Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 181–184

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Flots de noyaux et flots coalescents

Flows of kernels and coalescing flows

Yves Le Jan, Olivier Raimond

Université Paris Sud, mathématiques, bât 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 27 juin 2002 ; accepté le 3 décembre 2002

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

Nous présentons une partie des résultats de Le Jan et Raimond (math.PR/0203221). Nous montrons comment à partir d'une famille compatible de semigroupes felleriens, on peut construire un flot stochastique de noyaux. Sous une hypothèse supplémentaire (sur le mouvement de deux points), nous montrons qu'à un flot de noyaux, il est possible d'associer un flot coalescent tel que le flot de noyaux puisse être construit en filtrant ce flot coalescent par un sous-bruit d'une extension du bruit engendré par le flot coalescent. ***Pour citer cet article : Y. Le Jan, O. Raimond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We present a part of the results of Le Jan and Raimond (math.PR/9909147). We show that starting with a compatible family of Feller semigroups, one can construct a stochastic flow of kernels. Under an additional hypotheses (on the 2-points motion), we show that it is possible to associate to a flow of kernels a coalescing flow such that the flow of kernels can be obtained by filtering the coalescing flow with respect to a sub-noise of an extension of the noise generated by the coalescing flow. ***To cite this article: Y. Le Jan, O. Raimond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Les flots stochastiques de noyaux et leurs lois

Soit (M,d) un espace métrique compact séparable (quand M est seulement localement compact, on étudiera le compactifié).

Définition 1.1. Soit $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ une famille de semigroupes felleriens respectivement définis sur M^n et opérant sur $C(M^n)$. On dira que cette famille est compatible dès que pour tout $k \leqslant n$, $\mathsf{P}_t^{(k)} f(x_1,\dots,x_k) = \mathsf{P}_t^{(n)} g(y_1,\dots,y_n)$ pour toutes fonctions continues f et g telles que $g(y_1,\dots,y_n) = f(y_{i_1},\dots,y_{i_k})$ avec $\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}$ et $(x_1,\dots,x_k) = (y_{i_1},\dots,y_{i_k})$.

Adresses e-mail : Yves.LeJan@math.u-psud.fr (Y. Le Jan), Olivier.Raimond@math.u-psud.fr (O. Raimond).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00004-9

On notera $\mathsf{P}^{(n)}_{(x_1,\ldots,x_n)}$ la loi du processus de Markov $X^{(n)}$ associé à $\mathsf{P}^{(n)}_t$ et issu de $(x_1,\ldots,x_n)$. Ce processus sera appelé le mouvement à n points.

Rappelons qu'un noyau sur M est une application mesurable de M dans $\mathcal{P}(M)$, M et $\mathcal{P}(M)$ étant munis de leurs tribus boréliennes. Soit E, l'espace des noyaux sur M, et $\mathcal{E}$ la plus petite tribu de parties de E rendant mesurables les applications $K \mapsto Kf(x) = \int f(y)K(x,dy)$, pour tous $f \in C(M)$ et $x \in M$.

Définition 1.2. Une famille $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ de mesures de probabilité sur $(E,\mathcal{E})$ est appelée un semigroupe de convolution si pour tous réels positifs s et t, sur $(E^2, \mathcal{E}^{\otimes 2}, \nu_s \otimes \nu_t)$, il existe une variable aléatoire K à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ de loi ν_{s+t} telle que pour tout $x \in M$,

$$K(x) = K_1K_2(x), \quad \nu_s \otimes \nu_t(\mathrm{d}K_1, \mathrm{d}K_2)\text{-p.s.,} \tag{1}$$

où $K_1K_2(x) = \int K_2(y)K_1(x,\mathrm{d}y)$. (En général, $(K_1,K_2) \mapsto K_1K_2$ n'est pas mesurable.) Nous dirons qu'un semigroupe de convolution $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe de convolution fellerien dès que (i) $\forall f \in C(M)$, $\lim_{t\to 0}\sup_{x\in M}\int (Kf(x) - f(x))^2\nu_t(\mathrm{d}K) = 0$. (ii) $\forall f \in C(M)$, $\forall t \geqslant 0$, $\lim_{d(x,y)\to 0}\int (Kf(x) - Kf(y))^2\nu_t(\mathrm{d}K) = 0$.

Définition 1.3. Une famille $(K_{s,t},\ s \leqslant t)$ de variables aléatoires à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ est appelée un flot stochastique de noyaux si et seulement si (a) Pour tous $s < u < t$, $x \in M$, P-p.s., $\forall f \in C(M)$, $K_{s,t}f(x) = K_{s,u}(K_{u,t}f)(x)$. (b) Pour tous $s \leqslant t$, la loi de $K_{s,t}$ ne dépend que de $t - s$. (c) Les accroissements du flot sont indépendants, i.e., pour tous $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, la famille $\{K_{t_i,t_{i+1}},\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ est indépendante. (d) $\forall f \in C(M)$, $\lim_{(u,v)\to(s,t)}\sup_{x\in M}\mathsf{E}[(K_{s,t}f(x) - K_{u,v}f(x))^2] = 0$. (e) Pour tous $s < t$ et $f \in C(M)$, $\lim_{d(x,y)\to 0}\mathsf{E}[(K_{s,t}f(x) - K_{s,t}f(y))^2] = 0$.

Notons $(\Omega^0, \mathcal{A}^0)$ l'espace mesurable $(\prod_{s\leqslant t} E, \bigotimes_{s\leqslant t}\mathcal{E})$ et $K = (K_{s,t},\ s \leqslant t)$ la variable aléatoire $K(\omega) = \omega$. Soit $(T_h)_{h\in\mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre de transformations de Ω^0 défini par $T_h(\omega)(s,t) = \omega(s+h, t+h)$, pour tous $s \leqslant t$, $h \in \mathbb{R}$ et ω.

Théorème 1.4. (1) *A toute famille compatible de semigroupes felleriens* $(\mathsf{P}^{(n)}_t,\ n \geqslant 1)$ *est associé un unique semigroupe de convolution fellerien* $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ *sur* $(E,\mathcal{E})$ *tel que pour tous* $n \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, $f \in C(M^n)$ *et* $x \in M^n$,

$$\mathsf{P}^{(n)}_t f(x) = \int K^{\otimes n} f(x)\nu_t(\mathrm{d}K). \tag{2}$$

Et réciproquement, pour tout semigroupe de convolution fellerien $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ *sur* $(E,\mathcal{E})$, (2) *définit une famille compatible de semigroupes felleriens.*

(2) *A tout semigroupe de convolution fellerien* $\nu = (\nu_t)_{t\geqslant 0}$ *sur* $(E,\mathcal{E})$ *est associé une unique probabilité* P_ν *sur* $(\Omega^0, \mathcal{A}^0)$, $(T_h)_{h\in\mathbb{R}}$*-invariante, telle que* $(K_{s,t},\ s \leqslant t)$ *soit un flot stochastique de noyaux pour lequel pour tous* $s < t$, ν_{t-s} *est la loi de* $K_{s,t}$. *Réciproquement, tout flot stochastique de noyaux définit un flot canonique associé à une* (*unique*) *famille compatible de semigroupes felleriens et un semigroupe de convolution sur* $(E,\mathcal{E})$.

Notons qu'un flot de noyaux associé à $(\mathsf{P}^{(n)}_t,\ n \geqslant 1)$, une famille compatible de semigroupes felleriens, est un flot d'applications mesurables (soit tel que $K_{s,t} = \delta_{\varphi_{s,t}}$ p.s.) si et seulement si pour tous $f \in C(M)$, $x \in M$ et $t > 0$, on a $\mathsf{P}^{(2)}_t f^{\otimes 2}(x,x) = \mathsf{P}_t f^2(x)$.

2. Le bruit associé à un flot stochastique de noyaux et le filtrage par un sous-bruit

Nous rappelons la définition d'un bruit donné par Tsirelson dans [5].

Définition 2.1. Un bruit est la donnée d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, d'un groupe à un paramètre $(T_h)_{h\in\mathbb{R}}$ de transformations de Ω préservant P et d'une famille $\{\mathcal{F}_{s,t},\ -\infty \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty\}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que

(a) T_h envoie $\mathcal{F}_{s,t}$ sur $\mathcal{F}_{s+h,t+h}$ pour tous $h \in \mathbb{R}$ et $s \leqslant t$, (b) $\mathcal{F}_{s,t}$ et $\mathcal{F}_{t,u}$ sont indépendantes pour tous $s \leqslant t \leqslant u$, (c) $\mathcal{F}_{s,t} \vee \mathcal{F}_{t,u} = \mathcal{F}_{s,u}$ pour tous $s \leqslant t \leqslant u$.

Soit ν un semigroupe de convolution fellerien. Pour tous $-\infty \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$ notons $\mathcal{F}^{\nu}_{s,t}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}^0$ engendrée par les variables aléatoires $K_{u,v}$ pour tous $s \leqslant u \leqslant v \leqslant t$ et complétée par toutes les parties P_ν-négligeables de $\mathcal{A}^0$. La propriété de cocycle de K entraîne que $N_\nu := (\Omega^0, \mathcal{A}^0, (\mathcal{F}^{\nu}_{s,t})_{s\leqslant t}, \mathsf{P}_\nu, (T_h)_{h\in\mathbb{R}})$ est un bruit h, appelé le bruit engendré par ν.

Soit $N = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_{s,t})_{s\leqslant t}, \mathsf{P}, (T_h)_{h\in\mathbb{R}})$ un bruit et K un flot de noyaux de loi P_ν tel que $K_{s,t}$ est $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable et $K_{s+h,t+h} f(x) = K_{s,t} f(x) \circ T_h$ p.s. Nous dirons que (N, K) est une extension de N_ν. Soit $\overline{N}$ un sous-bruit de N, i.e., un bruit $(\Omega, \mathcal{A}, (\overline{\mathcal{F}}_{s,t})_{s\leqslant t}, \mathsf{P}, (T_h)_{h\in\mathbb{R}}))$ tel que $\overline{\mathcal{F}}_{s,t} \subset \mathcal{F}_{s,t}$ pour tous $s \leqslant t$. Avec ce bruit, on définit une famille de semigroupes felleriens $(\overline{\mathsf{P}}^{(n)}_t,\ n \geqslant 1)$, où $\overline{\mathsf{P}}^{(n)}_t = \mathsf{E}[\mathsf{E}[K_{0,t}|\overline{\mathcal{F}}_{0,t}]^{\otimes n}]$. Soit $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_t)_{t\geqslant 0}$ le semigroupe de convolution associé.

Il est alors possible de construire un flot de noyaux $\overline{K}$ de loi $\mathsf{P}_{\bar{\nu}}$ tel que

$$\overline{K}_{s,t} f(x) = \mathsf{E}_\nu\big[K_{s,t} f(x)|\overline{\mathcal{F}}_{s,t}\big] = \mathsf{E}_\nu\big[K_{s,t} f(x)|\overline{\mathcal{F}}\big] \quad \mathsf{P}_\nu\text{-p.s.} \tag{3}$$

pour tous $s \leqslant t$, $x \in M$ et $f \in C(M)$. Nous dirons que $\overline{K}$ est obtenu en filtrant K par $\overline{N}$.

Définition 2.2. Etant donnés ν_1 et ν_2 deux semigroupes de convolution felleriens sur $(E, \mathcal{E})$, nous dirons que ν_1 domine (resp. domine faiblement) ν_2 si et seulement si il existe un sous-bruit de N_{ν^1} (resp. un sous-bruit d'une extension (N^1, K^1) de N_{ν^1}) tel que P_{ν^2} soit la loi du flot obtenu en filtrant K (resp. K_1) par ce sous-bruit.

Ces relations de domination étendent la notion de barycentre et sont des relations d'ordre partiel sur la classe des semigroupes de convolution felleriens sur $(E, \mathcal{E})$.

3. Flots coalescents

Définition 3.1. Un flot stochastique $(\varphi_{s,t},\ s \leqslant t)$ d'applications sur M est dit coalescent si et seulement si pour tout $(x, y) \in M^2$, $T_{x,y} = \inf\{t \geqslant 0,\ \varphi_{0,t}(x) = \varphi_{0,t}(y)\}$ est fini avec une probabilité différente de 0 et pour tout $t \geqslant T_{x,y}$, $\varphi_{0,t}(x) = \varphi_{0,t}(y)$.

Soit $(\mathsf{P}^{(n)}_t,\ n \geqslant 1)$ une famille compatible de semigroupes felleriens et ν le semigroupe de convolution associé. Nous noterons le mouvement de deux points par $X^{(2)}_t$ ou par (X_t, Y_t), et le mouvement de n points par $X^{(n)}_t$.

Proposition 3.2. *Supposons que*

$$\begin{cases} \forall x \in M,\ \forall t > 0, \quad \lim_{y\to x} \mathsf{P}^{(2)}_{(x,y)}[X_t \neq Y_t] = 0, \\ \forall (x, y) \in M^2, \quad \limsup_{t\to\infty} \mathsf{P}^{(2)}_{(x,y)}[X_t \neq Y_t] < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Alors le flot associé à $(\mathsf{P}^{(n)}_t,\ n \geqslant 1)$ est un flot coalescent, noté $(\varphi_{s,t},\ s \leqslant t)$.

De plus, si pour tous $s < t \in \mathbb{R}$, $\mu_{s,t}$ désigne $\varphi^*_{s,t}(\lambda)$, où λ est une mesure de Radon positive sur M, pour tous $s < u < t$, $\mu_{s,t}$ est atomique p.s. et $\mu_{s,t} \ll \mu_{u,t}$ p.s.

Soit $\Delta_n = \{x \in M^n,\ \exists i \neq j,\ x_i = x_j\}$ et $T_{\Delta_n} = \inf\{t \geqslant 0,\ X^{(n)}_t \in \Delta_n\}$.

Théorème 3.3. *Il existe une et une seule famille compatible de semigroupes markoviens $(\mathsf{P}^{(n),c}_t,\ n \geqslant 1)$ telle que si $X^{(n),c}$ est le mouvement à n points correspondant et $T^c_{\Delta_n} = \inf\{t \geqslant 0,\ X^{(n),c}_t \in \Delta_n\}$, $(X^{(n),c}_t,\ t \leqslant T^c_{\Delta_n})$ et $(X^{(n)}_t,\ t \leqslant T_{\Delta_n})$ aient même loi et pour tout $t \geqslant T^c_{\Delta_n}$, $X^{(n),c}_t \in \Delta_n$.*

Cette famille est constituée de semigroupes felleriens dès que

(C) $\lim_{y\to x} \mathsf{P}^{(2)}_{(x,y)}[\{T_\Delta > t\} \cap \{d(X_t, Y_t) > \varepsilon\}] = 0$ *pour tous* $t > 0$, $\varepsilon > 0$ *et* $x \in M$. *Et pour tous* x *et* y *dans* M, $\mathsf{P}^{(2)}_{(x,y)}[T_\Delta < \infty] > 0$.

Le flot de noyaux associé à cette nouvelle famille est alors un flot coalescent. Nous noterons ν^c *le semigroupe de convolution fellerien associé.*

Théorème 3.4. *Supposons la condition* (C) *vérifiée. Alors* ν^c *domine faiblement* ν.

4. Exemples

4.1. Le flot coalescent de Arratia

La première construction de ce flot a été donnée par Arratia dans [1]. Soit P_t le semigroupe d'un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Nous lui associons la famille compatible $(\mathsf{P}_t^{\otimes n},\ n \geqslant 1)$ des semigroupes felleriens produits. Son mouvement à n points est donné par n mouvements browniens indépendants et le flot canonique associé est donné par $(\mathsf{P}_{t-s},\ s \leqslant t)$. Soit alors $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ la famille de semigroupes felleriens coalescents construite à partir de $(\mathsf{P}_t^{\otimes n},\ n \geqslant 1)$ par le Théorème 3.3. Son mouvement à n points est alors donné par n mouvements browniens indépendants qui se collent quand ils se touchent. On montre alors que le flot canonique associé est un flot coalescent vérifiant (C) et (4).

4.2. L'algorithme de Propp–Wilson

Soit P_t le semigroupe d'un processus de Markov irréductible et apériodique sur un ensemble fini M, et m sa probabilité invariante. Comme précédemment, on définit $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ à partir de $(\mathsf{P}_t^{\otimes n},\ n \geqslant 1)$. Le flot canonique associé est aussi un flot coalescent $(\varphi_{s,t},\ s \leqslant t)$. Et, pour tous x, y dans M, $\tau_{x,y} = \inf\{t > 0,\ \varphi_{0,t}(x) = \varphi_{0,t}(y)\}$ est fini p.s. et après un temps fini, $\mathrm{Card}\{\varphi_{0,t}(x),\ x \in M\} = 1$. Propp et Wilson donnent dans [4] un algorithme pour simuler exactement une variable aléatoire dont la loi est donnée par la probabilité invariante d'une chaîne de Markov. Expliquons cette méthode dans notre cadre. Soit $\tau = \inf\{t > 0, \varphi_{-t,0}(x) = \varphi_{-t,0}(y), \forall (x, y) \in M^2\}$. Alors $\tau < \infty$ p.s. et la loi de X_τ, la variable aléatoire $\varphi_{-\tau,0}(x)$ (independante de $x \in M$), est donnée par m.

4.3. L'EDS de Tanaka

Dans [2], partant d'un bruit blanc B, un flot de noyaux S est construit et est solution forte de l'EDS, $\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}B_t$. Nous pouvons alors définir $(\mathsf{P}_t^{(n)},\ n \geqslant 1)$ une famille compatible de semigroupes felleriens par $\mathsf{P}_t^{(n)} = \mathsf{E}[S_t^{\otimes n}]$. Soit $(\mathsf{P}_t^{(n),c},\ n \geqslant 1)$ la famille de semigroupes felleriens construite par le Théorème 3.3. Le flot canonique associé est un flot coalescent vérifiant (C) (mais pas (4)). Ce flot a aussi été étudié par Watanabe [6].

D'autres exemples sont donnés dans la note suivante [3].

Références

[1] R. Arratia, Brownian motion on the line, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1979.
[2] Y. Le Jan, O. Raimond, Integration of Brownian vector fields, to appear in Ann. Probab. or math.PR/9909147.
[3] Y. Le Jan, O. Raimond, Une classification des flots solutions d'une EDS, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 336 (2003).
[4] J.G. Propp, D.B. Wilson, Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics, in: Proceedings of the Seventh International Conference on Random Structures and Algorithms, Atlanta, GA, 1995, Random Structures Algorithms 9 (1–2) (1996) 223–252.
[5] B. Tsirelson, Unitary Brownian motions are linearizable, 1998, math.PR/9806112. Also MSRI Preprint No. 1998-027.
[6] S. Watanabe, The stochastic flow and the noise associated to Tanaka's stochastic differential equation, Ukraïn. Mat. Zh. 52 (9) (2000) 1176–1193. English translation: Ukrainian Math. J. 52 (9) (2001) 1346–1365.