt{1 - h^2 \Delta_j + V_n(x)},$$

où  $\Delta_j$  désigne le Laplacien pour la variable  $x^{(j)} \in \mathbb{R}^k$  et  $V_n(x) = \sum_{j=-n}^n V(x^{(j)}) + \sum_{j=-n}^{n-1} W(x^{(j)}, x^{(j+1)})$ , avec  $V$  et  $W$  vérifiant des hypothèses de même type que celles faites au début de la section sur  $A$  et  $B$ .

## Références

- [1] L. Amour, Ph. Kerdelhue, J. Nourrigat, Calcul pseudodifférentiel en grande dimension, Prépublication 99.12, Reims, 1999.
- [2] B. Helffer, Around a stationary phase theorem in large dimension, J. Funct. Anal. 119 (1) (1994) 217–252.
- [3] B. Helffer, J. Sjöstrand, Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation. I. The one well case, in: Méthodes semi-classiques, Vol. 2, in: Astérisque, Vol. 210, Soc. Math. France, Paris, 1992, pp. 135–181.
- [4] J. Nourrigat, Pseudodifferential calculus and thermodynamic limits, Prépublication 01.09, Reims, 2001.
- [5] J. Sjöstrand, Evolution equations in large number of variable, Math. Nachr. 166 (1994) 17–53.