



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 283–288



Problèmes mathématiques de la mécanique/Équations aux dérivées partielles  
Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations  
de Navier–Stokes compressibles

A new relaxation method for the compressible  
Navier–Stokes equations

Emmanuel Bongiovanni <sup>a</sup>, Alexandre Ern <sup>b</sup>, Nathalie Glinsky-Olivier <sup>a</sup>

<sup>a</sup> CERMICS, INRIA, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France

<sup>b</sup> CERMICS, École nationale des ponts et chaussées, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

Reçu le 29 octobre 2002 ; accepté après révision le 9 janvier 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

---

**Résumé**

On considère les équations de Navier–Stokes compressibles pour des gaz régis par des lois générales de pression et de température, celles-ci étant compatibles avec l'existence d'une entropie et les relations de Gibbs. On étend la méthode de relaxation introduite pour les équations d'Euler par Coquel et Perthame. En conservant les mêmes conditions « sous-caractéristiques » pour les flux hyperboliques et grâce à une décomposition consistante des flux diffusifs basée sur une température globale, on montre la stabilité du système relaxé via le signe de la production d'une certaine entropie. Une analyse asymptotique au premier ordre autour des états d'équilibre confirme le résultat de stabilité. On présente enfin une implémentation numérique de la méthode. *Pour citer cet article : E. Bongiovanni et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

**Abstract**

We consider the compressible Navier–Stokes equations for gas flows endowed with general pressure and temperature laws as long as they are compatible with the existence of an entropy and Gibbs relations. We extend the relaxation method introduced for the Euler equations by Coquel and Perthame. Keeping the same “sub-characteristic” conditions for the hyperbolic fluxes and using a consistent splitting of the diffusive fluxes based on a global temperature, we prove the stability of the relaxation system via the sign of the production of a suitable entropy. A first order asymptotic analysis around equilibrium states confirms the stability result. Finally, we present a numerical implementation of the method. *To cite this article : E. Bongiovanni et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

---

Adresses e-mail : [Emmanuel.Bongiovanni@sophia.inria.fr](mailto:Emmanuel.Bongiovanni@sophia.inria.fr) (E. Bongiovanni), [ern@cermics.enpc.fr](mailto:ern@cermics.enpc.fr) (A. Ern), [Nathalie.Glinsky@sophia.inria.fr](mailto:Nathalie.Glinsky@sophia.inria.fr) (N. Glinsky-Olivier).

1631-073X/03/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/S1631-073X(03)00029-3

### Abridged English version

The compressible Navier–Stokes equations (1) express the conservation of mass, momentum and energy. In order to close the system, one must provide expressions for the pressure  $p$  and the temperature  $T$  in terms of the conservative variables. Let  $\tau$  be the specific volume and  $\varepsilon$  the specific internal energy. We make the fundamental assumption that there exists a function  $\sigma := \sigma(\tau, \varepsilon)$ , called the specific (mathematical) entropy, defined for  $(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$ , strictly convex in  $(\tau, \varepsilon)$  and such that  $\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$ , its partial derivatives satisfy  $\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma < 0$  and  $\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma < 0$ . The pressure and the temperature are then recovered from Gibbs relations  $\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma = -\frac{1}{T}$  and  $\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma = -\frac{p}{T}$ . A simple thermodynamic model is that of the thermally perfect gas (TP) in which the pressure is bilinear in the density and the temperature and the temperature only depends on  $\varepsilon$ . When this dependency is linear, the model corresponds to a thermally perfect and calorifically perfect gas (TPCP, also referred to as ideal polytropic gas). However, many applications require a more elaborate model. For instance, when rotational and vibrational states of the molecules are excited, the temperature is a nonlinear function of  $\varepsilon$ . Another example arises in high pressure flows where the pressure may no longer be a linear function of the density.

An attractive approach to account for general pressure and temperature laws is to consider a relaxation method. Relaxation methods for hyperbolic systems have been investigated in [2,4,5]. For the Euler equations (recovered from (1) for  $\pi = 0$  and  $q = 0$ ), a relaxation method has been investigated in [3]. Given a simpler pressure law  $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ , the relaxed Euler equations (5) consist of the Euler equations for the fictitious gas (up to a relaxation term in the energy equation) coupled to a transport equation for the nonlinear perturbation to the specific internal energy. Under some assumptions (that shall be kept in this work), Coquel and Perthame proved consistency and stability properties for (5). Our goal is to extend the relaxation method to the compressible Navier–Stokes equations. The main difficulty is that because of the presence of the diffusive fluxes, it is also necessary to account for the nonlinearities in the temperature law.

Given a fictitious gas associated with an entropy  $\sigma_1 := \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$  yielding via Gibbs relations the simpler pressure and temperature laws  $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$  and  $T_1 := T_1(\tau, \varepsilon_1)$ , we consider the new relaxation system (3). As for the Euler equations, assuming that for any  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , the pressure of the real gas may be inverted in the internal energy over  $\mathbb{R}_+$ , there exists a function  $F := F(\tau, \varepsilon_1)$  satisfying the consistency condition (2). We then introduce three additional functions  $\alpha := \alpha(\tau, \varepsilon_1)$ ,  $\beta := \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  and  $\Theta := \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . The functions  $\alpha$  and  $\beta$  are weighting coefficients which split the diffusive flux contribution to energy balance between the real and the fictitious gas, whereas the function  $\Theta$  may be viewed as a global weighted temperature for the relaxation system. Our first result is Proposition 2.1 which gives sufficient conditions on  $\beta$  and  $\Theta$  to ensure consistency with the original Navier–Stokes system at equilibrium ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). We point out that at equilibrium the pressures of the real and the fictitious gas coincide but their temperatures may not do so, unless the real gas is TP and the fictitious gas is TCP.

Our main result is Theorem 2.2 which investigates the stability of the relaxation system (3) via the sign of the source term in the conservation equation for the volumetric entropy  $S$  defined by (7). The function  $F$  is assumed to satisfy the subcharacteristic conditions (6) already derived in [3] for the Euler equations. Furthermore, the function  $\alpha$  may take any values in  $[0, 1]$  while the functions  $\beta$  and  $\Theta$  are specifically given by the expressions (8) which are compatible with the consistency conditions obtained in Proposition 2.1. Theorem 2.2 requires the a priori estimate  $(\varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda) \in \mathbb{R}_+^2$  which can be deduced from the entropy result if the solution  $W^\lambda$  is smooth and if the entropies of both the real and the fictitious gas are singular when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Proposition 2.3, based on a first order asymptotic analysis in the relaxation parameter  $\lambda$ , confirms the stability result. Assuming that the real gas is TP and the fictitious gas TCP, we indeed prove that if the function  $\alpha$  is given by (10) and the functions  $\beta$  and  $\Theta$  as in Theorem 2.2, the vector  $\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$  satisfies up to first order in  $\frac{1}{\lambda}$  the system (11) which is compatible with the nonpositivity of entropy production.

Finally, we present a numerical implementation of the relaxation method that allows for a relatively straightforward use of compressible Navier–Stokes solvers designed for TCP gases. Numerical results for gas flows in which the internal energy is nonlinear in the temperature are presented in [1].

## 1. Introduction

Les équations de Navier–Stokes compressibles expriment la conservation de la masse, de l’impulsion et de l’énergie sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, & \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\rho$  désigne la densité,  $U = (u_1, \dots, u_d)^T$  le vecteur vitesse,  $^T$  la transposition,  $d$  la dimension d’espace,  $p$  la pression,  $\pi = -\eta(\nabla U + \nabla U^T - (2/3)(\nabla \cdot U)I)$  le tenseur flux d’impulsion ( $-\pi$  est le tenseur des contraintes visqueuses),  $E = \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho \varepsilon$  l’énergie totale par unité de volume,  $\varepsilon$  l’énergie interne spécifique,  $q = -\kappa \nabla T$  le vecteur flux de chaleur,  $\kappa$  la conductivité thermique et  $T$  la température. La viscosité de cisaillement  $\eta$  et la conductivité thermique  $\kappa$  sont des coefficients positifs que nous prendrons constants pour simplifier. Nous noterons  $W = (\rho, \rho U, E)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$  le vecteur des variables conservatives.

Afin de fermer (1), il est nécessaire d’exprimer la pression et la température en fonction de  $W$ . En notant  $\tau = \frac{1}{\rho}$  la dilatation, nous faisons l’hypothèse fondamentale qu’il existe une fonction  $\sigma := \sigma(\tau, \varepsilon)$  appelée entropie spécifique (mathématique), définie sur  $\mathbb{R}_+^2$ , strictement convexe en  $(\tau, \varepsilon)$  et telle que  $\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$ , ses dérivées partielles vérifient  $\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma < 0$  et  $\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma < 0$ . La pression et la température résultent alors des relations de Gibbs  $\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma = -\frac{1}{T}$  et  $\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma = -\frac{p}{T}$ . Un cas particulier important est celui des gaz thermiquement parfaits (TP) pour lesquels on a  $p = \rho RT$ , où  $R$  est une constante qui ne dépend que de la nature du gaz considéré. Le théorème de Schwarz pour les dérivées croisées de l’entropie implique alors que la température ne dépend que de  $\varepsilon$ . Si cette dépendance est linéaire, on parle de gaz thermiquement parfait et calorifiquement parfait (TPCP ou encore gaz parfait polytropique). De par sa simplicité, le modèle de gaz TPCP a été souvent considéré dans les applications. Il existe donc de nombreux codes dédiés à l’approximation numérique des équations de Navier–Stokes compressibles dans ce cadre. Cependant, pour de nombreux gaz, il est nécessaire de considérer une modélisation thermodynamique plus complexe. C’est le cas par exemple des gaz polyatomiques où les molécules possèdent des degrés de liberté internes (rotation et vibration) et des écoulements à haute pression où la dépendance de la pression en la densité devient non-linéaire.

Une approche intéressante pour traiter les lois de pression et de température générales consiste à utiliser une méthode de relaxation. Les méthodes de relaxation pour les systèmes de lois de conservation hyperboliques ont été étudiées dans [2,4,5]. Pour les équations d’Euler, obtenues à partir de (1) pour  $\pi = 0$  et  $q = 0$ , une méthode de relaxation a été développée récemment dans [3]. Le principe de la méthode est d’introduire un gaz fictif régi par une loi de pression simple  $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$  et de considérer le système d’équations relaxées (5) où interviennent les équations d’Euler pour le gaz fictif (modulo un terme de relaxation d’énergie) couplées à une équation de transport qui régit la perturbation de l’énergie interne spécifique. Sous des hypothèses qui seront précisées par la suite et que nous conserverons, Coquel et Perthame ont montré que le système d’équations relaxées jouissait de propriétés de consistance et de stabilité. Notre objectif est d’étendre aux équations de Navier–Stokes compressibles la méthode de relaxation introduite dans [3] et de prouver des résultats de consistance et de stabilité analogues. La difficulté principale est que du fait de la présence des flux diffusifs, notamment du flux de chaleur, il est nécessaire de prendre en compte non seulement la loi de pression du gaz réel mais également sa loi de température. Le gaz fictif sera quant à lui défini par la donnée d’une entropie  $\sigma_1 := \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$  de laquelle on déduit grâce aux relations de Gibbs, la loi de pression  $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$  et la loi de température  $T_1 := T_1(\tau, \varepsilon_1)$ .

## 2. Les équations de Navier–Stokes relaxées

Comme pour les équations d’Euler, nous supposons que pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , la pression du gaz réel est inversible en l’énergie interne sur  $\mathbb{R}_+$ , si bien que grâce au théorème des fonctions implicites, il existe une fonction  $F := F(\tau, \varepsilon_1)$  définie sur  $\mathbb{R}_+^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$\forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, \quad p(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)) = p_1(\tau, \varepsilon_1). \quad (2)$$

On notera  $\mathcal{V}$  la variété d'équilibre  $\mathcal{V} = \{(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1)\}$ .

Pour les équations de Navier–Stokes, nous devons considérer trois autres fonctions  $\alpha := \alpha(\tau, \varepsilon_1)$ ,  $\beta := \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  et  $\Theta := \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  avec  $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3$ . Nous considérons le système relaxé

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, & \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q_1^\lambda + P_1^\lambda, \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -P_1^\lambda - P_2^\lambda. \end{cases} \quad (3)$$

On notera  $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$  le vecteur des variables conservatives et on utilisera l'indice supérieur  $\lambda$  pour indiquer qu'une fonction des variables conservatives est évaluée en  $\mathcal{W}^\lambda$ . Les termes de perturbation (qui sont des fonctions des variables conservatives) s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P_1 = \alpha(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) + \lambda \rho (\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1)), & P_2 = \beta \nabla \cdot q_2, \\ q_1 = -\kappa \nabla T_1, & q_2 = \mathcal{Q} - q_1, & \mathcal{Q} = -\kappa \nabla \Theta. \end{cases} \quad (4)$$

On notera que le coefficient  $\alpha$  permet de pondérer les contributions de la dissipation visqueuse et de la diffusion de chaleur entre les deux bilans d'énergie et que seul le flux de chaleur lié au gaz fictif intervient dans l'équation de  $E_1^\lambda$ . En l'absence de flux diffusifs ( $\pi = 0$  et  $q_1 = q_2 = \mathcal{Q} = 0$ ), le système (3) redonne le système des équations d'Euler relaxées introduit dans [3] :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, & \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = 0, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = \lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)), \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -\lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)). \end{cases} \quad (5)$$

### 2.1. Consistance

**Proposition 2.1.** *On suppose que la fonction  $F$  est déterminée par la relation de consistance (2) et que  $\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$ ,  $\beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$  et  $\Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ . Alors, le vecteur  $W^\infty = (\rho^\infty, U^\infty, E^\infty)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$  avec  $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$  satisfait les équations de Navier–Stokes compressibles (1) avec les lois de pression et de température du gaz réel.*

Dans le cas général, on n'a pas nécessairement égalité des températures du gaz réel et du gaz fictif à l'équilibre, i.e.  $T^\infty \neq T_1^\infty$  a priori. Un cas particulier remarquable est celui où le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP. La température a alors la même forme fonctionnelle en la densité et la pression pour le gaz réel et le gaz fictif, si bien que  $T^\infty = T_1^\infty$  et par suite  $q_2^\infty = 0$ .

### 2.2. Stabilité

Comme pour les équations d'Euler, on suppose que la fonction  $F$  satisfait les conditions « sous-caractéristiques » suivantes :

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, & \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau, \varepsilon_1) > 0 \quad \text{et} \quad c_1(\tau, \varepsilon_1) > c(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)), \\ \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} F(\tau, \varepsilon_1) = \infty & \text{à } \sigma_1 \text{ fixée,} \end{cases} \quad (6)$$

où  $c := c(\tau, \varepsilon) = \tau \sqrt{p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p}$  est la célérité du son du gaz réel et  $c_1 := c_1(\tau, \varepsilon_1)$  celle du gaz fictif. Dans ces conditions, il existe deux fonctions  $\mathcal{J} := \mathcal{J}(\sigma_1, \varepsilon_2)$  et  $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2)$  telles que  $\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{J}(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \tau$  et  $\mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \varepsilon_1$ . De plus, la fonction  $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \sigma(\mathcal{J}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2)$  est compatible avec l'entropie du gaz réel à l'équilibre, i.e.  $\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$ ,  $\Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ , et l'entropie volumique

$$S := S(W) = \rho \Sigma \left( \sigma_1 \left( \frac{1}{\rho}, \frac{E_1}{\rho} - \frac{1}{2} U^2 \right), \varepsilon_2 \right), \quad (7)$$

est convexe en  $\mathcal{W}$  à l'équilibre. Enfin, en l'absence de flux diffusifs, on a  $\partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) \leq \lambda \omega_e(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda)$  où  $\omega_e := \omega_e(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\tau}(\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) - \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2)) \times (\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1))$ , est tel que  $\omega_e \leq 0$  et  $\omega_e = 0$  si et seulement si  $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$  [3].

**Théorème 2.2.** *On suppose que la fonction  $\alpha$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  et que les fonctions  $\beta$  et  $\Theta$  sont données par*

$$\begin{cases} \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \alpha + (1 - \alpha) \frac{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\mathcal{J}(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2))}, \\ \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -((1 - \alpha) \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) + \alpha \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2))^{-1}, \end{cases} \quad (8)$$

$\alpha$  étant évalué en  $(\tau, \varepsilon_1)$ . Alors, les hypothèses de consistance de la Proposition 2.1 sont satisfaites. De plus, en supposant que  $\mathcal{W}^\lambda$  est régulière et que  $(\varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda) \in \mathbb{R}_+^2$ , on a

$$\forall \lambda, \quad \partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) - \nabla \cdot \left( \frac{\mathcal{Q}^\lambda}{\Theta^\lambda} \right) = \lambda \omega_e^\lambda + \frac{\pi^\lambda : \nabla U^\lambda}{\Theta^\lambda} + \frac{\mathcal{Q}^\lambda \cdot \nabla \Theta^\lambda}{(\Theta^\lambda)^2} \leq 0, \quad (9)$$

les trois contributions étant négatives indépendamment.

**Esquisse de la preuve.** Un calcul direct montre que  $\partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\mathcal{J}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2)$  et  $\partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\mathcal{J}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2))$ . Comme  $0 \leq \alpha \leq 1$ , on en déduit que  $\Theta > 0$ . De plus, pour  $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$ , on vérifie aisément que  $\Theta = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  et  $\beta = 1$  si bien que les hypothèses de consistance de la Proposition 2.1 sont satisfaites. Par ailleurs, un calcul direct donne (nous omettons l'indice  $\lambda$  afin d'alléger les notations)

$$\begin{aligned} \partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) (-\pi : \nabla U - \nabla \cdot q_1 + P_1) + \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) (-P_1 - P_2) \\ &\quad + \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) (\partial_{\tau, \varepsilon_1} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) - p_1(\tau, \varepsilon_1) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)) \nabla \cdot U. \end{aligned}$$

La contribution de  $\nabla \cdot U$  est nulle grâce aux relations de Gibbs. En explicitant  $P_1$  et  $P_2$ , on constate que le facteur devant  $(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)$  vaut  $-1/\Theta$  et que  $\beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = -1/\Theta$ . Enfin, la contribution  $\omega_e$  s'obtient comme pour les équations d'Euler relaxées.  $\square$

La stabilité du système Navier–Stokes relaxé suppose l'estimation *a priori*  $(\varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda) \in \mathbb{R}_+^2$ . Celle-ci peut s'obtenir à partir de l'estimation d'entropie du Théorème 2.2 lorsque la solution  $\mathcal{W}^\lambda$  est régulière et que l'entropie du gaz réel et celle du gaz fictif sont singulières lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ce qui est le cas par exemple lorsque le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP.

### 2.3. Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un

On s'intéresse à des petites perturbations de la solution  $\mathcal{W}^\lambda$  de (3) autour d'un état d'équilibre. Nous supposons dans cette section que le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP. Dans ces conditions, on vérifie que la fonction  $F$  ne dépend que de  $\varepsilon_1$ .

**Proposition 2.3.** *On suppose que la fonction  $\alpha$  est donnée par*

$$\alpha := \alpha(\varepsilon_1) = \frac{F'(\varepsilon_1)}{1 + F'(\varepsilon_1)}, \quad (10)$$

et que les fonctions  $\beta$  et  $\Theta$  sont données par (8). Alors, le vecteur  $\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$  est solution, à l'ordre un en  $1/\lambda$ , du système dissipatif de lois de conservation

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla (\mu_e^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\mu_e^\lambda U^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \end{cases} \quad (11)$$

où  $\mu_e^\lambda$ , qui s'interprète comme une viscosité liée à la relaxation, est donnée dans [3],  $q^\lambda = -\kappa \nabla T^\lambda$  et  $T^\lambda$  est la température du gaz réel.

**Esquisse de la preuve.** La première étape de la preuve est analogue à celle pour les équations d'Euler : on développe l'énergie interne spécifique  $\varepsilon_1^\lambda$  sous la forme  $\varepsilon_1^\lambda = \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}$  et on déduit la valeur de  $\varepsilon_1^{\lambda,1}$  en identifiant les termes d'ordre zéro dans (3). Le point essentiel est que  $\varepsilon_1^{\lambda,1}$  ne dépend pas des flux diffusifs grâce au choix (10) pour le coefficient  $\alpha$ . Puis, en sommant les deux équations de l'énergie dans (3) et en développant  $p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$  à l'ordre un en  $1/\lambda$ , on obtient le système (11) avec le flux de chaleur  $Q^\lambda$  à la place de  $q^\lambda$ . La dernière étape consiste à vérifier que  $\Theta^\lambda = T^\lambda + \mathcal{O}(1/\lambda^2)$ , ce qui résulte d'un calcul long mais direct utilisant le fait que lorsque le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP, on a  $\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma = 1$ .  $\square$

### 3. Mise en œuvre numérique

Afin de souligner l'intérêt de la méthode de relaxation pour les applications numériques, nous en présentons une implémentation qui permet d'utiliser de manière relativement immédiate les solveurs Navier–Stokes compressibles dédiés aux gaz TPCP. On se donne un gaz fictif TPCP dont l'exposant adiabatique  $\gamma_1$  est choisi suffisamment grand pour que les conditions (6) soient satisfaites (voir [3]). L'algorithme comprend trois étapes :

- (1) À partir des variables conservatives au temps discret  $t^n$ ,  $W^n = (\rho^n, \rho^n U^n, E^n)$ , on évalue  $\varepsilon^n$ ,  $\tau^n$  et la pression  $p^n = p(\tau^n, \varepsilon^n)$  puis on calcule les énergies internes  $\varepsilon_1^n = p(\rho^n, \varepsilon^n)/((\gamma_1 - 1)\rho^n)$  et  $\varepsilon_2^n = \varepsilon^n - \varepsilon_1^n$  ainsi que la température  $T_1^n = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1^n/R$ .
- (2) Le système (3) est intégré entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  à l'équilibre ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Les fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\Theta$  sont évaluées selon (8) et (10) afin de garantir la stabilité du système relaxé.
- (3)  $W^{n+1}$  est obtenue par projection :  $\rho^{n+1} = \rho^{n+1-}$ ,  $(\rho U)^{n+1} = (\rho U)^{n+1-}$ ,  $E^{n+1} = E_1^{n+1-} + (\rho \varepsilon_2)^{n+1-}$  où l'indice  $n+1-$  désigne les valeurs obtenues à l'étape 2.

Le système relaxé (3) est discrétisé à l'aide d'une méthode mixte volumes finis/éléments finis en espace couplée à un schéma explicite d'intégration en temps. Pour les flux hyperboliques, on considère les mêmes solveurs de Riemann que pour les équations d'Euler relaxées. Ceux-ci jouissent en particulier de la propriété de préserver les discontinuités de contact stationnaires. Les flux diffusifs sont approchés par une méthode d'éléments finis de degré un. Enfin, les termes sources sont moyennés sur les cellules de contrôle. On notera que lorsque le gaz réel est TP, le terme source associé au coefficient  $\beta$  disparaît à l'équilibre. Des résultats numériques pour des écoulements où l'énergie interne du gaz est une fonction non-linéaire de la température sont présentés dans [1].

### Références

- [1] E. Bongiovanni, A. Ern, N. Glinsky-Olivier, Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier–Stokes compressibles. II : validation numérique, Rapport de Recherche INRIA RR-4605, 2002.
- [2] G.-Q. Chen, C.D. Levermore, T.P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, *Comm. Pure Appl. Math.* 48 (1995) 787–830.
- [3] F. Coquel, B. Perthame, Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998) 2223–2249.
- [4] S. Jin, Z. Xin, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimension, *Comm. Pure Appl. Math.* 48 (1995) 235–276.
- [5] T.P. Liu, Hyperbolic conservation laws with relaxation, *Comm. Math. Phys.* 108 (1987) 153–175.