C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 889–894

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Problème de Gleason et interpolation pour les fonctions hyper-analytiques

Daniel Alpay [a,1], Michael Shapiro [b,2]

[a] Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel

[b] Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Física y Mathemáticas, Instituto Politécnico Nacional, 07300 México, D.F., Mexico

Reçu le 16 septembre 2002 ; accepté le 15 octobre 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé Nous démontrons un théorème de type Gleason pour les fonctions hyper-analytiques dans la boule unité de $\mathbb{R}^4$. Nous donnons une interprétation du résultat en termes de paires de fonctions définies dans la boule unité de $\mathbb{C}^2$. Enfin, nous utilisons le théorème pour étudier le problème d'interpolation homogène dans le cadre des fonctions hyper-analytiques. ***Pour citer cet article : D. Alpay, M. Shapiro, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 889–894.***

Gleason's problem and interpolation for hyperholomorphic functions

Abstract We prove a Gleason type theorem in the setting of functions hyperholomorphic in the unit ball of $\mathbb{R}^4$. We give an interpretation of the result in terms of pairs of functions defined in the unit ball of $\mathbb{C}^2$. Finally we use the theorem to study the homogeneous interpolation problem in the setting of hyperholomorphic functions. ***To cite this article: D. Alpay, M. Shapiro, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 889–894.***

Abridged English version

The backward-shift operator R_0 defined by

$$R_0 f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

and more generally the operators $R_a f(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ play an important role in operator theory, system theory and interpolation of analytic functions; see [1] for a survey. When leaving the setting of one complex variables, the counterpart of R_a-invariance is given by Gleason's problem:

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay); shapiro@esfm.ipn.mx (M. Shapiro).

S1631-073X(02)02598-0/FLA

Given a family $\mathcal{F}$ of functions analytic in some subset Ω of $\mathbb{C}^N$ and given $a \in \Omega$ one asks if for every $f \in \mathcal{F}$ there exist functions $g_1, \ldots, g_N$ in $\mathcal{F}$ such that

$$f(z) - f(a) = (z_1 - a_1)g_1(z) + \cdots + (z_N - a_N)g_N(z). \tag{1}$$

The right side of (1) can be rewritten as $(z-a)g(z)$ where

$$g(z) = \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_N(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^N$$

and where $z = t(z_1, \ldots, z_N)$ and $a = (a_1, \ldots, a_N)$.

In this Note we explore a different avenue and consider Gleason's problem when the complex numbers are replaced by the quaternions and analytic functions are replaced by left-hyperholomorphic functions. Leibenson's solution to Gleason's problem is still valid here and allows us to introduce in a natural way the so-called hyperholomorphic variables ζ_ℓ, $\ell = 1, 2, 3$ (see (7)). The identification of the skew-field of quaternions with $\mathbb{C}^2$ allows us to consider Gleason's problem in the setting of $\mathbb{C}^2$ in the case where the functions are not necessarily analytic. This does not seem to have been looked upon previously and leads to a new version of Gleason's problem; see Theorem 3.

1. Quaternions et fonctions hyper-analytiques

Rappelons qu'un quaternion est une expression de la forme

$$\mathbb{H} = \left\{x = x_0 + \mathbf{e_1}x_1 + \mathbf{e_2}x_2 + \mathbf{e_3}x_3;\ (x_0, x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^4\right\}, \tag{2}$$

où $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ satisfont

$$\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell, \quad \ell \neq k, \tag{3}$$

et

$$\mathbf{e_1}\mathbf{e_2} = \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{e_2}\mathbf{e_3} = \mathbf{e_1}, \quad \mathbf{e_3}\mathbf{e_1} = \mathbf{e_2}. \tag{4}$$

Notant $z_1 = x_0 + \mathbf{e_1}x_1$ et $z_2 = x_2 + \mathbf{e_1}x_3$ on a $x = z_1 + z_2\mathbf{e_2}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{C}^2$. On note alors $\mathbf{e_1} = i$ et $\mathbf{e_2} = j$. Il est utile de noter que $xj = j\overline{x}$ où $\overline{x} = x_0 - (\mathbf{e_1}x_1 + \mathbf{e_2}x_2 + \mathbf{e_3}x_3)$.

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{H}$ est appelée *hyper-analytique à gauche* si

$$Df \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x_0} f + \mathbf{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1} f + \mathbf{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2} f + \mathbf{e_3}\frac{\partial}{\partial x_3} f = 0. \tag{5}$$

Identifiant f à une fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ on a (avec $f(x) = f_1(z_1, z_2) + f_2(z_1, z_2)j$ et e.g. $\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1})$)

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_1}} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_2}} = -\frac{\partial f_2}{\partial z_1}. \tag{6}$$

La variable quaternionique x n'est pas hyper-analytique à gauche, mais les fonctions suivantes, introduites par Fueter (voir [5]),

$$\zeta_1 = x_1 - x_0\mathbf{e_1}, \qquad \zeta_2 = x_2 - x_0\mathbf{e_2}, \qquad \zeta_3 = x_3 - x_0\mathbf{e_3} \tag{7}$$

le sont.

Le produit de deux fonctions hyper-analytiques à gauche n'est pas nécessairement hyper-analytiques à gauche. L'analogue des mônomes homogènes est donné par les polynômes de Fueter, définis par

$$P_\nu(x) = (-1)^{|\nu|} \frac{\nu!}{|\nu|!} \sum_{\sigma \in S_{|\nu|}} \zeta_{\sigma(1)} \cdots \zeta_{\sigma(|\nu|)}, \tag{8}$$

où $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ et $\nu! = \nu_1!\nu_2!\nu_3!$. Voir [7]. Une fonction hyper-analytique à gauche dans $\mathbb{S}$ peut s'écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\nu|=k} P_\nu(x) a_\nu, \tag{9}$$

avec $a_\nu \in \mathbb{H}$.

Nous renvoyons le lecteur à [8,9] et [12] pour plus de détails sur le cadre hyper-analytique. Il est aussi instructif de lire par exemple l'article de Fueter [6] dans les Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens de 1936 et la note de Moisil [10].

Finalement nous remarquons que les applications

$$B(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4,$$

et

$$\chi(z, w) := \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}, \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2,$$

donnent des réalisations concrètes de $\mathbb{H}$ et permettent de transférer les notions quaternioniques aux cadres réel et complexe, et réciproquement. Cette approche est exploitée dans [4] pour étudier les espaces à noyau reproduisant munis d'une métrique indéfinie.

2. Le théorème pour les fonctions hyper-analytiques dans la boule $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^4$ et $a = 0$

THÉORÈME 1. – *Soit f une fonction hyper-analytique à gauche dans $\mathbb{S}$. Les fonctions $g_\ell(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(tx)\,\mathrm{d}t$ sont aussi hyper-analytiques à gauche dans $\mathbb{S}$ et on a* :

$$f(x) - f(0) = \zeta_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx)\,\mathrm{d}t + \zeta_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(tx)\,\mathrm{d}t + \zeta_3 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_3}(tx)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Démonstration. – La preuve suit la méthode de Leibenson et fait apparaître de manière naturelle les variables hyper-analytiques (7). On a :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(tx) = \sum_{\ell=0}^{3} x_\ell \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(tx). \tag{11}$$

La fonction f est hyper-analytique à gauche et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -\mathbf{e_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \mathbf{e_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \mathbf{e_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Remplaçant $\partial f/\partial x_0$ par cette expression dans (11) on obtient que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(tx) = -x_0\left(\mathbf{e_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) + \mathbf{e_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(tx) + \mathbf{e_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}(tx)\right) + \sum_{\ell=1}^{3} x_\ell \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(tx) = \sum_{\ell=1}^{3}(x_\ell - x_0\mathbf{e}_\ell)\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(tx).$$

L'équation (10) résulte par intégration par rapport à t. Les fonctions g_ℓ sont hyper-analytiques à gauche. En effet, pour t donné, $Df(tx) = 0$ et l'on peut intervertir intégration et dérivation dans le calcul de Dg_k.

Une seconde preuve du résultat précédent utilise les polynômes de Fueter (définis en (8)). On montre que le résultat est vrai pour chaque P_ν et on utilise après le développement en série (9). On obtient alors une autre expression pour f :

$$f(x) - f(0) = \zeta_1 g_1(x) + \zeta_2 g_2(x) + \zeta_3 g_3(x),$$

et on a :

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx)\,\mathrm{d}t = g_1(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{\nu_1}{|\nu|}P_{(\nu_1-1,\nu_2,\nu_3)}(x)a_\nu,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(tx)\,\mathrm{d}t = g_2(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{\nu_2}{|\nu|}P_{(\nu_1,\nu_2-1,\nu_3)}(x)a_\nu,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_3}(tx)\,\mathrm{d}t = g_3(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{\nu_3}{|\nu|}P_{(\nu_1,\nu_2,\nu_3-1)}(x)a_\nu.$$

Les formules pour les g_ℓ en termes de séries sont semblables aux formules données par Rudin ; voir [11, (2), p. 118]. Le cadre est cependant totalement différent.

3. Le cas d'un point arbitraire dans $\mathbb{S}$

Nous utilisons un changement de variable. L'application $\varphi_{-a}(x) = (1+x\overline{a})^{-1}(x+a)$ est une bijection de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}$. On voudrait appliquer le résultat de la section précédente à la fonction $f\circ\varphi_{-a}$. Malheureusement cette fonction n'est pas hyper-analytique à gauche dans $\mathbb{S}$ en général. Par contre la fonction

$$\frac{1-\overline{a}x}{|1-\overline{a}x|^4}f\big(\varphi_a(x)\big) \tag{12}$$

est elle hyper-analytique à gauche dans $\mathbb{S}$ lorsque f l'est.

THÉORÈME 2. – *Soit $a \in \mathbb{S}$. Il existe une fonction*

$$\zeta(x,a) : \mathbb{S} \to \mathbb{H}^3$$

ayant la propriété suivante : pour toute fonction $f(x)$ hyper-analytique à gauche dans $\mathbb{S}$ il existe des fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$ and $g_3(x)$ hyper-analytiques à gauche dans $\mathbb{S}$ et telles que :

$$f(x) - (1-\overline{a}x)\frac{(1-|a|^2)^3}{|1-\overline{a}x|^4}f(a) = \zeta(x,a)\begin{pmatrix} g_1(x)\\ g_2(x)\\ g_3(x)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

On voit donc apparaître le noyau de Cauchy hyper-analytique $(1-\overline{a}x)\frac{(1-|a|^2)^3}{|1-\overline{a}x|^4}$. C'est là une différence importante avec le cas analytique.

Dans les paragraphes suivants nous présentons deux applications des résultats énoncés.

4. Interprétation pour des paires de fonctions complexes

En identifiant $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}^2$ on obtient la version suivante du Théorème 1 :

THÉORÈME 3. – *Soient A et B les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\mathrm{i}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\mathrm{i}} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Soit (f_1, f_2) *une paire de fonction qui satisfont* (6) *dans* $\mathbb{B}^2$. *Il existe des fonctions* f *et* g *à valeurs dans* $\mathbb{C}^3$ *telles que les lignes de la matrice* $(f\ g)$ *satisfont aussi à* (6) *et telles que*

$$f_1(z) - f_1(0) = (z_1 \quad z_2 \quad \overline{z_1} \quad \overline{z_2})\left(Ag(z) + B\overline{h(z)}\right), \tag{15}$$

$$f_2(z) - f_2(0) = (z_1 \quad z_2 \quad \overline{z_1} \quad \overline{z_2})\left(Ah(z) - B\overline{g(z)}\right). \tag{16}$$

5. Interpolation homogène pour les fonctions hyper-analytiques à gauche

Le Théorème 2 permet d'étudier le problème d'interpolation tangentielle pour les fonctions hyper-analytique à gauche dans $\mathbb{S}$. La formule (13) donne :

THÉORÈME 4. – *Soit* $a \in \mathbb{S}$. *Une fonction* f *hyper-analytique à gauche s'annule au point* a *si et seulement si*

$$f(x) = \zeta(x, a)g(x), \tag{17}$$

où $g : \mathbb{S} \to \mathbb{B} \to \mathbb{H}^3$ *est hyper-analytique à gauche et telle que le produit* $\zeta(x, a)g(x)$ *est encore hyper-analytique à gauche.*

Si l'on veut imposer une condition supplémentaire d'interpolation ($f(b) = 0$ avec $b \neq a$) on obtient (comme en [3]) une condition tangentielle

$$\zeta(b, a)g(b) = 0.$$

On voit deux différences et difficultés importantes par rapport à [3]. D'abord, le paramètre g n'est pas arbitraire. Il faut que la fonction $\zeta(x, a)g(x)$ soit hyper-analytique à gauche. Ensuite la fonction $\zeta(b, a)g(x)$ (dont on veut qu'elle s'annule au point b) n'est pas hyper-analytique à gauche en général.

6. Conclusions

La comparaison des résultats présentés dans cette note et dans la note [2] montre les analogies, mais aussi les différences entre le cadre des fonctions analytiques dans la boule unité de $\mathbb{C}^2$ et le cadre des fonctions hyper-analytiques. Les différences deviennent encore plus importantes lorsque l'on identifie $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}^2$.

[1] The research of this author was supported by the Israel Science Foundation (Grant no. 322/00).

[2] Research partially supported by CONACYT projects as well as by Instituto Politécnico Nacional in the framework of COFAA and CGPI programs.

Références bibliographiques

[1] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, in : Panoramas et Synthèses, Vol. 6, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[2] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Sous espaces de codimension finie dans la boule unité et un problème de factorisation, C. R. Acad. Sci. Paris 331 (2000) 947–952.
[3] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Some finite-dimensional backward shift-invariant subspaces in the ball and a related interpolation problem, Integral Equation Operator Theory (2002) 1–21.
[4] D. Alpay, M. Shapiro. Reproducing quaternionic Pontryagin spaces, Preprint, 2002.
[5] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, Clifford Analysis, in: Pitman Res. Notes, Vol. 76, 1982.
[6] R. Fueter, Die Theorie der regülaren Funkionen einer quaternionen Variablen, in: Comptes rendus du congrès international des mathématiciens, Oslo 1936, Tome I, A.W. Broggers Boktrykkeri, 1937.
[7] K. Gürlebeck, W. Sprössig, Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, in: Mathematical Methods in Practice, Vol. 1, Wiley, 1997.
[8] V. Kravchenko, M.V. Shapiro, Integral Representations for Spatial Models of Mathematical Physics, Longman, Harlow, 1996.
[9] I. Mitelman, M.V. Shapiro, Differentiation of the Martinelli–Bochner integrals and the notion of hyperderivability, Math. Nachr. 172 (1995) 211–238.
[10] G. Moisil, Sur l'équation $\Delta u = 0$, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 191 (1930) 984–986.
[11] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, 1980.
[12] M.V. Shapiro, Some remarks on generalizations of the one-dimensional complex analysis: hypercomplex approach, in: Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations Trieste, 1993, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, pp. 379–401.