Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 349–352

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

Mesures quasi-invariantes pour un feuilletage et limites de moyennes longitudinales

Quasi-invariant measures for a foliation and limits of leafwise averages

Barbara Schapira

Mapmo (UMR 6628), faculté des sciences, Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans cedex 2, France

Reçu et accepté le 16 janvier 2003

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Dans cette Note, nous généralisons un résultat de Goodman–Plante qui caractérise les valeurs d'adhérence de certaines suites de moyennes transverses à un feuilletage : ce sont toutes des mesures transverses invariantes par holonomie. Nous montrons un résultat analogue pour des moyennes longitudinales pondérées par un cocycle Δ : leurs valeurs d'adhérence sont le produit d'une mesure transverse quasi-invariante pour Δ et de la mesure longitudinale de départ. ***Pour citer cet article : B. Schapira, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In this Note, we generalize a result of Goodman–Plante, who characterizes limit points of averaging sequences as holonomy invariant transverse measures. We prove an analogous result for some leafwise averages, weighted with a cocycle Δ, whose limit points are a product of a quasi-invariant transverse measure with respect to Δ with a leafwise measure. ***To cite this article: B. Schapira, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Cadre

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage abstrait (au sens de [1]) de dimension p d'un espace métrisable compact M, dont les transversales sont modelées sur un espace topologique X localement compact métrisable à base dénombrable d'ouverts. Si $\varphi : B \to U \times \mathbf{R}^p$ est une carte du feuilletage, avec U un ouvert de X, B est appelée une *boîte* ; une *plaque* de B est un ensemble $P = \varphi^{-1}(\{u\} \times \mathbf{R}^p)$, et une *transversale* T de B est de la forme $T = \varphi^{-1}(U \times \{x\})$. Si P est une plaque et T une transversale de B, nous noterons $B = T \times P$. Si $x \in B$, P_x désigne sa plaque dans B et $F(x)$ sa feuille. Nous ne considérons que les boîtes relativement compactes d'un *recouvrement régulier* $\mathcal{U}$

Adresse e-mail : schapira@labomath.univ-orleans.fr (B. Schapira).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00038-4

de $\mathcal{F}$, i.e. un recouvrement par des boîtes B_i formant une base de la topologie de $\mathcal{F}$, telles que si $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, toute plaque de B_i intersecte au plus une plaque de B_j. Comme M est compact, on peut recouvrir $\mathcal{F}$ par un nombre fini de telles boîtes. Pour un tel recouvrement, si T_i est une transversale de B_i, considérons *l'espace des plaques* (compact) associé $X = \bigsqcup_i \overline{T_i}$.

Une *application d'holonomie* $\zeta : T \to T'$ entre deux transversales est un homéomorphisme engendré (au sens d'un pseudogroupe) par les homéomorphismes entre deux transversales d'une même boîte B de $\mathcal{U}$ qui préservent les plaques de B. Un élément $\gamma : x \to y$ du *groupoïde d'holonomie* $\mathcal{G}$ (voir [2]) est le germe d'une holonomie ζ telle que $\zeta(x) = y$. Une feuille F sera dite sans holonomie si pour tous $(x, y) \in F^2$, il existe un unique $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\gamma : x \to y$. Un *système de Haar* (resp. une *mesure longitudinale*) λ est la donnée d'une famille de mesures de Radon λ_F sur chaque feuille F de $\mathcal{F}$, telle que pour toute application continue $\psi : B \to \mathbf{R}$, avec $B = T \times P$ une boîte relativement compacte, l'application : $t \in T \to \int_{P_t} \psi(x)\, \mathrm{d}\lambda_{F(t)}(x)$ est continue (resp. mesurable). Le *support* de λ est l'ensemble des feuilles F telles que $\lambda_F(F) > 0$. Un système de Haar λ de support plein satisfait la condition de régularité suivante : il existe un recouvrement $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ par des boîtes $B = T \times P$ relativement compactes telles que :

$$0 < \inf_{t\in T} \lambda(P_t) \leqslant \sup_{t\in T} \lambda(P_t) < +\infty. \tag{1.1}$$

Si X est l'espace des plaques, la mesure longitudinale λ^X définie sur chaque feuille F par :

$$\lambda_F^X = \sum_{x\in F\cap X} \delta_x \tag{1.2}$$

est une mesure de support plein par définition de X, qui vérifie aussi clairement la condition (1.1).

Une *mesure transverse* μ est la donnée d'une famille de mesures μ_T sur chaque transversale T au feuilletage. Elle est *invariante par holonomie* si pour toute holonomie $\zeta : T \to T'$, $\zeta_* \mu_T = \mu_{T'}$.

Rappelons le résultat de Goodman et Plante [3] que nous généralisons ici. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ensembles finis de l'espace des plaques X, et $\lim A_n$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $x_n \in A_n$. Notons ν_X^n la mesure : $\nu_X^n = (1/(\sharp A_n)) \sum_{x\in A_n} \delta_x$.

Théorème 1.1 (Goodman et Plante [3]). *Si pour toute holonomie $\zeta : T' \to T$, avec $T \subset X$ et $T' \subset X$, on a $\lim_{n\to+\infty} \nu_X^n((A_n \cap T)\Delta\zeta(A_n \cap T')) = 0$, alors toutes les valeurs d'adhérence de la suite ν_X^n sont des probabilités à support dans* $\lim A_n$ *qui sont invariantes par holonomie.*

Notons que sur un feuilletage à croissance polynomiale, il existe des suites $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant l'hypothèse ci-dessus [3,4].

2. Equidistribution de moyennes

Nous généralisons le Théorème 1.1 dans deux directions : au lieu de moyennes sur des ensembles finis A_n de X, nous considérons des moyennes sur des suites d'ensembles E_n d'une feuille de $\mathcal{F}$, pour une mesure longitudinale λ, pondérées par un cocycle Δ. (Les A_n ci-dessus correspondent à $X \cap E_n$.) Leurs valeurs d'adhérence sont des mesures sur M, que nous cherchons à désintégrer en un produit d'une mesure transverse quasi-invariante par holonomie (pour le cocycle Δ) par la mesure longitudinale λ.

Un *cocycle continu sur* $\mathcal{G}$ est une application $\Delta : \mathcal{G} \to \mathbf{R}_+^*$ continue (pour la topologie de $\mathcal{G}$, voir [2]), qui vérifie $\Delta(\gamma)\Delta(\gamma') = \Delta(\gamma\gamma')$. Si $\gamma : x \to y$ est un élément de $\mathcal{G}$, et si $\Delta(\gamma)$ ne dépend que de (x, y) (par exemple si la feuille de x et y est sans holonomie), nous noterons $\Delta(x, y)$ au lieu de $\Delta(\gamma)$.

Une mesure transverse est dite *quasi-invariante pour le cocycle* Δ si pour toute holonomie $\zeta : T \to T'$, de germe en x noté $[\zeta]_x : x \to \zeta x$, on a $\frac{\mathrm{d}\mu_{T'}}{\mathrm{d}\zeta_*\mu_T}(\zeta x) = \Delta([\zeta]_x)$, $\mu_{T'}$ p.p.

La donnée d'une mesure transverse quasi-invariante μ pour le cocycle Δ et d'une mesure longitudinale λ permet de définir une mesure, notée $\mu \circ \lambda$, sur M. Elle est définie sur toute boîte $B = T \times P$ par :

$$\mu \circ \lambda(B) = \int_T \mathrm{d}\mu_T(t) \int_{P_t} \Delta(x,t)\, \mathrm{d}\lambda_{F(t)}(x). \tag{2.3}$$

Par abus de notation, $\Delta(x,t)$ signifie ici $\Delta(\gamma)$, avec $\gamma : x \to t$ le germe de l'application d'holonomie de x à t qui suit les plaques de B. Par quasi-invariance de μ, cette quantité ne dépend pas du choix de T dans B, donc $\mu \circ \lambda$ est bien définie.

Introduisons les objets qui vont intervenir dans l'énoncé 2.1. Soit λ une mesure longitudinale, Δ un cocycle continu sur $\mathcal{G}$, F une feuille sans holonomie (ou telle que pour tous $(x,y) \in F^2$ et $\gamma : x \to y$, $\Delta(\gamma)$ ne dépend que de x et y), et $x_0 \in F$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts connexes relativement compacts de F tels que $0 < \lambda_F(E_n) < \infty$. Pour toute application continue $\psi : M \to \mathbf{R}$, définissons :

$$M_n^{\Delta,\lambda}(\psi) = \frac{1}{D_n} \int_{E_n} \psi(x) \Delta(x,x_0)\, \mathrm{d}\lambda_F(x), \quad \text{où } D_n = \int_{E_n} \Delta(x,x_0)\, \mathrm{d}\lambda_F(x).$$

Nous dirons que la suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *régulière relativement à* λ si pour toute boîte $B = T \times P$ du recouvrement $\mathcal{B}$ de (1.1), il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N$, et $t \in T \cap E_n$, on a :

$$\text{si } 0 < \lambda_F(P_t \cap E_n) < \lambda_F(P_t), \quad \text{alors } E_n^c \cap \partial B \neq \emptyset. \tag{2.4}$$

Cette condition est vérifiée si le feuilletage est de dimension 1, ou si $\lambda = \lambda^X$, ou si pour tout $n \in \mathbf{N}$, E_n^c est connexe. Elle permet d'éviter que quand $n \to \infty$, E_n^c ait un nombre grandissant de composantes connexes de plus en plus petites dont la λ_F-mesure totale ne tend pas vers 0, situation dans laquelle nous ne pouvons pas contrôler les moyennes $M_n^{\Delta,\lambda}$.

Si T est une transversale au feuilletage, notons ν_T^n la mesure : $\nu_T^n = (1/D_n)\sum_{t\in T\cap E_n} \Delta(t,x_0)\delta_t$. Ceci définit donc une mesure ν^n transverse au feuilletage. Notre résultat est le suivant :

Théorème 2.1. *Soit* $(M,\mathcal{F})$ *une lamination d'un espace compact* M, λ *un système de Haar de support plein,* Δ *un cocycle continu pour le feuilletage et* $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite vérifiant* (2.4). *Supposons que pour toute holonomie* $\zeta : T' \to T$, *on ait* :

$$\lim_{n\to\infty} \nu_T^n\big((T \cap E_n) \Delta \zeta(T' \cap E_n)\big) = 0. \tag{2.5}$$

Alors les valeurs d'adhérence de $M_n^{\Delta,\lambda}$ *sont des probabilités de la forme* $m = \nu \circ \lambda$, *avec* ν *une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle* Δ.

Remarque 2.2. Lorsque $\lambda = \lambda^X$, les moyennes $M_n^{\Delta,\lambda^X} = \nu_X^n$ sont à support dans X, et la même preuve montre que leurs valeurs d'adhérence sont des probabilités sur X quasi-invariantes pour le cocycle Δ. En particulier, si Δ est le cocycle trivial égal à 1, on retrouve le Théorème 1.1.

Corollaire 2.3. *Sous les mêmes hypothèses, si de plus il existe une unique* (*à une constante multiplicative près*) *mesure transverse* ν *quasi-invariante pour le cocycle* Δ, *alors les moyennes* $M_n^{\Delta,\lambda}$ *convergent vers* $m = \frac{1}{\nu\circ\lambda(M)}\nu \circ \lambda$.

Démonstration. Quitte à extraire une sous-suite, nous supposerons que les moyennes $M_n^{\Delta,\lambda}$ convergent vers une probabilité m sur M. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que sur toute boîte B fixée du recouvrement $\mathcal{B}$ de (1.1), m est de la forme $\nu \circ \lambda$, avec ν une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle Δ. Si une telle boîte $B = T \times P$ vérifie $m(B) = 0$, on pose $\nu_T = 0$. Supposons donc $m(B) > 0$. Pour tout choix de transversale T telle que $B = T \times P$, on peut réécrire :

$$M_n^{\Delta,\lambda}(B) = \int_T \mathrm{d}\nu_T^n(t) \int_{P_t} \Delta(x,t)\, \mathrm{d}\lambda_F(x) + R_1(n,T,B) + R_2(n,T,B). \tag{2.6}$$

Le reste $R_1(n,T,B)$ correspond à des termes de bord oubliés dans la somme : les $t \in T \cap F$ tels que $\lambda_F(P_t \cap E_n) > 0$, mais E_n ne contient pas t. Plus précisément,

$$R_1(n,T,B) = \frac{1}{D_n} \sum_{t \in T \cap F \setminus E_n} \Delta(t,x_0) \int\limits_{P_t \cap E_n} \Delta(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_F(x).$$

Le reste $R_2(n,T,B)$ correspond lui aux $t \in T \cap E_n$ tels que $0 < \lambda_F(P_t \cap E_n) < \lambda_F(P_t)$:

$$R_2(n,T,B) = \frac{1}{D_n} \sum_{t \in T \cap E_n} \Delta(t,x_0) \int\limits_{P_t} (\mathbf{1}_{E_n} - 1)\Delta(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_F(x).$$

Commençons par montrer que ces deux restes tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. La continuité de Δ implique que $\sup_{t \in T} \sup_{x \in P_t} \Delta(x,t)$ est fini. De plus, λ vérifie (1.1). On a donc :

$$\left|R_1(n,T,B)\right| \leqslant \mathrm{cte}(B)\frac{1}{D_n} \sum_{\substack{t \in T \cap F \setminus E_n \\ P_t \cap E_n \neq \emptyset}} \Delta(t,x_0) \quad \text{et} \quad \left|R_2(n,T,B)\right| \leqslant \mathrm{cte}(B)\frac{1}{D_n} \sum_{\substack{t \in T \cap E_n \\ P_t \cap E_n \neq P_t}} \Delta(t,x_0).$$

Notons d'abord que si $t \in T$ apparaît dans l'une des deux sommes ci-dessus, il n'apparaît pas dans l'autre. Le bord de B s'écrit : $\partial B = \partial T \times P \cup \overline{T} \times \partial P$. Recouvrons $\overline{T} \times \partial P$ par un nombre fini de boîtes B_i. Pour chacune d'elle, notons S_i une transversale contenant $(\overline{T} \times \partial P) \cap B_i$. Ainsi, il existe une holonomie $\zeta_i : T_i \subset S_i \to T_i' \subset T$, avec $T_i \subset \overline{T} \times \partial P$. Comme les B_i recouvrent $\overline{T} \times \partial P$, les T_i' recouvrent T. Si $t \in T$ apparaît dans $R_1(n,T,B)$, alors E_n intersecte la plaque P_t sans contenir t. Par connexité de E_n, E_n intersecte donc le bord de P_t. Il existe donc un indice i tel que $t \in \zeta_i(T_i \cap E_n) \setminus (T_i' \cap E_n)$. Inversement, si $t \in T \cap E_n$ apparaît dans $R_2(n,T,B)$, alors E_n^c intersecte P_t. Vue la condition de régularité (2.4) satisfaite par E_n, il existe i tel que $t \in T_i' \cap E_n \setminus \zeta_i(T_i \cap E_n)$. Finalement, par définition des $\nu_{T_i}^n$, on obtient :

$$\left|R_1(n,T,B) + R_2(n,T,B)\right| \leqslant \mathrm{cte}(B) \sum_i \nu_{T_i'}^n\big(T_i' \cap E_n \Delta \zeta_i(T_i \cap E_n)\big).$$

L'hypothèse (2.5) assure donc que ces restes tendent vers 0 quand $n \to \infty$, d'où d'après (2.6), $\nu_T^n \circ \lambda_{|B}$ converge faiblement vers $m_{|B}$. On en déduit, en utilisant (1.1), la continuité de Δ et le fait que $m(B) > 0$, que ν_T^n converge faiblement sur T vers une mesure finie non nulle ν_T. Comme λ est un système de Haar, et Δ est continu, cette convergence implique que $\nu_T^n \circ \lambda$ converge vers $\nu_T \circ \lambda_{|B}$.

Finalement, pour toute boîte B de (1.1), et toute transversale $T \subset B$, on a défini une mesure finie ν_T telle que $m_{|B} = \nu_T \circ \lambda_{|B}$. L'hypothèse (2.5) assure que le support de ν est invariant par holonomie. Et par construction des ν_T^n, ν est alors nécessairement quasi-invariante pour le cocycle Δ, d'où le résultat. $\square$

Remerciements

Je remercie V. Kaimanovich dont les questions ont motivé cette Note, et J. Renault pour de très utiles discussions.

Références

[1] A. Candel, L. Conlon, Foliations I, in: Grad. Stud. Math., Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
[2] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration, in: Algèbres d'Opérateurs, Séminaire, Les Plans-sur-Bex, Suisse, in: Lecture Notes in Math., Vol. 725, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
[3] S.E. Goodman, J.F. Plante, Holonomy and averaging in foliated sets, J. Differential Geom. 14 (3) (1979) 401–407.
[4] J.F. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 102 (1975) 327–361.