Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 237–240
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Harmonic Analysis/Mathematical Analysis

On the Lévy–Raikov–Marcinkiewicz theorem

Sur le théorème de Lévy–Raikov–Marcinkiewicz

Iossif Ostrovskii [a,b], Alexander Ulanovskii [c]

[a] *Department of Mathematics, Bilkent University, 06533 Bilkent, Ankara, Turkey*
[b] *Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, 61103 Kharkov, Ukraine*
[c] *Stavanger University College, PO Box 2557, Ullandhaug, 4091 Stavanger, Norway*

Received 6 January 2003; accepted 14 January 2003

Presented by Jean-Pierre Kahane

Abstract

Let μ be a finite nonnegative Borel measure. The classical Lévy–Raikov–Marcinkiewicz theorem states that if its Fourier transform $\hat{\mu}$ can be analytically continued to some complex half-neighborhood of the origin containing an interval $(0, \mathrm{i}R)$ then $\hat{\mu}$ admits analytic continuation into the strip $\{t\colon\ 0 < \Im t < R\}$. We extend this result to general classes of measures and distributions, assuming non-negativity only on some ray and allowing temperate growth on the whole line. ***To cite this article: I. Ostrovskii, A. Ulanovskii, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Résumé

Soit une mesure de Borel μ, finie et non-négative. Le théorème classique de Lévy–Raikov–Marcinkiewicz affirme que la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ a une continuation analytique dans la bande $\{t\colon\ 0 < \Im t < R\}$ si elle a une continuation analytique dans quelque demi-voisinage complexe de l'origine contenant un intervalle $(0, \mathrm{i}R)$. Nous prolongeons ce résultat à des classes générales de mesures et de distributions en supposant la non-négativité sur un rayon et une croissance tempérée sur toute la ligne. ***Pour citer cet article : I. Ostrovskii, A. Ulanovskii, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Version française abrégée

Le principe suivant est classique en Analyse Harmonique : *Supposons que μ soit une mesure de Borel finie et positive. Sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est lisse sur toute la ligne réelle si elle est lisse à l'origine.*

Le but de cet article est d'obtenir quelques resultats généraux de cette nature.

E-mail addresses: iossif@fen.bilkent.edu.tr, ostrovskii@ilt.kharkov.ua (I. Ostrovskii), Alexander.Ulanovskii@tn.his.no (A. Ulanovskii).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00035-9

Le résultat suivant dû à Lévy et Raikov ([2], Théorème 2.2.1) est une manifestation du principe pour l'analyticité réelle : *La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ d'une mesure de Borel μ, non negative et finie, est analytique sur toute la ligne réelle* (*et a en fait une continuation analytique sur une bande de la forme* $\{t\colon |\Im t| < R\}$) *si elle est analytique dans un voisinage réel de l'origine.*

Comme une généralisation de l'analyticité réelle sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ on peut considérer la propriété d'une fonction définie sur I d'être la valeur frontière d'une fonction analytique dans un demi-voisinage supérieur complexe de I. Marcinkiewicz a montré que le principe est toujours valable avec cette analyticité généralisée. Nous énonçons ce résultat dans la forme suivante ([2], Théorème 2.2.3).

Théorème de Lévy–Raikov–Marcinkiewicz. *Soit une mesure de Borel non-négative et finie μ. Supposons que sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ coïncide dans un voisinage réel $(-a, a)$ de l'origine, avec une fonction analytique dans un rectangle $\{t\colon |\Re t| < a,\ 0 < \Im t < R\}$ et continue dans sa fermeture. Il en découle que $\hat{\mu}$ a une continuation analytique dans la bande $\{t\colon 0 < \Im t < R\}$ et y est représentable par l'intégrale absolument convergente* (1).

Nous montrons que l'assertion du théorème de Lévy–Raikov–Marcinkiewicz demeure si l'on suppose que μ soit non-négative sur une demi-ligne seulement et si l'on permet une croissance tempérée sur cette demi-ligne. Les transformées de Fourier de ces mesures sont comprises dans le sens des distributions.

Théorème 0.1. *Soit $b \in \mathbf{R}$, et μ une mesure de Borel finie sur $(-\infty, b]$, positive sur $[b, \infty)$, non-négative sur (b, ∞) et telle que $\mu(b, x) \leqslant Cx^N$ pour tout x suffisamment grand, pour quelques $C, N > 0$. Supposons que la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ coïncide dans un voisinage réel $(-a, a)$ de l'origine, avec une fonction analytique dans un rectangle $\{t\colon |\Re t| < a,\ 0 < \Im t < R\}$ et continue dans sa fermeture. Il en découle que $\hat{\mu}$ a une continuation analytique dans la bande $\{t\colon 0 < \Im t < R\}$ et y est représentable par l'integrale absolument convergente* (1).

En changeant les rôles de μ et $\hat{\mu}$ dans le Théorème 0.1 et en utilisant quelques résultats tirés de la théorie des espaces de Hardy (en particulier, le théorème des frères Riesz), nous obtenons le résultat suivant sur la condition à imposer à μ pour que la continuité absolue de μ dans un voisinage de l'origine implique sa continuité absolue sur toute la ligne réelle.

Théorème 0.2. *Soit μ une mesure de Borel finie dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est non-négative sur une demi-ligne $(b, +\infty)$. Supposons que μ soit absolument continue sur $(-a, a)$ et que sa densité coïncide sur $(-a, a)$ avec une fonction analytique dans un rectangle $\{t\colon |\Re t| < a,\ -R < \Im t < 0\}$ et continue dans sa fermeture. Il en découle que μ est absolument continue sur $\mathbf{R}$ et que sa densité est la valeur frontière angulaire sur $\mathbf{R}$ d'une fonction analytique bornée dans toute bande $\{t\colon -R < -R_2 \leqslant \Im t \leqslant -R_1 < 0\}$, $0 < R_1 < R_2 < R$, et appartenant à la classe H_1 de Hardy dans tout rectangle $\{t\colon |\Re t| < A,\ -R < \Im t < 0\}$, $A > 0$.*

Nous donnons aussi des variantes des Théorèmes 0.1 et 0.2 pour des distributions tempérées et pour des fonctions L_2.

Il se trouve qu'il y a une connection étroite entre le Théorème 0.1 et des résultats sur la fréquence et l'amplitude des oscillations de distributions ayant une lacune spectrale á l'origine. Nos résultats seront présentés dans [3].

1. Introduction and main result

Let μ be a finite complex-valued Borel measure on the real line, and denote by $\hat{\mu}$ its Fourier transform

$$\hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{1}$$

The following principle is classical in Harmonic Analysis: *Suppose* μ *is a positive finite Borel measure. If its Fourier transform* $\hat{\mu}$ *is 'smooth' at the origin then it is 'smooth' on the whole real line.*

In this paper we shall obtain some general results of this kind.

The following result due to Lévy and Raikov (see, e.g. [2], Theorem 2.2.1) is a manifestation of this principle for real analyticity: *If* μ *is non-negative and* $\hat{\mu}$ *is real analytic in a neighborhood of the origin, then* $\hat{\mu}$ *is real analytic on the whole real line* (*and in fact* $\hat{\mu}$ *admits analytic continuation to a strip of form* $\{t\colon |\Im t| < R\}$).

As a generalization of the real analyticity of $\hat{\mu}$ in a neighborhood of the origin, one can consider the following property:

(α) $\hat{\mu}$ agrees on $(-a, a)$ with a function analytic in a rectangle $\{t\colon |\Re t| < a,\ 0 < \Im t < R\}$ and continuous in its closure.

Marcinkiewicz showed that the principle also works with this generalized analyticity: the assumption (α) implies:

(β) $\hat{\mu}$ is the boundary value on $(-\infty, \infty)$ of a function analytic in the strip $\{t\colon 0 < \Im t < R\}$ and continuous in its closure.

We state this result in the following form (see [2], Theorem 2.2.3):

Lévy–Raikov–Marcinkiewicz Theorem. *Let* μ *be a nonnegative finite Borel measure on* **R**. *If its Fourier transform* $\hat{\mu}$ *satisfies* (α) *then* $\hat{\mu}$ *satisfies* (β). *Moreover,* $\hat{\mu}$ *is representable in* $\{t\colon 0 \leqslant \Im t \leqslant R\}$ *by formula* (1) *with absolutely convergent integral, that is*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{r|x|}\, \mathrm{d}|\mu|(x) < \infty$$

for each $0 \leqslant r \leqslant R$.

We show that the assertion of the Lévy–Raikov–Marcinkiewicz theorem remains in force if one replaces the non-negativity of μ on the whole real line by its non-negativity on any fixed half-line $(b, +\infty)$. One can also allow a temperate growth of μ on this half-line:

$$\mu(b, x) \leqslant C|x|^N, \quad x > b, \tag{2}$$

where C and N are some positive constants. Observe that the Fourier transform of measures μ satisfying (2) exists in the sense of distributions.

Theorem 1.1. *Assume* μ *is a Borel measure non-negative on some half-line* (b, ∞), *satisfies* (2), *and is finite on* $(-\infty, b]$. *If its Fourier transform* $\hat{\mu}$ *satisfies* (α), *then* $\hat{\mu}$ *satisfies* (β). *Moreover,* $\hat{\mu}$ *is representable in* $\{t\colon 0 < \Im t < R\}$ *by formula* (1) *with absolutely convergent integral.*

Let μ be a real finite Borel measure. Suppose that its Fourier transform $\hat{\mu}$ is 'smooth' on $(-a, a)$ in the sense that $\hat{\mu}$ satisfies (α), and suppose that $\hat{\mu}$ is 'not smooth' on $(-\infty, \infty)$ in the sense that (β) does not hold. Then by Theorem 1.1, μ must have infinite number of sign changes as $t \to +\infty$. This shows that there is an intimate connection between Theorem 1.1 and results on the frequency of the sign changes of real measures whose Fourier transform has an 'extra smoothness' at the origin. Our results in this direction will be presented in [3].

Let us now change the roles of μ and $\hat{\mu}$ in Theorem 1.1. Using some results from the Hardy space theory (in particular, brothers Riesz' theorem) we obtain the following result which gives a condition on the Fourier transform of μ under which absolute continuity of μ in a neighborhood of the origin implies its absolute continuity on the whole real line.

Theorem 1.2. *Let ν be a finite Borel measure on* $\mathbf{R}$ *whose Fourier transform $\hat{\nu}$ is nonnegative on some half-line $(b,+\infty)$. Assume that ν is absolutely continuous on $(-a,a)$ and its density admits analytic continuation in the sense (α). Then ν is absolutely continuous on* $\mathbf{R}$ *and its density is the angular boundary value on* $\mathbf{R}$ *of a function analytic and bounded in any strip $\{t\colon -R<-R_2\leqslant \Im t\leqslant -R_1<0\}$, $0<R_1<R_2<R$, and belonging to the Hardy class H_1 in any rectangle $\{t\colon |\Re t|<A,\ -R<\Im t<0\}$, $A>0$.*

By the Hardy class H_1 in the rectangle $\{t\colon |\Re t|<A,\ -R<\Im t<0\}$ we mean the class of all functions analytic there and whose L_1 norms on the intervals $-A<\Re t<A$, $\Im z=c$ $(-R<c<0)$ are uniformly bounded.

Below we give extensions of Theorems 1.1 and 1.2 to temperate distributions and L_2-functions.

2. Extensions and reformulations

We shall now formulate a generalization of this Theorem 1.1 to temperate distributions. We refer the reader to Hörmander's book [1] for the definition of temperate distributions and their basic properties.

Theorem 2.1. *Let f be a temperate distribution nonnegative on some half-line (b,∞). Assume that its Fourier transform $\hat{f}$ satisfies (α). Then $\hat{f}$ is the boundary value in $\mathcal{S}'$-topology of a function which is analytic in the strip $\{t\colon 0<\Im t<R\}$ and $\mathrm{O}(|t|^N)$ for some $N>0$ as $t\to\infty$ in any strip $\{t\colon 0<R_1\leqslant \Im t\leqslant R_2<R\}$, $0<R_1<R_2<R$.*

The assertions of Theorems 2.1 can be strengthened if the temperate distribution f is assumed to be an L_2-function. We say that a function f belongs to the Hardy class H_2 in a strip $\{t\colon p<\Im t<q\}$ if it is analytic there and the supremum of its L_2 norms on the lines $\Im z=c$, $p<c<q$, is finite.

Theorem 2.2. *Let a function $f\in L_2(\mathbf{R})$ be nonnegative on some half-line (b,∞). Assume that its Fourier transform $\hat{f}$ satisfies (α). Then $\hat{f}$ is the angular boundary value on* $\mathbf{R}$ *of a function analytic in the strip $\{t\colon 0<\Im t<R\}$ and representable there as the sum F_1+F_2 where F_1 belongs to the Hardy class H_2 in any strip $\{t\colon 0<\Im t<r\}$, $r>0$, and F_2 is analytic in strip $\{t\colon 0<\Im t<R\}$, continuous in its closure and tends to 0 as $t\to\infty$.*

One may ask if the function $\hat{f}$ in Theorem 2.2 belongs to H_2 in $\{t\colon 0<\Im t<R\}$. Examples show that it is not always true. Moreover, $\hat{f}$ may not belong to H_2 in any smaller strip.

Observe also that Theorem 1.1 can be reformulated in the following way. Changing roles of f and $\hat{f}$ and using the well-known identity $\hat{\hat{f}}=2\pi\check{f}$, one gets the following extension of Theorem 1.2:

Theorem 2.3. *Let f be a temperate distribution whose Fourier transform $\hat{f}$ is nonnegative on some half-line $(b,+\infty)$. Assume that f admits analytic continuation from $(-a,a)$ in the sense (α). Then f is the boundary value on* $\mathbf{R}$ *in $\mathcal{S}'$-topology of a function which is analytic in the strip $\{t\colon -R<\Im t<0\}$ and $\mathrm{O}(|t|^N)$ for some $N>0$ as $t\to\infty$ in any strip $\{t\colon -R<-R_2\leqslant\Im t\leqslant -R_1<0\}$, $0<R_1<R_2<R$.*

Acknowledgements

The authors are thankful to Professor M. Sodin for his valuable discussion and comments. The research was done during a visit of the second named author to Bilkent University at Ankara. This visit was supported by the Scientific and Technical Research Council of Turkey (TÜBITAK).

References

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
[2] Ju.V. Linnik, I.V. Ostrovskii, Decomposition of Random Variables and Vectors, American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.
[3] I.V. Ostrovskii, A. Ulanovskii, On sign changes of distributions having spectral gap at the origin, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 336 (2003), to be published.