Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 213–218

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Factorialité de l'anneau des séries de Dirichlet analytiques

The ring of analytic Dirichlet series is factorial

Frédéric Bayart, Augustin Mouze

Université des sciences et technologies de Lille, Laboratoire de mathématiques, UMR 8524, bâtimemt M2, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 6 janvier 2003 ; accepté le 14 janvier 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

On étudie des propriétés arithmétiques de l'anneau des séries de Dirichlet analytiques. En particulier, on prouve sa factorialité, en obtenant un résultat de division par plusieurs séries. ***Pour citer cet article : F. Bayart, A. Mouze, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We study arithmetical properties of the ring of analytic Dirichlet series. In particular, we prove a theorem of division by several series and we deduce from it that the ring is factorial. ***To cite this article: F. Bayart, A. Mouze, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

It is well known that the set of formal Dirichlet series

$$\mathcal{D}[[s]] = \left\{ \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s};\ \forall\, n \geqslant 1,\ a_n \in \mathbb{C} \text{ and } s \in \mathbb{C} \right\}$$

with the product

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}\right)\left(\sum_{n\geqslant 1} b_n n^{-s}\right) = \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{ij=n} a_i b_j\right) n^{-s}$$

is a local and factorial ring [2,3]. Our aim in this Note is to study the set of analytic Dirichlet series, i.e., convergent series $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ for some complex s. Recall that if we set

Adresses e-mail : bayart@agat.univ-lille1.fr (F. Bayart), mouze@agat.univ-lille1.fr (A. Mouze).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00037-2

$$\sigma_c(f) = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R};\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma} \text{ converges}\right\},$$

the Dirichlet series is convergent for $\Re(s) > \sigma_c(f)$ and divergent for $\Re(s) < \sigma_c(f)$. We denote by $\mathcal{D}\{s\}$ the set of analytic Dirichlet series

$$\mathcal{D}\{s\} = \left\{f \in \mathcal{D}[[s]];\ \sigma_c(f) < +\infty\right\}.$$

By Landau's theorem [4], we have the classical inequality $\sigma_c(fg) \leqslant \frac{1}{2}(\sigma_c(f) + \sigma_c(g) + 1)$. Therefore, the set $\mathcal{D}\{s\}$ is a ring. Moreover it is not difficult to prove that it is a non-Noetherian local ring. Its maximal ideal is the set of noninvertible analytic Dirichlet series, i.e., the set of analytic series $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ satisfying $a_1 = 0$.

Definition 0.1. For a formal Dirichlet series $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$, we call *support of* f the set

$$\operatorname{supp}(f) = \{n \geqslant 1;\ a_n \neq 0\}.$$

We prove a Hironaka type division theorem by several Dirichlet series in $\mathcal{D}\{s\}$ (we refer to Theorem 2.1 of the French version). As a corollary, we have the following version of the Weierstrass preparation theorem.

Theorem 0.2. *Let f be in $\mathcal{D}\{s\}$. Suppose that there exists a prime integer p and a minimal nonzero integer α such that p^α is in* supp f. *Then we have the following decomposition*

$$f(s) = U(s)P(s),$$

where U is a unit in $\mathcal{D}\{s\}$ and P is a distinguished polynomial of degree α in $\mathcal{D}\{s\}$, i.e.,

$$P(s) = \left(\frac{1}{p^s}\right)^\alpha + \sum_{j=1}^{k} \frac{r_j(s)}{(p^s)^{\alpha-j}},$$

where, for $j = 1, \ldots, \alpha$,

- $r_j \in \mathcal{D}\{s\}$,
- *if $n \in \operatorname{supp}(r_j)$, p is relatively prime with n,*
- *r_j is noninvertible.*

As a consequence, we obtain that the ring $\mathcal{D}\{s\}$ is integrally closed. As in [6], using several times Theorem 0.2, we finally get the following result.

Theorem 0.3. *The ring $\mathcal{D}\{s\}$ is a unique factorization domain.*

Moreover, we prove that $\mathcal{D}\{s\}$ is a Henselian ring.

1. Introduction

Une série de Dirichlet (formelle) est une série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite complexe et s un nombre complexe. Le produit (formel) de deux séries de Dirichlet est défini par :

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}\right)\left(\sum_{n\geqslant 1} b_n n^{-s}\right) = \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{ij=n} a_i b_j\right) n^{-s}.$$

En particulier, l'ensemble des séries de Dirichlet formelles $\mathcal{D}[[s]]$ est muni d'une structure d'anneau. Les propriétés arithmétiques de cet anneau ont déjà été bien étudiées : on sait ainsi qu'il est local (voir [3, p. 110]) et factoriel [2].

On s'intéresse ici à l'anneau des séries de Dirichlet analytiques $\mathcal{D}\{s\}$, c'est-à-dire celles pour lesquelles il existe un nombre complexe s tel que $f(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n n^{-s}$ converge. On rappelle qu'à une série de Dirichlet $f(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n n^{-s}$ est associée une abscisse de convergence définie par :

$$\sigma_c(f)=\inf\left\{\sigma\in\mathbb{R};\ \sum_{n=1}^{+\infty}a_n n^{-\sigma}\ \text{converge}\right\}.$$

La série de Dirichlet converge alors pour $\Re(s)>\sigma_c(f)$ et diverge pour $\Re(s)<\sigma_c(f)$. Ainsi on a

$$\mathcal{D}\{s\}=\left\{f\in\mathcal{D}[[s]];\ \sigma_c(f)<+\infty\right\}.$$

D'après un résultat de Landau [4], on a $\sigma_c(fg)\leqslant\frac{1}{2}(\sigma_c(f)+\sigma_c(g)+1)$. On en déduit donc que l'ensemble $\mathcal{D}\{s\}$, muni du produit de Dirichlet, est un anneau.

Le but de cet article est d'obtenir des propriétés arithmétiques de cet anneau, en particulier sa factorialité. Les méthodes utilisées dans [2] ne s'appliquent pas du tout ici, car elles restent purement formelles. Le point de départ de l'étude est la remarque suivante, qui donne les premières propriétés, faciles à vérifier, de l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$.

Remarque 1.1. Une série $f=\sum_{n\geqslant 1}a_n n^{-s}$ de $\mathcal{D}\{s\}$ est inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$ si et seulement si on a $a_1\neq 0$. En particulier, $\mathcal{D}\{s\}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$, l'ensemble de ses éléments non inversibles. De plus, l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ n'est pas noethérien.

On termine cette introduction par une définition.

Définition 1.2. Si $f(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n n^{-s}$ appartient à $\mathcal{D}[[s]]$, on appelle *support de* f l'ensemble

$$\operatorname{supp}(f)=\{n\geqslant 1;\ a_n\neq 0\}.$$

2. Division

On se propose, dans un premier temps, d'établir un théorème de division par plusieurs séries dans $\mathcal{D}\{s\}$. On note $\mathbb{N}^{(\infty)}$ l'ensemble des suites d'entiers à support fini et $(p_j)_{j\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers. On définit une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}^{(\infty)}$ en posant

$$\phi\left(p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}\right)=(\alpha_1,\dots,\alpha_r,0,\dots).$$

Dans la suite, on désigne par L une forme linéaire positive non nulle de $\mathbb{N}^{(\infty)}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$L(j_1,\dots,j_r,0,\dots)=\sum_{i=1}^{r}l_i j_i,$$

où les coefficients l_i sont des nombres réels positifs. Par la bijection ϕ, L définit aussi un ordre sur les entiers, avec, pour a et b deux entiers non nuls,

$$a\leqslant_L b\quad\text{si et seulement si}\quad L\circ\phi(a)\leqslant L\circ\phi(b).$$

Cet ordre est l'ordre naturel si on choisit $l_k=\log p_k$. En outre, cet ordre est compatible avec les valuations p-adiques :

$$\text{si } \alpha_1\leqslant\beta_1,\dots,\alpha_r\leqslant\beta_r,\quad\text{alors } p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}\leqslant_L p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r}.$$

On a alors un théorème de division « à la Hironaka ».

Théorème 2.1. *Soient $f_1, \ldots, f_m$ des éléments non nuls de $\mathcal{D}\{s\}$. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on choisit q_i minimum dans le support de f_i pour l'ordre défini par L. On pose*

$$\Delta_1 = \{n \in \mathbb{N}^*;\ q_1|n\},$$

et, pour tout $i = 2, \ldots, m$,

$$\Delta_i = \{n \in \mathbb{N}^*;\ q_i|n\} - (\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_{i-1}).$$

Alors, pour tout f de $\mathcal{D}\{s\}$, il existe un unique $(m+1)$-uplet $(g_1, \ldots, g_m, r)$ d'éléments de $\mathcal{D}\{s\}$ vérifiant

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i + r, \tag{1}$$

$$\operatorname{supp}\left(\frac{1}{q_i^s} g_i\right) \subset \Delta_i, \tag{2}$$

$$\operatorname{supp}(r) \subset \mathbb{N}^* - (\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m). \tag{3}$$

La preuve de ce théorème est une adaptation de celle donnée par Briançon [1] d'un théorème de division analytique par perturbation d'un épimorphisme. On pourra consulter [5] pour des démonstrations analogues.

Du Théorème 2.1, on tire facilement le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Soient $f, h \in \mathcal{D}\{s\}$ et $u \in \mathcal{D}[[s]]$ telles que l'on ait $f = uh$. Alors u est aussi un élément de $\mathcal{D}\{s\}$.*

Démonstration. On pose

$$q = \min\bigl\{n \in \mathbb{N}^*;\ n \in \operatorname{supp}(h)\bigr\}.$$

Clairement, on peut trouver L telle que q soit minimum dans le support de h pour l'ordre défini par L. La division de f par h dans $\mathcal{D}\{s\}$ donne alors

$$f = gh + r, \quad \text{avec } g,\ r \text{ dans } \mathcal{D}\{s\} \text{ et } \operatorname{supp} r \subset \mathbb{N}^* - \{n \in \mathbb{N}^*;\ q|n\}.$$

On a donc, dans $\mathcal{D}[[s]]$, $r = h(u - g)$. Si on a $u \neq g$, on écrit $u - g$ sous la forme

$$u - g = \frac{a_m}{m^s} + \sum_{n>m} a_n n^{-s}, \quad a_m \neq 0.$$

On a alors $mq \in \operatorname{supp}(h(u - g))$, ce qui contredit $\operatorname{supp} r \subset \mathbb{N}^* - \{n \in \mathbb{N}^*;\ q|n\}$. □

On déduit aussi du Théorème 2.1 un théorème de préparation « à la Weierstrass » dans $\mathcal{D}\{s\}$.

Définition 2.3. Soit p un nombre premier. On dit que $P \in \mathcal{D}\{s\}$ est un *polynôme distingué* en p de degré α si P s'écrit

$$P(s) = \left(\frac{1}{p^s}\right)^{\alpha} + \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{r_j(s)}{(p^s)^{\alpha-j}},$$

avec, pour tout $j = 1, \ldots, \alpha$,

- $r_j \in \mathcal{D}\{s\}$,
- si $n \in \operatorname{supp}(r_j)$, p est premier avec n,
- r_j est non inversible.

Corollaire 2.4. *Soient $f \in \mathcal{D}\{s\}$ et p un nombre premier tel que $p^\alpha \in \operatorname{supp} f$, où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ est le plus petit possible. Alors on a la décomposition*

$$f(s) = U(s)P(s),$$

avec U et P des éléments de $\mathcal{D}\{s\}$ vérifiant

- *U est inversible,*
- *P est un polynôme distingué en p de degré α.*

Démonstration. On fixe un ordre L tel que p^α soit minimum dans le support de f pour cet ordre. Puis on fait la division de $1/(p^s)^\alpha$ par f. Il suffit ensuite de regrouper judicieusement les termes. □

3. Propriétés arithmétiques

Il est bien connu qu'un anneau factoriel est intégralement clos. Ici, comme dans [6], bien que le contexte soit différent, on démontre d'abord que l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est intégralement clos. On en déduit ensuite sa factorialité.

Proposition 3.1. *L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est intégralement clos.*

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du Corollaire 2.2 et de la factorialité de $\mathcal{D}[[s]]$. □

Théorème 3.2. *L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est factoriel.*

Démonstration. L'existence d'une décomposition d'un élément f de $\mathcal{D}\{s\}$ en produit d'éléments irréductibles est facile à obtenir. Il reste à prouver l'unicité. On commence par montrer que tout polynôme distingué de $\mathcal{D}\{s\}$ se décompose de manière unique comme produit de polynômes distingués irréductibles dans $\mathcal{D}\{s\}$. Pour cela, on utilise fortement le fait que $\mathcal{D}\{s\}$ est intégralement clos. On prouve ensuite, à l'aide du Corollaire 2.4, que, si une série f admet dans son support une puissance non nulle d'un nombre premier et possède deux décompositions non équivalentes en produit d'irréductibles, alors il existe un polynôme distingué de $\mathcal{D}\{s\}$ qui admet deux décompositions non équivalentes en produit de polynômes distingués irréductibles. La remarque ci-dessus entraîne l'unicité d'une décomposition pour une série de $\mathcal{D}\{s\}$ qui admet une puissance non nulle d'un nombre premier dans son support. Le cas général se ramène au précédent, par un isomorphisme d'anneaux bien construit. □

L'utilisation de la division permet d'obtenir une autre propriété arithmétique de l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$.

Théorème 3.3. *Soit P un polynôme de $\mathcal{D}\{s\}[X]$. On note $\overline{P}$ sa classe dans $(\mathcal{D}\{s\}/\mathcal{M})[X]$. On suppose que $\overline{P}$ se factorise de la manière suivante*

$$\overline{P}(X) = (X - c_1)^{b_1} \cdots (X - c_r)^{b_r},$$

avec $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$. Alors, on peut écrire P sous la forme

$$P(X) = \omega_1(X) \cdots \omega_r(X),$$

avec, pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$\omega_i \in \mathcal{D}\{s\}[X] \quad \text{et} \quad \overline{\omega_i}(X) = (X - c_i)^{b_i}.$$

L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est donc hensélien.

Références

[1] J. Briançon, Weierstrass préparé à la Hironaka, Astérisque 7,8 (1973).
[2] E.D. Cashwell, C.J. Everett, The ring of number-theoretic functions, Pacific J. Math. 9 (1959) 975–985.
[3] W.J. Ellison, M. Mendès-France, Les nombres premiers, Hermann, 1975.
[4] S.V. Konyagin, H. Queffélec, The translation $1/2$ in the theory of Dirichlet series, Real Anal. Exchange 27 (2002) 155–176.
[5] A. Mouze, Division dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée. Applications, Studia Math. 144 (2001) 63–93.
[6] J.P. Ramis, Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés, C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966) A902–A904.