C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 417–420

Logique/*Logic*

Théories o-minimales avec un automorphisme

Grégory Duby

Université Libre de Bruxelles, service de logique, CP 211, boulevard du Triomphe, 1050 Bruxelles, Belgique

Reçu le 5 juillet 2002 ; accepté le 9 juillet 2002

Note présentée par Jean-Yves Girard.

Résumé Etant donnée une théorie T de langage $\mathcal{L}$, T_σ est la théorie T à laquelle on ajoute les axiomes qui expriment que σ est un $\mathcal{L}$-automorphisme. Nous montrons ici que pour la théorie de $(\mathbb{Z}, \leqslant, s)$ ou pour toute théorie o-minimale ω-catégorique, il existe une expansion par définition naturelle de T_σ admettant un modèle compagnon. ***Pour citer cet article : G. Duby, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 417–420.***

o-minimal theories with an automorphism

Abstract Let T be a theory of language $\mathcal{L}$. Set $T_\sigma = T \cup \{\sigma \text{ is an } \mathcal{L}\text{-automorphism}\}$. We show that if T is the theory of $(\mathbb{Z}, \leqslant, s)$ or if T is o-minimal and ω-categorical then there is a natural expansion by definition of T_σ having a model companion. ***To cite this article: G. Duby, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 417–420.***

Soit T une théorie complète de langage $\mathcal{L}$. Posons $T_\sigma = T \cup \{\sigma \text{ est un } \mathcal{L}\text{-automorphisme}\}$ où σ est un nouveau symbole 1-fonctionnel. On note $\mathcal{L}_\sigma$ le langage de T_σ (i.e. $\mathcal{L} \cup \{\sigma\}$). Dans cette Note, nous montrons que pour certaines théories T o-minimales, il existe une expansion par définition naturelle de T_σ admettant un modèle compagnon. Une théorie ordonnée est dite o-minimale si dans tous ses modèles $(\mathcal{M}, \leqslant, \ldots)$, les sous ensembles définissables de $\mathcal{M}$ sont des unions finies de singletons et d'intervalles du type (a, b) avec a et $b \in \mathcal{M} \cup \{-\infty, \infty\}$. H. Kikyo et S. Shelah ont montré dans [2] que si T est instable, alors T_σ n'admet pas de modèle compagnon. Et donc, a fortiori, si T est o-minimale, le modèle compagnon de T_σ n'existe pas.

Les théories que nous analysons ici sont tout d'abord la théorie $T_1 = Th(\mathbb{Z}, \leqslant, s, s^{-1})$ où s représente la fonction successeur et par la suite toute théorie o-minimale ω-catégorique (notée T_2). Les expansions par définitions de T_σ sont les suivantes :

– pour T_1, on regarde l'expansion décrite ci-dessous où V_η $(\eta \in \mathbb{Z} \cup \{+, -\})$ sont de nouveaux symboles 2-relationnels :

$$T_1 V = \begin{cases} (T_1)_\sigma \\ \forall x, y \quad V_n(x, y) \Leftrightarrow \forall z \in [x, y] \quad s^n(z) = \sigma(z) \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ \forall x, y \quad V_+(x, y) \Leftrightarrow \forall z \in [x, y] \quad z < \sigma(z), \\ \forall x, y \quad V_-(x, y) \Leftrightarrow \forall z \in [x, y] \quad z > \sigma(z) ; \end{cases}$$

Adresse e-mail : gduby@ulb.ac.be (G. Duby).

S1631-073X(02)02511-6/FLA

– pour les théories T_2, on s'intéressera à l'expansion suivante où V_+, V_-, $V_=$ et V sont de nouveaux symboles 2-relationnels :

$$T_2V = \begin{cases} (T_2)_\sigma \\ \forall x, y \quad V_+(x, y) \Leftrightarrow \forall z \in [x, y] \quad z < \sigma(z), \\ \forall x, y \quad V_-(x, y) \Leftrightarrow \forall z \in [x, y] \quad z > \sigma(z), \\ \forall x, y \quad V_=(x, y) \Leftrightarrow x = \sigma(x) \wedge [x, y] \text{ est fini}, \\ \forall x, y \quad V(x, y) \Leftrightarrow V_+(x, y) \vee V_=(x, y) \vee V_-(x, y). \end{cases}$$

Avant de continuer, je précise que, dans cette Note, la notation $[a, b]$ représente l'ensemble des éléments se trouvant entre a et b. En particulier, $[a, b]$ n'implique pas que $a \leqslant b$. Remarquez aussi que, dans T_2V, la condition « $[x, y]$ est fini » est du première ordre car T_2 est ω-catégorique.

1. Le cas des entiers munis de l'ordre

Avant d'énoncer le théorème, je rappelle que T_1 n'est pas ω-catégorique car, par exemple, il existe un nombre infini de 2-types engendrés par les formules $x_2 = s^n(x_1)$ ($n \in \mathbb{Z}$). C'est d'ailleurs à cause de ces formules que l'expansion par définition T_1V comporte un nombre infini de nouveaux symboles. Je signale aussi que T_1 admet l'élimination des quanteurs dans le langage $\{\leqslant, s, s^{-1}\}$ et que si A est une sous-structure d'un modèle $\mathcal{M}$ de T_1 alors elle est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$.

THÉORÈME 1.1. – *La théorie T_1VA décrite ci-dessous est le modèle compagnon de T_1V. De plus, elle admet l'élimination des quanteurs dans le langage* $\{\leqslant, s, s^{-1}, \sigma, V_\eta(\eta \in \mathbb{Z} \cup \{+, -\})\}$.

$$T_1VA = \begin{cases} T_1V \\ \textit{pour tout } \eta \in \mathbb{Z} \cup \{+, -\} \textit{ et tout entier } m, \\ \quad \forall x, y \quad V_\eta(x, x) \wedge \neg V_\eta(x, y) \Rightarrow \exists z \in [x, y] \quad V_m(z, z), \\ \quad \forall x \quad V_\eta(x, x) \Rightarrow \exists z \quad x < z \wedge \neg V_\eta(x, z), \\ \quad \forall x \quad V_\eta(x, x) \Rightarrow \exists z \quad z < x \wedge \neg V_\eta(x, z). \end{cases}$$

Rappelons qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T_1 est isomorphe à un ordre lexicographique de la forme $I \times \mathbb{Z}$, la fonction s étant définie par $s(i, n) = s(i, n+1)$. L'automorphisme σ induit alors une permutation de I. Si $n \in \mathbb{Z}$, nous dirons qu'un élément $x \in \mathcal{M}$ est de couleur n s'il satisfait $V_n(x, x)$. Si $\eta \in \{+, -\}$, nous dirons que x est de couleur η s'il satisfait $V_\eta(x, x)$ et ne satisfait aucun des $V_n(x, x)$, $n \in \mathbb{Z}$. Nous avons donc partitionné notre ensemble $\mathcal{M}$ en sous-ensembles de couleurs $\eta \in \mathbb{Z} \cup \{+, -\}$. Comme σ est un automorphisme qui respecte l'ordre, nous avons $V_\eta(x, y) \Leftrightarrow V_\eta(x, \sigma(y))$. Et donc, chaque relation V_η définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des points de couleur η, et les classes de cette relation sont stables par σ, σ^1, s et s^{-1}, et sont convexes. De plus, la structure induite sur chaque V_η-classe est celle d'un modèle de T_1 muni d'un automorphisme σ, qui égale s^n si $\eta = n \in \mathbb{Z}$ (et est donc définissable dans le langage de T_1), ou bien satisfait $x < \sigma(x)$ si $\eta = +$, et $\sigma(x) < x$ si $\eta = -$.

Soit $V(x, y)$ la relation d'équivalence définie par : $V(x, y)$ si et seulement si le segment $[x, y]$ est monochrome (si et seulement si x et y sont de la même couleur η et satisfont V_η). Comme pour les relations V_η, les V-classes sont des convexes stables par σ, σ^{-1}, s et s^{-1}. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T_1V. Nous définissons un ordre coloré sur le quotient de $\mathcal{M}$ par V en prenant pour ordre, l'ordre induit par $\mathcal{M}$ et comme couleurs, les couleurs des classes de V.

Supposons maintenant que $\mathcal{M}$ soit un modèle de T_1VA. Alors, dans l'ordre coloré induit sur le quotient, les éléments de couleurs n sont denses, cofinaux et coinitiaux pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si, de plus, $\mathcal{M}$ est ω-saturé, les éléments de couleur $+$ et de couleur $-$ sont aussi denses, cofinaux et coinitiaux.

Avant de commencer la preuve je tiens encore à préciser qu'un modèle $(\mathcal{M}, \sigma)$ de T_σ est existentiellement clos dans la clase des modèles de T_σ si et seulement si quand on regarde son expansion en un modèle de T_1V, c'est un modèle de T_1VA dont chaque V-classe est la fermeture convexe d'une orbite de σ. Cette dernière condition n'est évidemment pas stable par ultraproduit.

Démonstration. – Nous devons à la fois montrer que T_1VA admet l'élimination des quanteurs et qu'elle est une compagne de T_1V. Pour cette deuxième partie, il suffit de vérifier que tout modèle de T_1V peut s'étendre en un modèle de T_1VA car $T_1V \subseteq T_1VA$. Nous laissons le soin au lecteur de prouver cette deuxième partie.

Pour l'élimination des quanteurs, nous allons procéder par la méthode du va-et-vient (*voir* par exemple [4]). Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T_1VA avec $\mathcal{N}$ ω-saturé. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux n-uples provenant de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement, et $f : \bar{a} \mapsto \bar{b}$ un isomorphisme local. Nous devons montrer que, pour tout $\alpha \in \mathcal{M}$, il existe $\beta \in \mathcal{N}$ tel que $f \cup \{(\alpha, \beta)\}$ est un isomorphisme local. Avant de commencer, nous étendons f à $\langle \bar{a} \rangle$ où $\langle \bar{a} \rangle$ est la sous-structure engendrée par $\bar{a}$ dans $\mathcal{M}$ pour le langage $\{\leqslant, s^{\pm 1}, \sigma^{\pm 1}, V_\eta (\eta \in \mathbb{Z} \cup \{+, -\})\}$.

Si α est dans $\langle \bar{a} \rangle$ alors c'est trivial. Supposons donc que $\alpha \notin \langle \bar{a} \rangle$.

- Il n'existe aucun élément de $\bar{a}$ équivalent à α pour V.

Posons $\bar{a} = \bar{a}_- \cup \bar{a}_+$ où $\bar{a}_- < \alpha < \bar{a}_+$ ($\bar{a}_-$ ou $\bar{a}_+$ peuvent être vide). Supposons que α soit de couleur η. Comme $\mathcal{N}$ est un modèle ω-saturé de T_1VA, il existe un β de couleur η se trouvant entre $f(\bar{a}_-)$ et $f(\bar{a}_+)$ et non-équivalent (pour V) à tout $f(a) \in f(\bar{a})$. Nous avons tout de suite que $f \cup \{(\alpha, \beta)\}$ est un isomorphisme local.

- Il existe a' dans $\bar{a}$ tel que a' et α soient équivalents pour V.

Soit A l'ensemble des éléments de $\langle \bar{a} \rangle$ en relation avec α pour V. Posons $A = A_- \cup A_+$ où $A_- < \alpha < A_+$. Par saturation de $\mathcal{N}$, il existe un $\beta \in \mathcal{N}$ tel que $f(A_-) < \beta < f(A_+)$ et β soit dans la V-classe de $f(a')$. Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \bar{a}$ nous avons $\sigma^m s^n(\alpha) < a \Leftrightarrow \sigma^{-m} s^{-n}(a) \in A_+$, ce qui montre que $f \cup \{(\alpha, \beta)\}$ est un isomorphisme local. $\square$

Ce théorème se généralise aux théories de $(\omega, \leqslant, s, s^{-1}, 0)$ et de $(\mathbb{Z}, \leqslant, s, s^{-1}, -)$ où $-$ représente la fonction $x \mapsto -x$. Par exemple, pour $T_1' = Th(\omega, \leqslant, s, s^{-1}, 0)$, on prend comme expansion $T_1'V$ la théorie T_1V dans laquelle on remplace $(T_1)_\sigma$ par $(T_1')_\sigma$ et pour son modèle compagnon, on prend la théorie T_1VA dans laquelle on échange T_1V avec $T_1'V$ et où on retire le dernier schéma d'axiomes $\forall x\ V_\eta(x, x) \Rightarrow \exists z\ z < x \wedge \neg V_\eta(x, z)$ pour le remplacer par $\forall x\ V_\eta(x, x) \wedge \neg V_=(x, 0) \Rightarrow \exists z\ z < x \wedge \neg V_\eta(x, z)$.

2. Le cas des théories o-miniales et ω-catégoriques

Avant de passer au théorème central de cette section, je mentionne ci-dessous la caractérisation des théories o-minimales ω-catégoriques de A. Pillay et C. Steinhorn provenant de [3]. Cette caractérisation simplifie grandement la preuve du Théorème 2.2.

THÉORÈME 2.1. – *Soit T une théorie o-minimale ω-catégorique et soit $\mathcal{M}$ son modèle dénombrable. Alors, il existe*

(i) *un ensemble fini d'éléments définissables sans paramétres $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq \mathcal{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ tel que $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ et pour tout $j \in [1, n]$ soit $I_j = (c_{j-1}, c_j)$ est vide, soit c'est un ordre dense sans premier ni dernier élément,*

(ii) *une relation d'équivalence $E \subseteq I^2$ où $I = \{j \mid I_j \neq \emptyset\}$ telle que pour chaque paire $(i, j) \in E$, il existe une bijection monotone définissable $f_{i,j} : I_i \mapsto I_j$ et telle que $f_{i,i}$ est l'identité et $f_{i,j} \circ f_{j,k} = f_{i,k}$ pour toutes paires (i, j) et $(j, k) \in E$,*

tels que T admet l'élimination des quanteurs dans le langage $\{\leqslant\} \cup \{c_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{f_{i,j} \mid (i, j) \in E\}$.

THÉORÈME 2.2. – *Soit T_2 une théorie o-minimale ω-catégorique admettant l'élimination des quanteurs dans le langage $\mathcal{L}$. Alors, la théorie T_2VA décrite ci-dessous est le modèle compagnon de T_2V. De plus,* *elle admet l'élimination des quanteurs dans le langage* $\mathcal{L}_\sigma \cup \{V_+, V_-, V_=, V\}$.

$$T_2VA = \begin{cases} T_2V \\ \forall x, y \quad \neg V(x, y) \Rightarrow \exists z \in [x, y]\ V_+(z, z), \\ \forall x, y \quad \neg V(x, y) \Rightarrow \exists z \in [x, y]\ V_-(z, z), \\ \forall x, y \quad \neg V(x, y) \Rightarrow \exists z \in [x, y]\ V_=(z, z). \\ \textit{Pour tout intervalle ouvert infini } I \textit{ définissable sur le vide,} \\ \quad \forall x \in I\ \exists z_0, z_1 \in I\ (z_0 < x < z_1) \wedge \neg V(x, z_0) \wedge \neg V(x, z_1). \end{cases}$$

En fait, ce résultat reste valable si on se place dans le langage $\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_\sigma \cup \{V\}$ c'est-à-dire que $TVA \upharpoonright_{\mathcal{L}_V}$ admet l'élimination des quanteurs et est le modèle compagnon de $TV \upharpoonright_{\mathcal{L}_V}$. Tout ceci est dû au fait que les symboles V_+, V_- et $V_=$ sont définissables dans $TV \upharpoonright_{\mathcal{L}_V}$ par des combinaisons booléennes de formules atomiques.

Comme corollaire immédiat du Théorème 2.1, nous avons que si $\mathcal{L}$ est fini, alors T_2VA est finiment axiomatisable.

Avant de donner la preuve du Théorème 2.2, remarquez que tout comme dans le cas T_1, la relation V est une relation d'équivalence dont les classes sont des convexes stables par σ et σ^{-1}. Supposons maintenant que T_2 soit simplement la théorie des ordres denses sans extremités. Nous dirons qu'une V-classe $[x]$ est de couleur $\eta \in \{+, -, =\}$, si nous avons $V_\eta(x, x)$. Un modèle de T_2VA est un modèle de T_2V dans lequel les trois couleurs sont coinitiales et cofinales et tel que entre toute paire d'éléments non-equivalents pour V il existe un élément de couleur η pour tout $\eta \in \{+, -, =\}$.

Démonstration. – Soit T une théorie o-minimale ω-catégorique éliminant les quanteurs dans le language $\mathcal{L}$. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que $\mathcal{L}$ est le langage décrit dans le Théorème 2.1. En appliquant de nouveau le Théorème 2.1, nous pouvons nous ramener facilement au cas où $T_2 = Th(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

La preuve par va-et-vient que T_2VA admet l'élimination des quanteurs se ramène maintenant aux deux problèmes suivants :

Fait 1. Soit $(I, P_\eta, \leqslant)_{\eta \in \mathbb{Z} \cup \{+,-\}}$ un ordre dense sans extrémités, les P_η formant une partition de I, et chaque P_η étant dense, cofinal et coinitial dans I. Alors l'ensemble des isomorphismes partiels de I de domaine fini a la propriété du va-et-vient.

Fait 2. Soit $(I, \leqslant, \sigma)$, un ordre dense sans extrémités, avec un automorphisme σ satisfaisant $\forall x\ x \leqslant (x)$. Alors l'ensemble des isomophismes partiels de I de domaine fini a la propriété du va-et-vient. □

Il est très tentant de vouloir étendre ces résultats à toutes les théories o-minimales. Hélas, ceci n'est pas toujours possible. On peut montrer que pour la théorie de $(\mathbb{R}, \leqslant, .q)$ (où $.q$ est la multiplication scalaire par le réel non nul q) avoir une relation d'équivalence V infiniment définissable (par formules atomiques) dont les classes sont closes par σ ne suffit plus à prouver l'existence d'un modèle compagnon. Et de plus, ce comportement négatif peut être reproduit avec les théories des corps réels clos et des groupes ordonnés abéliens divisibles et ainsi que dans la plupart des théories o-minimales. D'un autre coté, il est possible d'obtenir des résultats positifs si on suppose que T est une théorie d'ordre ω-catégorique (*voir* [1]).

Références bibliographiques

[1] G. Duby, Model companions of theories of ω-categorical colored orders with an automorphism, en préparation.
[2] H. Kikyo, S. Shelah, The strict order property and generic automorphisms, J. Symbolic Logic 67 (1) (2002) 214–216.
[3] A. Pillay, C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures. I, Trans. Amer. Math. Soc. 295 565–592.
[4] B. Poizat, Cours de Théories des modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.