

Un procédé de réduction de la diffusion numérique des schémas à différence de flux d'ordre un pour les systèmes hyperboliques non linéaires

François Alouges^{a,b}, Florian De Vuyst^{c,b}, Gérard Le Coq^b, Emmanuel Lorin^{b,d}

^a Université Paris Sud-Orsay, laboratoire de mathématiques, bât. 425, 91405 Orsay, France

^b Centre de mathématiques et de leurs applications, ENS de Cachan, 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

^c Université de Cergy-Pontoise, département de mathématiques, 33, bd du Port, 95011 Cergy-Pontoise cedex, France

^d CEA-DAM, 91680 Bruyères-le-Châtel, France

Reçu le 17 mai 2002 ; accepté après révision le 23 juillet 2002

Note présentée par Yves Meyer.

Résumé

On présente ici un procédé particulier d'intégration en temps applicable à tout schéma conservatif utilisant un solveur de Riemann exact ou approché. Des réservoirs temporaires de « fluide » se vident quand un nombre CFL caractéristique d'une vitesse de propagation atteint un. La méthode résultante est conservative et consistante. Appliquée à des schémas d'ordre un la diffusion numérique est atténuée, voire annulée dans certains cas. On présente enfin des résultats numériques dans le cadre de la dynamique des gaz parfaits. Pour les expérimentations, on applique le procédé à la méthode d'intersection des courbes de choc proposée initialement par Collela et Glaz. *Pour citer cet article : F. Alouges et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 627–632.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A process of reduction of the numerical diffusion of usual order one Flux Difference Schemes for nonlinear hyperbolic systems

Abstract

We present a particular process of time integration which can be applied to any classical (approximate or exact) Riemann solver. Temporary reservoirs of “fluid” empty up when the CFL number of the corresponding characteristic wave reaches one. The resulting method is both conservative and consistent. When applied to first order methods the numerical diffusion may be very small, and even zero in particular cases. We eventually give numerical results in the case of perfect gas dynamics when using the Riemann solver developed by Collela and Glaz. *To cite this article: F. Alouges et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 627–632.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Adresses e-mail : francois.alouges@math.u-psud.fr (F. Alouges); devuyst@math.u-cergy.fr (F. De Vuyst); glc@cmla.ens-cachan.fr (G. Le Coq); lorin@cmla.ens-cachan.fr (E. Lorin).

Abridged English version

Today's contributions on the design of numerical schemes for approximating solutions of hyperbolic equations mainly deal with achieving a high order of accuracy while preserving properties of stability, conservation, discrete entropy inequalities, etc. This interest can be explained by the fact that the most common high order schemes are still not completely satisfactory (see the recent rigorous comparison of results performed by Liska and Wendroff [5]). On the other hand, in industrial and concrete applications, first order schemes, although easy to implement, are known to produce a too large amount of numerical dissipation, making them bad candidates for the capture of waves (shocks, boundary layers) or the assessment of physical quantities and phenomena (heat flux near walls, turbulence, mixing of mass fronts, reactive layers, choking layer for two-phase flows, etc.).

The aim of this note is to show that this is not completely true. For instance, in the case of pure advection problem with constant propagation velocity a , it is well known that the upwind scheme can lead to very accurate results when the time step is calibrated according to the Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) criterion.

Indeed, using a standard upwind scheme with a CFL number equal to one leads to the exact solution and therefore, although the scheme is first order, no numerical dissipation is created. However, when the idea is tried to be extended to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, one faces the following difficulties:

- First, the speed of propagation is not unique at a point and the Riemann problem for systems of N equations is expected to generate N waves;
- Second, due to nonlinear effects the characteristic velocities of the solution vary in space making appear shock or rarefaction waves.

Clearly, we must achieve a CFL number equal to 1 for each characteristic field, and for each discretization point, otherwise some numerical dissipation will occur on the corresponding wave. The reservoir scheme is an attempt to reach this goal and we give hereafter its main features. In particular, we show that the methodology can be applied to any Riemann solver and will reduce the numerical dissipation. This Note is simply a presentation of the results and the reader is referred to [2] for the full description of the scheme (in particular in the nonlinear case).

1. Introduction

L'écriture de schémas numériques pour les lois de conservation reste un sujet d'actualité. En effet, l'existence de solutions discontinues et le respect au niveau discret de certaines propriétés physiques (conservation, décroissance de l'entropie) rend délicate l'élaboration de méthodes numériques à la fois stables et précises. Des tentatives de schémas d'ordre élevé existent, mais elles ne sont pas satisfaisantes dans tous les cas de figure, si l'on en croit la récente comparaison de Liska et Wendroff [5].

Le but de cette note est d'explorer une voie qui semble-t-il n'a pas été abordée jusqu'à présent. Il est très facile de voir qu'un schéma décentré classique résolvant l'équation d'advection capture la solution exacte lorsque son nombre de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) $a\Delta t/\Delta x$ est exactement égal à 1. Dans ce cas particulier, le schéma numérique ne fait apparaître aucune diffusion numérique et des conditions initiales même irrégulières se propagent identiquement à elles-mêmes. En particulier, le schéma calcule la solution exacte du problème. La généralisation de cette notion à des systèmes d'équations non-linéaires est possible et l'on peut écrire un schéma numérique dont la CFL sur chacune des ondes et en chacun des points du maillage est égale à (ou proche de) 1. La méthodologie apparaît même comme une amélioration de n'importe quel solveur de Riemann (exact ou approché). Elle s'adapte ainsi parfaitement à des solveurs de type Roe [7], VFFC [4], Godunov ou encore le solveur de Riemann développé par Collela et Glaz [3].

Cette Note constitue une rapide description de la méthode et montre quelques résultats sur les équations d'Euler compressibles. Les arguments complets sont développés dans [1,2].

2. L'équation d'advection scalaire

Soit le problème d'advection scalaire

$$\begin{cases} \partial_t v + a \partial_x v = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ v(0, x) = v^0(x), \end{cases} \quad (1)$$

$v^0 \in BV(\mathbb{R})$ dont la solution est donnée par $v(t, x) = v^0(x - at)$ p.p.

A des fins simplificatrices, on suppose que $a > 0$, la donnée initiale v^0 est constante sur chaque maille $[(j - \frac{1}{2})\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta x]$ et on discrétise cette équation par le schéma (d'ordre 1) explicite suivant

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_j^n - v_{j-1}^n), & \forall j, \forall n \geq 0, \\ v_j^0 = v^0(j \Delta x), \end{cases} \quad (2)$$

où v_j^n est une approximation de $v(n\Delta t, j\Delta x)$, Δt et Δx étant respectivement les pas de temps et d'espace du schéma. Ce schéma est connu pour être consistant avec (1) et stable sous la condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

On peut aussi écrire le schéma sous la forme

$$v_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) v_j^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} v_{j-1}^n, \quad \forall j, \forall n \geq 0, \quad (3)$$

faisant apparaître v_j^{n+1} comme une combinaison convexe de v_j^n et de v_{j-1}^n qui représente un mélange et donc une perte d'information (cf. [1]). Ce mélange est inéluctable et fait apparaître de la diffusion numérique (d'ailleurs quantifiable) sauf dans le cas $a\Delta t/\Delta x = 1$ où l'on a simplement

$$v_j^{n+1} = v_{j-1}^n = v_{j-n-1}^0 = v^0((j - n - 1)\Delta x).$$

Le schéma capture ainsi la solution exacte du problème.

Cette remarque va être à la base de l'élaboration de la technique des réservoirs.

3. Le cas du système hyperbolique linéaire

Considérons maintenant le problème hyperbolique linéaire à p équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t V + \partial_x (AV) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ V(x, 0) = V_0(x), \end{cases} \quad (4)$$

avec $V = (v_1, \dots, v_p)$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable dans \mathbb{R} de valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$, $R = \text{col}(r_1, \dots, r_p)$ la matrice des vecteurs propres à droite associés et une donnée initiale $V^0 \in BV(\mathbb{R})$. Remarquons que, par changement de variable $W = R^{-1}V = (w_1, \dots, w_p)$, satisfait le système diagonal suivant

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1 \partial_x w_1 = 0, \\ \vdots \\ \partial_t w_p + \lambda_p \partial_x w_p = 0. \end{cases}$$

On introduit le flux $F(V) = AV$ et l'on cherche une approximation V_j^n de la solution $V(n\Delta t, j\Delta x)$ de (4). On se donne comme suite initiale $V_j^0 = V^0(j\Delta x)$, $j \in \mathbb{Z}$. Sous ces conditions, le schéma décentré classique s'écrit

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi_{j+1/2}^n - \Phi_{j-1/2}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 1,$$

où $\Phi_{j+1/2}$ est le flux numérique interfacial décentré :

$$\Phi_{j+1/2}^n = \frac{F(V_j^n) + F(V_{j+1}^n)}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(A) (F(V_{j+1}^n) - F(V_j^n)),$$

où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est l'opérateur de signe matriciel, c'est-à-dire $\operatorname{sgn}(A) = R \operatorname{diag}_{i=1, \dots, p}(\operatorname{sgn}(\lambda_i)) R^{-1}$. On voit sans difficulté que par changement de variable, le schéma peut aussi s'écrire

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} R^{-1} (\Phi_{j+1/2}^n - \Phi_{j-1/2}^n)$$

avec $W_j^n = R^{-1} V_j^n$ ou encore,

$$\begin{cases} w_{k,j}^{n+1} = w_{k,j}^n - \alpha_k (w_{k,j+1}^n - w_{k,j}^n), & \text{si } \alpha_k < 0, \\ w_{k,j}^{n+1} = w_{k,j}^n - \alpha_k (w_{k,j}^n - w_{k,j-1}^n), & \text{si } \alpha_k \geq 0, \end{cases}$$

avec $\alpha_k = \lambda_k \Delta t / \Delta x$, $k = 1, \dots, p$. Là encore, il est bien connu que ce schéma est ℓ^2 -stable sous la condition CFL

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_p|) \leq 1. \tag{5}$$

Ainsi si l'on choisit Δt tel que $\alpha = 1$, la propagation sera résolue exactement sur les composantes k de W telles que $\alpha_k = 1$ et la diffusion numérique apparaîtra sur toutes les autres.

On souhaiterait pouvoir réaliser des avancées en temps permettant d'obtenir un équivalent du comportement $\alpha_k = 1$, $\forall k = 1, \dots, p$, sur chacun des champs caractéristiques. Pour cela, considérons un pas de temps Δt (son choix est discuté plus loin). On introduit p réservoirs *vectoriels* $R_{1;j}, \dots, R_{p;j} \in \mathbb{R}^p$, associés à la cellule j et des « compteurs CFL » $\alpha_{k;j} \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, p$, tous initialisés à zéro. On note $V_{\text{Riem}}^k(V_j, V_{j+1})$ l'état de la solution du problème de Riemann à l'interface $j + 1/2$ situé entre la k^e et la $(k + 1)^e$ onde, pour $k = 0, \dots, p$. Alors à chaque pas de temps, on répartit les différences de flux courantes dans les réservoirs $R_{k;j}$:

$$\begin{aligned} R_{k;j} &:= R_{k;j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(V_{\text{Riem}}^{k+1}(V_j, V_{j+1})) - F(V_{\text{Riem}}^k(V_j, V_{j+1}))), & \lambda_k < 0, \\ R_{k;j+1} &:= R_{k;j+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(V_{\text{Riem}}^{k+1}(V_j, V_{j+1})) - F(V_{\text{Riem}}^k(V_j, V_{j+1}))), & \lambda_k \geq 0, \end{aligned}$$

(lire « := » comme « devient ») et on incrémente les compteurs CFL respectifs $\alpha_{k;j}$:

$$\alpha_{k;j} := \alpha_{k;j} + |\lambda_k| \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \text{si } \lambda_k < 0 \text{ (ou } \alpha_{k;j+1} := \alpha_{k;j+1} + |\lambda_k| \frac{\Delta t}{\Delta x}, \text{ si } \lambda_k \geq 0).$$

Une fois que l'un des α_k at teint 1, on met à jour la solution numérique et on réinitialise à la fois le réservoir et le compteur k :

$$V_j := V_j + R_{k;j}, \quad c_{k;j} := 0, \quad R_{k;j} := 0.$$

En général, un choix naturel consiste à prendre $\Delta t = \min_{j,k} \{(1 - \alpha_{k;j}) \Delta x / |\lambda_k|\}$. Dans ce cas, le ou les réservoirs correspondant à la plus grande vitesse de propagation se vident à chaque pas de temps tandis que les autres se vident moins fréquemment.

4. Extension au cas non-linéaire et exemples numériques

L’extension de la méthode à des systèmes non-linéaires est naturelle. Il faut néanmoins tenir compte des effets spécifiquement non-linéaires. Si l’on considère par exemple le cas de la dynamique des gaz (équations d’Euler compressibles avec une loi de pression de gaz parfaits), l’écoulement peut présenter des points soniques où une valeur propre change de signe, des ondes de détente ou des discontinuités de contact. Néanmoins, on s’aperçoit que la méthode précédente se généralise (au moins formellement) aux systèmes non-linéaires à condition de pouvoir résoudre le problème de Riemann. En effet, si l’on sait résoudre (de façon exacte ou approchée) le problème de Riemann, on peut alors à tout moment décomposer le problème en ondes qui vont « vers la droite » et « vers la gauche ». De même que pour le système $p \times p$ précédent, chaque onde va permettre d’incrémenter un réservoir (de la cellule de gauche ou de droite suivant son sens de propagation) et le compteur correspondant sera lui incrémenté d’une quantité $c \Delta t / \Delta x$, où c est la vitesse du phénomène considéré (de l’onde s’il s’agit d’un choc ou d’une discontinuité de contact). Pour les détente et les points soniques, un traitement particulier est nécessaire [1] et [2].

En guise d’exemple, on présente des résultats numériques de tube à choc pour les équations d’Euler en hypothèse de gaz parfaits :

$$\partial_t V + \partial_x F(V) = 0,$$

$$V = (\rho, \rho u, \rho E)^t, \quad F(V) = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u)^t, \quad E = \frac{u^2}{2} + e, \quad p = (\gamma - 1)\rho e.$$

Le solveur de Riemann d’origine utilisé dans les tests est celui de l’intersection des courbes de chocs de Colella et Glaz [3]; la détermination d’un chemin le long des courbes de choc est souvent beaucoup plus simple que la résolution complète du vrai problème de Riemann qui nécessite une intégration à travers les ondes de raréfaction. Les conditions initiales sont celles d’un problème de Riemann posé dans un domaine de longueur unité, discrétisé sur 100 points, et où la discontinuité est initialement positionnée en x_0 . On trace la solution au temps final T_f . Les données des différents cas-test (x_0 , γ , T_f et les états de gauche et de droite) sont indiquées dans le Tableau 1. Sur les deux premiers cas-test, une comparaison avec les principales méthodes d’ordre élevé existantes (voir [5] les cas-test Sod et Noh) montre l’apport incontestable des réservoirs. Le dernier cas-test est une version du cas-test « (E) » de [6]. Là encore, malgré la non-linéarité et la raideur du cas-test, le schéma capture la solution exacte et aucune diffusion numérique n’apparaît que ce soit sur les chocs ou sur la discontinuité de contact. Les résultats sont en général meilleurs que ceux obtenus par les méthodes usuelles utilisant même des techniques de montée en ordre (ENO, WENO, etc.). Le lecteur pourra se reporter à [5] pour une comparaison systématique.

Remarquons cependant que la méthode n’est pas directement généralisable en deux dimensions d’espace. Une approche par directions alternées est toutefois envisageable sur un maillage cartésien mais donne des résultats de moins bonne qualité que dans le cas monodimensionnel.

Tableau 1. – Données initiales des cas-test présentés.

Table 1. – Initial data of presented test cases.

Cas-test	ρ_g	u_g	p_g	ρ_d	u_d	p_d	T_f	γ	x_0
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.2	1.4	0.3
2	1	1	10^{-6}	1	-1	10^{-6}	1	5/3	0.5
3	0.01	2200	573	0.14	0	22300	0.001	1.4	0.5

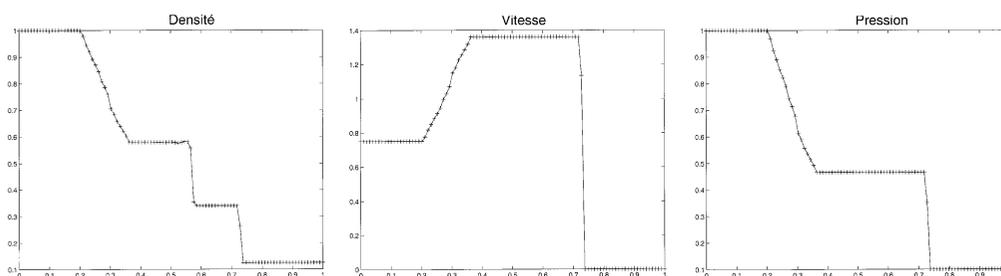


Figure 1. – Cas-test 1, tube à choc de Sod avec un point sonique. Profils de densité, vitesse et pression.
 Figure 1. – Test case 1, shock tube problem with a sonic point. Density, velocity and pressure profiles.

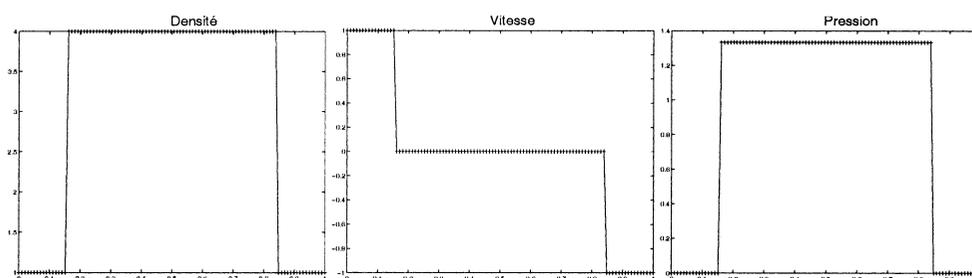


Figure 2. – Cas-test 2, de Noh (cf. [5]).
 Figure 2. – Test case 2, known as Noh problem (see [5]).

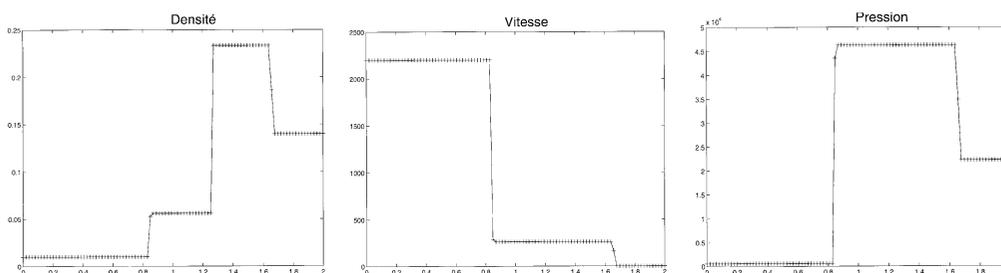


Figure 3. – Cas-test 3, de Montagné, Vinokur et Yee.
 Figure 3. – Test case 3 proposed by Montagne, Vinokur and Yee.

Références bibliographiques

- [1] F. Alouges, F. De Vuyst, G. Le Coq, E. Lorin, The reservoir scheme for systems of conservation laws, in: R. Herbin, D. Kröner (Eds.), Proceedings of the Third Symposium on Finite Volumes for Complex Applications FVCA3, Porquerolles, France, June 2002, 24–28, pp. 261–268, <http://www.cmla.ens-cachan.fr/~devuyst/fvca3/lorin-fvca3.ps>.
- [2] F. Alouges, F. De Vuyst, G. Le Coq, E. Lorin, The reservoir technique: a way to make usual first order flux difference splitting methods zero or low-diffusive, in preparation.
- [3] Collela, Glaz, Efficient solution algorithm for the Riemann problem for real gases, JCP 59 (1985) 264–289.
- [4] J.-M. Ghidaglia, A. Kumbaro, G. Le Coq, Une approche volumes finis à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 322 (1996) 981–988.
- [5] R. Liska, B. Wendroff, Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations, Preprint, 2002, <http://www.math.ntnu.no/conservation/2002/049.html>.
- [6] Montagné, Yee, Vinokur, Comparative study of high-resolution schemes for a real gas, NASA TM100004, 1984.
- [7] P. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, JCP 43 (1981) 357–372.