C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 871–876

Théorie des groupes/*Group Theory*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

Représentation intégrale du noyau de la chaleur sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$

Ali Hafoud, Ahmed Intissar

Départ. maths et info., Faculté des sciences, Université Mohammed V Agdal, BP 1014, Rabat, Maroc

Reçu le 4 septembre 2002 ; accepté après révision le 8 octobre 2002

Note présentée par Michèle Vergne.

Résumé Dans cette Note, on donne une représentation intégrale du noyau de la chaleur $Q_n(t,r)$ associé au Laplacien de Fubini-Study sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Pour cela, on établit une représentation intégrale réelle des polynômes de Jacobi du type $P_l^{(n-1,0)}(x)$ généralisant celle donnée pour les polynômes de Legendre $P_l(\cos 2r)$: $P_l(\cos 2r) = \frac{2}{\pi}\int_r^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}} (\sin(2l+1)u)\,\mathrm{d}u$. ***Pour citer cet article : A. Hafoud, A. Intissar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 871–876.***

Integral representation of the Heat Kernel on the complex projective space $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$

Abstract In this Note we give an explicit integral representation for Heat Kernels associated to Fubini-Study Laplacians on complex projective spaces $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$. This was possible by establishing a real integral representation formula for Jacobi polynomials of type $P_l^{(n-1,0)}(x)$. ***To cite this article: A. Hafoud, A. Intissar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 871–876.***

Abridged English version

Let $M = G/H$ be a rank one Riemannian symmetric space, Δ_M the Laplacian–Beltrami operator on M and $E_M(t,x,y)$ the associated Heat Kernel solving the following heat equation on M:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_M(t,x,y) = \Delta_M E_M(t,x,y), \quad t > 0,\ x, y \in M,$$

$$\lim_{t\to 0} \int_M E_M(t,x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = f(x), \quad f \in \mathrm{C}_c^\infty(M).$$

Then it is well known that the above Heat Kernel $E_M(t,x,y)$ depends only on $t > 0$ and on the geodesic distance $r := d(x,y)$ of the rank one symmetric space M, i.e., $E_M(t,x,y) = F(t,r)$. Hence it becomes natural to seek an explicit formula for the function $F(t,r)$. Indeed, for Heat Kernels of classical rank one symmetric spaces of non compact type (i.e., real, complex and quaternionic hyperbolic spaces) there exists well known explicit integral formulae given in slightly different forms by many authors (cf. Debiard and Gaveau [2] and references therein). For instance, the Heat Kernel $H_n(t,r)$ of the complex hyperbolic space $H^n(\mathbb{C})$ can be given by:

Adresses e-mail : hafoud_ali@yahoo.fr (A. Hafoud); intissar@fsr.ac.ma (A. Intissar).

S1631-073X(02)02582-7/FLA

$$H_n(t,r) = \mathrm{e}^{-n^2 t}(2\pi)^{-n}(\pi t)^{-1/2}\int_r^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\cosh u)}{\sqrt{\cosh^2 u - \cosh^2 r}}\left(-\frac{1}{\sinh u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n\big(\mathrm{e}^{-u^2/4t}\big).$$

However, for Heat Kernels on classical compact symmetric spaces G/H of rank 1 (i.e., spheres, complex projective spaces or quaternionic projective spaces) there are, to our knowledge, only expansion formulae given in terms of zonal functions with respect to H or as integrals over H of the Heat Kernel of the group G (see Benabdellah [1]). In this Note, we give an integral representation of the Heat Kernel $Q_n(t,r)$ associated to the Fubini-Study Laplacian on the complex projective space $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Namely, we establish the following integral representation for $Q_n(t,r)$.

THEOREM 1. – *Let $n \geqslant 1$. Then the Heat Kernel $Q_n(t,r)$ associated to the Fubini-Study Laplacian on the complex projective space $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ is given by the following integral formula*

$$Q_n(t,r) = \frac{\mathrm{e}^{n^2 t}}{2^{n-2}\pi^{n+1}}\int_r^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n\big[\Theta_{n+1}(t,u)\big],$$

where the function $\Theta_{n+1}(t,u)$ is given by: $\Theta_{n+1}(t,u) = \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4t(l+n/2)^2}\cos(2l+n)u$.

Method of proof. – This is based on an explicit expansion of the Heat Kernel $Q_n(t,r)$ in terms of Jacobi polynomials of type $P_l^{(n-1,0)}(\cos 2r)$ and an integral representation of $P_l^{(n-1,0)}(\cos 2r)$ that we have established. See the French version for precise statements.

To end this abridged English version we make the following remarks.

Remark 1. – Let $\vartheta_2(z,\tau)$ and $\vartheta_3(z,\tau)$ be the classical Jacobi functions as denoted in [6, p. 371]. For n odd, the above function $\Theta_{n+1}(t,x)$ is related to ϑ_2 and, for n even, the corresponding $\Theta_{n+1}(t,x)$ is related to ϑ_3. More precisely we have:

$$\Theta_{n+1}(t,x) = \frac{1}{2}\vartheta_2\left(\frac{x}{\pi},\frac{4\mathrm{i}t}{\pi}\right) - \sum_{l=0}^{l=(n-3)/2}\mathrm{e}^{-4t(l+1/2)^2}\cos(2l+1)x, \quad n \text{ odd},$$

and for n even we have:

$$\Theta_{n+1}(t,x) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(\frac{x}{\pi},\frac{4\mathrm{i}t}{\pi}\right) - 1\right) - \sum_{l=1}^{l=(n-2)/2}\mathrm{e}^{-4tl^2}\cos 2lx, \quad n \text{ even}.$$

Remark 2. – For fixed n in $\mathbb{Z}_+$, let $\chi(n) = -1$ for n odd and $\chi(n) = 1$ for n even. Then, by combining the formulae for ϑ_2 and ϑ_3 [6, page 371], i.e.,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(\chi(n)\big)^k\,\mathrm{e}^{-(x+k\pi)^2/(4t)} = \begin{cases}\vartheta_2\left(\frac{x}{\pi},\frac{4\mathrm{i}t}{\pi}\right), & n \text{ odd},\\ \vartheta_3\left(\frac{x}{\pi},\frac{4\mathrm{i}t}{\pi}\right), & n \text{ even},\end{cases}$$

with the above remark, we can use the above integral formula for the Heat Kernel $Q_n(t,r)$ to derive the asymptotic, when $t \to 0^+$, for the trace of Heat semi-group $e^{-t\Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}}$ in complex projective spaces $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

1. Introduction et énoncé des résultas

Soient $S^{2n+1} = \{\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |\omega| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$, $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ le cercle unité agissant sur la sphère S^{2n+1} par : $\lambda\cdot\omega = (\lambda\omega_1,\ldots,\lambda\omega_{n+1})$ avec $\lambda \in S^1$ et $\omega \in S^{2n+1}$. Soit $S^1\setminus S^{2n+1}$ l'espace des orbites de cette action et soit π la projection canonique : $\pi : S^{2n+1} \to S^1\setminus S^{2n+1}$. Alors l'espace $S^1\setminus S^{2n+1}$ s'identifie de manière naturelle à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Aussi, en munissant S^{2n+1} de sa métrique riemannienne canonique $\mathrm{d}s^2_{\mathrm{can}}$ et l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la métrique de Fubini-Study $\mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}}$, il résulte que la projection canonique π définie ci-dessus devient une submersion riemannienne dont toutes les fibres (S^1) sont totalement géodésiques de longueur 2π. Si $\Delta_{S^{2n+1}}$ et $\Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ désignent respectivement les Laplaciens sur $(S^{2n+1}, \mathrm{d}s^2_{\mathrm{can}})$ et $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}})$ on sait que la relation d'entrelacement suivante $\Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \circ \pi^* = \pi^* \circ \Delta_{S^{2n+1}}$ a lieu (cf. Gilkey et al. [4]) pour la submersion riemannienne donnée par la fibration de Hopf : $(S^1, \mathrm{d}s^2_{\mathrm{can}}) \hookrightarrow (S^{2n+1}, \mathrm{d}s^2_{\mathrm{can}}) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}})$.

Dans cette Note, on considère le problème de la chaleur associé à $\Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ sur l'espace $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_n\big(t, [\omega], [\theta]\big) = \Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} Q_n\big(t, [\omega], [\theta]\big), \quad t > 0,\ [\omega], [\theta] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} Q_n\big(t, [\omega], [\theta]\big) f\big([\theta]\big)\, \mathrm{d}\big([\theta]\big) = f\big([\omega]\big), \quad f \in \mathrm{C}^\infty\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\big), \tag{1'}$$

où $Q_n(t, [\omega], [\theta])$ est ce qu'on appelle le noyau de diffusion sur $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}})$.

Ici $[\omega]$ désigne un point courant de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ avec ω parcourant la sphère S^{2n+1}.

L'objet de cette Note est de donner une représentation intégrale du noyau de la chaleur $Q_n(t, [\omega], [\theta])$ solution du problème (1), (1′).

Pour énoncer les résultats principaux de cette Note, on fixera d'abord quelques notations qui seront utilisées par la suite. Pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2_+$, notons par $H_{n+1}(p, q)$ l'espace vectoriel de dimension finie formé par les restrictions à la sphère S^{2n+1} des polynômes $h^{pq}(z, \overline{z})$ harmoniques sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et qui sont homogènes de degré p en z et de degré q en $\overline{z}$ avec z dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Les espaces $H_{n+1}(p, q)$ sont mutuellement orthogonaux dans $\mathrm{L}^2(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega)$ lorsque les (p, q) parcourent $\mathbb{Z}^2_+$ et l'on a la décomposition suivante $\mathrm{L}^2(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega) = \bigoplus_{p,q\geqslant 0} H_{n+1}(p, q)$ (cf. [7]). Aussi pour chaque (p, q) fixé, le noyau reproduisant $G^{(p,q)}_{n+1}(\omega, \theta)$ de l'espace $H_{n+1}(p, q)$ dans $\mathrm{L}^2(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega)$ peut s'exprimer à l'aide des polynômes de Jacobi $P^{(\alpha,\beta)}_l(x)$ par une formule dite de Koorwinder (cf. [3]) :

$$G^{(p,q)}_{n+1}(\omega, \theta) = \frac{d(n+1, p, q)}{\mathrm{Vol}(S^{2n+1})\, P^{(n-1,|p-q|)}_{\mathrm{Min}(p,q)}(1)} \big|\langle\omega, \theta\rangle\big|^{|p-q|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\arg(\langle\omega,\theta\rangle)} P^{(n-1,|p-q|)}_{\mathrm{Min}(p,q)}\big(2\big|\langle\omega, \theta\rangle\big|^2 - 1\big),$$

où $d(n+1, p, q)$ est la dimension de $H_{n+1}(p, q)$, donnée explicitement par : $d(n+1, p, q) = (n+p+q) \times \frac{(n+p-1)!(n+q-1)!}{n!(n-1)!p!q!}$. En utilisant les notations précédentes, les résultats principaux de cette Note s'énoncent comme suit.

THÉORÈME 1. – *Soit* $n \geqslant 1$. *Ecrivons* $Q_n(t, r) = Q_n(t, [\omega], [\theta])$ *avec* $r = d([\omega], [\theta])$ *le noyau de la chaleur associé au Laplacien de Fubini-Study sur l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, *où* r *est la distance de Fubini-Study. Alors, pour tout* $t > 0$, *le noyau* $Q_n(t, r)$ *admet les représentations suivantes* :

$$\text{(i)} \quad Q_n(t, r) = \frac{1}{\pi^n} \sum_{l\geqslant 0} (2l+n) \frac{(l+n-1)!}{l!}\, \mathrm{e}^{-4tl(l+n)} P^{(n-1,0)}_l(\cos 2r). \tag{$*$}$$

$$\text{(ii)} \quad Q_n(t, r) = \frac{\mathrm{e}^{n^2 t}}{2^{n-2}\pi^{n+1}} \int_r^{\pi/2} \frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}} \left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n \big[\Theta_{n+1}(t, u)\big], \quad 0 \leqslant r < \frac{\pi}{2}, \tag{$**$}$$

où la fonction $\Theta_{n+1}(t, u)$ *est donnée par* : $\Theta_{n+1}(t, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-4t(l+n/2)^2} \cos(2l+n)u$.

Avant de donner une esquisse de la preuve du théorème ci-dessus, on mentionne la remarque suivante :

Remarque 1. – Le développement du noyau de la chaleur $Q_n(t, r)$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ donné ci-dessus dans (i) du théorème donne en effet la forme explicite du développement établi, en terme de fonctions zonales, par ([1], Remarque 2.1, p. 270) du noyau de la chaleur de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ vu comme espace homogène $SU(n+1)/S(U(n) \times U(1))$.

En particulier, pour $n = 1$, le développement du noyau $Q_1(t, r)$ donné par (i) sur $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}})$ coïncide avec celui du noyau de la chaleur sur la sphère $(S^2, \frac{1}{4}\mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}})$ établi par Fisher et al. [5].

2. Méthode de démonstration du Théorème 1

Preuve de (i). Pour commencer, rappelons tout d'abord que l'on a la fibration de Hopf : $(S^1, \mathrm{d}s^2_{\mathrm{can}}) \hookrightarrow (S^{2n+1}, \mathrm{d}s^2_{\mathrm{can}}) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathrm{d}s^2_{\mathrm{FS}})$.

Alors l'application π^* définie par $\pi^* f = f \circ \pi$ permet d'identifier l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathrm{d}\mu)$ (i.e., l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Fubini-Study $\mathrm{d}\mu([\omega])$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) à l'espace $\mathrm{L}^2_0(S^{2n+1}, \mathrm{d}\sigma)$ constitué par les fonctions de $\mathrm{L}^2(S^{2n+1}, \mathrm{d}\sigma)$ qui sont homogènes de degré 0, i.e. $\mathrm{L}^2_0(S^{2n+1}, \mathrm{d}\sigma) = \{f \in \mathrm{L}^2(S^{2n+1}, \mathrm{d}\sigma) : f(\lambda \cdot \omega) = f(\omega),\ \lambda \in S^1,\ \omega \in S^{2n+1}\}$ et en utilisant la décomposition hilbertienne de $\mathrm{L}^2(S^{2n+1}, \mathrm{d}\sigma) = \bigoplus_{p,q \geqslant 0} H_{n+1}(p,q)$, on peut établir facilement que l'espace $\mathrm{L}^2_0(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega)$ admet la décomposition hilbertienne suivante : $\mathrm{L}^2_0(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega) = \bigoplus_{p \geqslant 0} H_{n+1}(p,p)$. Maintenant revenons à l'équation de la chaleur associée au Laplacien $\Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$. Comme on a $\pi^* \circ \Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} = \Delta_{S^{2n+1}} \circ \pi^*$, il résulte de ce qui précède que le problème de la chaleur (1), (1′) pour $\Delta_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ est unitairement équivalent, via $\pi^*/\sqrt{2\pi}$, à celui de la chaleur associé au Laplacien $\Delta_{S^{2n+1}}$ de la sphère S^{2n+1} agissant sur l'espace $\mathrm{L}^2_0(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega)$. Mais sachant que pour tout $h^{(p,q)}_{n+1}(\omega, \overline{\omega})$ dans $H_{n+1}(p,q)$ on a

$$\Delta_{S^{2n+1}} h^{(p,q)}_{n+1}(\omega, \overline{\omega}) = -(p+q)(p+q+2n) h^{(p,q)}_{n+1}(\omega, \overline{\omega}),$$

on en déduit que : $\Delta_{S^{2n+1}} h^{(p,p)}_{n+1}(\omega, \overline{\omega}) = -4p(p+n) h^{(p,p)}_{n+1}(\omega, \overline{\omega})$. Il en résulte que le noyau de la chaleur $\widetilde{Q}_{n+1}(t, \omega, \theta)$ associé à $\Delta_{S^{2n+1}}$ avec données initiales dans $\mathrm{L}^2_0(S^{2n+1}, \mathrm{d}\omega)$ est donné par : $\widetilde{Q}_{n+1}(t, \omega, \theta) = \sum_{p \geqslant 0} \mathrm{e}^{-4tp(p+n)} G^{(p,p)}_{n+1}(\omega, \theta)$, où $G^{(p,p)}_{n+1}(\omega, \theta)$ est le noyau reproduisant de l'espace $H_{n+1}(p,p)$. Alors, en utilisant la formule de Koorwinder et la formule de la dimension de $H_{n+1}(p,p)$ donnée dans l'introduction, on voit que le noyau $G^{(p,p)}_{n+1}(\omega, \theta)$ prend la forme simple suivante : $G^{(p,p)}_{n+1}(\omega, \theta) = (2p + n) \frac{(p+n-1)!}{2\pi^{n+1} p!} P^{(n-1,0)}_p (2|\langle \omega, \theta \rangle|^2 - 1)$. Il résulte que le noyau $\widetilde{Q}_{n+1}(t, \omega, \theta)$ s'écrit explicitement sous la forme :

$$\widetilde{Q}_{n+1}(t, \omega, \theta) = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \sum_{l \geqslant 0} (2l+n) \frac{(l+n-1)!}{l!} \mathrm{e}^{-4tl(l+n)} P^{(n-1,0)}_l \left(2\left|\langle \omega, \theta \rangle\right|^2 - 1\right).$$

Maintenant, pour obtenir le développement (i) donné dans le théorème pour le noyau de la chaleur $Q_n(t,r)$ sur l'espace projectif complexe, il suffit d'une part de remarquer que la quantité $2|\langle \omega, \theta \rangle|^2 - 1$ intervenant dans $\widetilde{Q}_{n+1}(t, \omega, \theta)$ est égale à $\cos(2d([\omega], [\theta]))$ où $d([\omega], [\theta])$ est la distance de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ donnée par $d([\omega], [\theta]) = \arccos(|\langle \omega, \theta \rangle|)$ et d'autre part, en utilisant l'inverse $(\pi^*/\sqrt{2\pi})^{-1}$ on obtient la formule $(*)$ de $Q_n(t,r)$ donnée dans (i) du Théorème 1 : $Q_n(t,r) = \frac{1}{\pi^n} \sum_{l \geqslant 0} (2l+n) \times \frac{(l+n-1)!}{l!} \mathrm{e}^{-4tl(l+n)} P^{(n-1,0)}_l(\cos 2r)$.

Pour la preuve de (ii) du Théorème 1, nous établissons pour les polynômes de Jacobi du type $P^{(n-1,0)}_l(\cos 2r)$ intervenants dans le développement de $Q_n(t,r)$ donné par (i) du Théorème 1, la formule de représentation intégrale réelle suivante :

FORMULE INTEGRALE FONDAMENTALE 1. – *Soit* $n \geqslant 1$, *et soit* $P^{(n-1,0)}_l(\cos 2r)$ *le polynôme de Jacobi de degré* l. *Alors, pour* $0 \leqslant r < \frac{\pi}{2}$, *on a la formule de représentation intégrale suivante* :

$$P^{(n-1,0)}_l(\cos 2r) = \frac{l!}{2^{n-2}\pi(l+n-1)!} \int_r^{\pi/2} \frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}} \left(-\frac{1}{\sin u} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n-1} \left(\frac{\sin(2l+n)u}{\sin u}\right). \quad (***)$$

Preuve de (ii) *du Théorème* 1. – En remplaçant les polynômes de Jacobi $P^{(n-1,0)}_l(\cos 2r)$ par leur représentation intégrale donnée ci-dessus dans l'expression de $Q_n(t,r)$ décrite dans (i) du Théorème 1, on obtient :

$$Q_n(t,r) = \frac{1}{2^{n-2}\pi^{n+1}} \int_r^{\pi/2} \frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}} \left(-\frac{1}{\sin u} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n-1}$$

$$\times \frac{1}{\sin u}\left[\sum_{l\geqslant 0} \mathrm{e}^{-4tl(l+n)}(2l+n)\sin(2l+n)u\right].$$

Pour finir on utilise le fait que $(2l+n)\sin(2l+n)u = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cos(2l+n)u$ et l'on a la formule $(**)$:

$$Q_n(t,r) = \frac{1}{2^{n-2}\pi^{n+1}}\int_r^{\pi/2} \frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n\left[\sum_{l\geqslant 0} \mathrm{e}^{-4tl(l+n)}\cos(2l+n)u\right].$$

Ceci termine l'esquisse de la preuve du Théorème 1.

La preuve de la Formule Intégrale Fondamentale est basée sur les trois lemmes suivants :

LEMME 1. – *Soient α, β, l des entiers positifs. Alors on a l'identité suivante* :

$$\sum_{q=0}^{l}(2q+\alpha+\beta+1)\frac{(q+\alpha+\beta)!}{(q+\beta)!}P_q^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(l+\alpha+\beta+1)!}{(l+\beta)!}P_l^{(\alpha+1,\beta)}(x).$$

LEMME 2. – *Pour tout complexe δ et tout entier l positif, on a l'identité suivante* :

$$\sum_{q=0}^{l}\cos(2q+\delta)u = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin(\delta-1)u}{\sin u} + \frac{\sin(2l+\delta+1)u}{\sin u}\right).$$

LEMME 3. – *Soient L l'opérateur différentiel donné par $L = -\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$, $m \geqslant 0$ et L^m l'opérateur composé de L, m fois i.e., $L^m = L \circ L \circ \cdots \circ L$. Alors on a* : $L^m\left(\frac{\sin mu}{\sin u}\right) = 0$.

Preuve de la Formule Integrale Fondamentale. – On procède par récurrence sur n en utilisant les trois lemmes précédents. En effet, pour $n = 1$, l'identité donnée par la Formule Intégrale Fondamentale se réduit à la représentation intégrale de Dirichlet–Murphy pour les polynômes de Legendre $P_q(\cos 2r)$ (cf. [6, p. 235]) :

$$P_q(\cos 2r) = \frac{2}{\pi}\int_r^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\big(\sin(2q+1)u\big)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $n = 2$, on applique le Lemme 1 avec $\alpha = \beta = 0$ et l'on a : $\sum_{q=0}^{l}(2q+1)P_q(x) = (l+1)P_l^{(1,0)}(x)$. Il s'ensuit qu'en combinant les deux relations précédentes on peut exprimer $P_l^{(1,0)}(\cos 2r)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}(l+1)P_l^{(1,0)}(\cos 2r) &= \frac{2}{\pi}\int_r^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\left(\sum_{q=0}^{l}(2q+1)\sin(2q+1)u\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{\pi}\int_r^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)\left(\sum_{q=0}^{l}\cos(2q+1)u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Mais en utilisant le Lemme 2 avec $\delta = 1$, on obtient :

$$(l+1)P_l^{(1,0)}(\cos 2r) = \frac{1}{\pi}\int_r^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)\left(\frac{\sin(2l+2)u}{\sin u}\right)\mathrm{d}u,$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$(l+1)P_l^{(1,0)}(\cos 2r) = \frac{1}{\pi}\int_r^{\pi/2} \frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)\left(\frac{\sin(2l+2)u}{\sin u}\right).$$

Donc la formule intégrale fondamentale est vérifiée pour $n=2$. Supposons qu'on ait établi la formule au rang n :

$$\frac{(q+n-1)!}{q!}P_q^{(n-1,0)}(\cos 2r)=\frac{1}{2^{n-2}\pi}\int_r^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r-\cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n-1}\left(\frac{\sin(2q+n)u}{\sin u}\right).$$

En utilisant à nouveau le Lemme 1 avec $\alpha=n-1$ et $\beta=0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{(l+n)!}{l!}P_q^{(n,0)}(\cos 2r)&=\frac{1}{2^{n-2}\pi}\int_r^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r-\cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n-1}\\&\quad\times\left(\frac{1}{\sin u}\left[\sum_{q=0}^{l}(2q+n)\sin(2q+n)u\right]\right)\\&=\frac{1}{2^{n-2}\pi}\int_r^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r-\cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n}\left(\sum_{q=0}^{l}\cos(2q+n)u\right).\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2 pour $\delta=n$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{(l+n)!}{l!}P_q^{(n,0)}(\cos 2r)\\&\quad=\frac{1}{2^{n-1}\pi}\int_r^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r-\cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n}\left(-\frac{\sin(n-1)u}{\sin u}+\frac{\sin(2l+n+1)u}{\sin u}\right).\end{aligned}$$

et comme on a :

$$\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n}\left(\frac{\sin(n-1)u}{\sin u}\right)=\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)L^{n-1}\left(\frac{\sin(n-1)u}{\sin u}\right)$$

on applique le Lemme 3 et on obtient le résultat, i.e.,

$$\frac{(l+n)!}{l!}P_q^{(n,0)}(\cos 2r)=\frac{1}{2^{n-1}\pi}\int_r^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cos u)}{\sqrt{\cos^2 r-\cos^2 u}}\left(-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{n}\left(\frac{\sin(2l+n+1)u}{\sin u}\right).$$

La représentation intégrale $(***)$ donnée par la formule intégrale fondamentale a lieu pour tout n.

Esquisse de la preuve des lemmes. – Pour le Lemme 1, on procède par récurrence sur l en utilisant la formule suivante [6, p. 213] : $(\alpha+\beta+2l+1)P_l^{(\alpha,\beta)}(x)=(\alpha+\beta+l+1)P_l^{(\alpha+1,\beta)}(x)-(\beta+l)P_{l-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x)$. Pour le Lemme 2, on remplace $\cos(2q+\delta)u$ par $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2q+\delta)u}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2q+\delta)u})$ et en utilisant la formule de la série géométrique on obtient le Lemme 2.

Enfin, le Lemme 3 est vrai pour $m=0$ et $m=1$ et pour $m\geqslant 2$ il suffit de remarquer que $\frac{\sin mu}{\sin u}$ est exactement le polynôme de Gegenbauer $C_{m-1}^{1}(\cos u)$ de degré $m-1$ voir [6, p. 218] et en faisant le changement de variable $x=\cos u$ on voit que $L=-\frac{1}{\sin u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et que : $L^m\left(\frac{\sin mu}{\sin u}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m(C_{m-1}^{1}(x))=0$.

Références bibliographiques

[1] A. Benabdellah, Noyau de diffusion sur les espaces homogènes compacts, Bull. Soc. Math. France 101 (1973) 265–283.

[2] A. Debiard, B. Gaveau, Noyaux de la chaleur pour certaines équations hypergéometriques et application aux espaces symétriques de rang 1, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 303 (17) (1986).

[3] H.R. Fisher, J.J. Jungster, F.L. Williams, The Heat Kernel on the tow-sphere, J. Math. Anal. Appl. 112 (1985) 328–334.

[4] G.B. Folland, Spherical harmonic expansion of the Poisson–Szegö kernel for the ball, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (2) (1975) 401–407.

[5] P.B. Gilkey, J.V. Leahy, J.H. Park, Spinors, Spectral Geometry, and Riemannian Submersions, in: Lecture Note Ser., Vol. 40, 1998. Can also be found online at http://www.emc.dk/EMIS/monographs/GLP/.

[6] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, 3rd enlarged edition, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[7] W. Rudin, Function Theory in Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.