C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 525–528

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Hypersurfaces compactes d'un fibré vectoriel riemannien à courbure moyenne prescrite

Pascal Cherrier [a], **Abdellah Hanani** [b]

[a] Université de Paris VI, UFR 920 de Mathématiques, B.C. 172, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

[b] Université de Lille I, UFR de Mathématiques – bât. M2, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 25 mars 2002 ; accepté le 9 juillet 2002

Note présentée par Thierry Aubin.

Résumé Soient M une variété riemannienne compacte, E un fibré vectoriel riemannien sur M et Σ le sous-fibré unitaire de E. On détermine des plongements de Σ dans E dont on prescrit des courbures moyennes de divers types. ***Pour citer cet article : P. Cherrier, A. Hanani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 525–528.***

Compact hypersurfaces of a Riemannian vector bundle with prescribed mean curvature

Abstract Let M be a compact Riemannian manifold, E a Riemannian vector bundle on M and Σ the sphere subbundle of E. We look for embeddings of Σ into E admitting prescribed mean curvatures of various types. ***To cite this article: P. Cherrier, A. Hanani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 525–528.***

1. Notations

Dans cette Note, on désigne par (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord, de dimension $n \geqslant 1$, et par ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g). Soient $(E, \tilde{g})$ un fibré vectoriel riemannien sur M de rang $m \geqslant 2$, Σ le fibré unitaire correspondant, E_* le fibré E privé de la section nulle, et $\widetilde{\nabla}$ une connexion métrique sur $(E, \tilde{g})$. On note ν le champ radial unitaire : $\nu(\xi) = \|\xi\|^{-1}\xi$ pour tout $\xi \in E_*$, et r la fonction $r(\xi) = \|\xi\|$.

Soient U un ouvert de M muni de coordonnées $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de ∇ : $\nabla_{\varepsilon_i}\varepsilon_j = \Gamma_{ij}^k\varepsilon_k$. Soit $(s_\alpha)_{n+1\leqslant\alpha\leqslant n+m}$ un repère de sections de E au dessus de U. π désignant la projection de E sur M, si $\xi \in \pi^{-1}(U)$ et $x = \pi(\xi)$, on écrit $\xi = y^\alpha s_\alpha(x)$; $(x^i, y^\alpha)_{i,\alpha}$ est alors un système de coordonnées sur $\pi^{-1}(U)$. Notons $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ les symboles de Christoffel de $\widetilde{\nabla}$ définis par $\widetilde{\nabla}_{\varepsilon_i}s_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta$. Le relèvement horizontal e_i de ε_i est donné par $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - y^\alpha\Gamma_{i\alpha}^\beta\frac{\partial}{\partial y^\beta}$. Si $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $\{e_i, e_\alpha\}_{i,\alpha}$ est un repère mobile tangent à $\pi^{-1}(U)$. Les champs e_α (resp. e_i) engendrent le sous-fibré vertical (resp. horizontal) du

Adresses e-mail : cherrier@ccr.jussieu.fr (P. Cherrier); hanani@agat.univ-lille1.fr (A. Hanani).

S1631-073X(02)02500-1/FLA

fibré tangent à $\pi^{-1}(U)$. On définit sur E une métrique riemannienne G en posant

$$G(e_i, e_j) = g(\varepsilon_i, \varepsilon_j), \quad G(e_\alpha, e_\beta) = \tilde{g}(e_\alpha, e_\beta), \quad G(e_i, e_\alpha) = 0,$$

où on identifie tout vecteur vertical à un point de E. Cette définition précise la dépendance de G en $\widetilde{\nabla}$.

Sur la variété E, on dispose alors de la connexion D' de Levi-Civita associée à la métrique G et de la connexion D de Sasaki [5] dans laquelle, pour des raisons techniques, sont effectués les calculs. On a

$$D_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad D_{e_i} e_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta e_\beta, \quad D_{e_\alpha} e_i = D_{e_\alpha} e_\beta = 0.$$

D est compatible avec G ; sa torsion dépend, tout comme le tenseur $D' - D$, de la courbure de $\widetilde{\nabla}$, cf. [5].

Enfin, μ_a étant égal à 0 ou 1 selon que la direction a est verticale ou horizontale, si $u \in C^\infty(E)$, on note $\widetilde{D}_a u = \mathrm{e}^{\mu_a u} D_a u$, $\widetilde{D}_{ab} u = \mathrm{e}^{(\mu_a+\mu_b)u} D_{ab} u$ et

$$v(u) = r^2 v_1(u) + \mathrm{e}^{2u} v_2(u), \quad v_1(u) = (1 - \mu_a) D_a u D^a u, \quad v_2(u) = \mu_a D_a u D^a u.$$

2. Problème de la courbure moyenne prescrite

Il s'agit de déterminer un plongement $\mathcal{Y}$ de Σ dans E_* admettant une courbure moyenne prescrite égale à K, fonction C^∞ donnée sur E_*, et définie comme la trace de la seconde forme fondamentale relativement à la métrique. On cherche $\mathcal{Y}$ sous la forme d'un graphe radial construit sur Σ, i.e. comme application de Σ dans E_* du type $\xi \mapsto \mathrm{e}^{u(\xi)}\xi$, où $u \in C^\infty(\Sigma)$ est une fonction inconnue qu'on prolonge à E_* en la maintenant radialement constante. Notons $A^{ab}(u) = [1 + v(u)]G^{ab} - \widetilde{D}^a u \widetilde{D}^b u$; u doit vérifier sur Σ l'équation elliptique suivante :

$$A^{ab}(u)\widetilde{D}_{ab} u = -\mathrm{e}^{2u} v_2(u) + (m-1)\bigl[1 + v(u)\bigr] - \bigl[1 + v(u)\bigr]^{3/2} \mathrm{e}^u K(\mathrm{e}^u \xi). \tag{1}$$

Dans le cadre euclidien, i.e. quand M est réduite à un point, un théorème de Bakelman et Kantor [2] assure en dimension 3 l'existence d'une telle hypersurface sous la condition que la fonction K décroît plus vite que la courbure moyenne de sphères concentriques (cf. hypothèse (3) ci-dessous), jointe à l'hypothèse de monotonicité

$$\frac{\partial[\rho K(\rho\xi)]}{\partial\rho} \leqslant 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \Sigma. \tag{2}$$

Une autre preuve, valable en toute dimension, est donnée par Treibergs et Wei [4] sous les conditions précédentes.

Dans le cadre des fibrés envisagés ici, des méthodes différentes de celles des auteurs précités s'imposent. En effet, dans l'équation (1), les dérivées de u sont pondérées par des puissances de e^u dont le degré varie de 0 à 4. Ceci complique radicalement l'obtention de la cruciale estimée C^1.

THÉORÈME 1. – *Soit K une fonction continue sur E_* telle que $0 < K(\xi) = K(\|\xi\|)$ pour tout $\xi \in E_*$. Alors, il existe un graphe radial $\mathcal{Y}$ sur Σ, de classe C^∞, à courbure moyenne égale à K, si et seulement si, pour une valeur $r > 0$, $K(r\xi) = (m-1)r^{-1}$ quel que soit $\xi \in \Sigma$.*

On généralise ce résultat comme suit :

THÉORÈME 2. – *Soit $K \in C^\infty(E_*)$ une fonction partout strictement positive. On fait l'hypothèse qu'il existe deux réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 \leqslant 1 \leqslant r_2$ et*

$$\begin{aligned} K(\xi) &> (m-1)\|\xi\|^{-1} \quad \textit{si } \|\xi\| < r_1, \\ K(\xi) &< (m-1)\|\xi\|^{-1} \quad \textit{si } \|\xi\| > r_2. \end{aligned} \tag{3}$$

On suppose aussi que K vérifie (2) *en tout point de* $\Sigma_{r_1,r_2} = \{\xi \in E;\ r_1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r_2\}$ *et que la composante horizontale de son gradient y est partout nulle. Il existe alors un graphe radial* $\mathcal{Y}$ *sur* Σ *dont la courbure moyenne est donnée par* K. $\mathcal{Y}$ *est de la forme* $\xi \in \Sigma \mapsto \mathrm{e}^{u(\xi)}\xi$, *où* $u \in C^\infty(\Sigma)$ *est une fonction à gradient horizontal identiquement nul.*

Démonstration. – Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$ et tout réel $\alpha \in]0,1[$, on note par $A^{k,\alpha}(\Sigma)$ l'ensemble des fonctions $u \in C^{k,\alpha}(\Sigma)$ dont la composante horizontale du gradient est identiquement nulle. Pour tout $w \in A^{1,\alpha}(\Sigma)$ et tout $t \in [0,1]$, on montre d'abord que l'unique solution, notée $T_t w = u_t$, de l'équation

$$\sum_{n+1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n+m-1} B^{\alpha\beta}(w) D_{\alpha\beta} u - u = t\left[-w + (m-1)\left[1 + v_1(w)\right] - \left[1 + v_1(w)\right]^{3/2} \mathrm{e}^w K(\mathrm{e}^w \xi)\right],$$

où $B^{\alpha\beta}(w) = [1 + v_1(w)]G^{\alpha\beta} - D^\alpha w D^\beta w$, est dans $A^{2,\alpha}(\Sigma)$. On ramène ainsi l'estimée $C^{1,\alpha}$ de toute solution de $u_t - T_t u_t = 0$ à une estimation a priori de la composante verticale du gradient. Celle-ci est établie en utilisant la fonctionnelle $\Gamma(u) = [1 + v_1(u)]\exp(lu)$. On applique alors un argument de degré pour conclure à l'existence d'une solution $u \in A^{2,\alpha}(\Sigma)$ de

$$\sum_{n+1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n+m-1} B^{\alpha\beta}(u) D_{\alpha\beta} u = (m-1)\left[1 + v_1(u)\right] - \left[1 + v_1(u)\right]^{3/2} \mathrm{e}^u K(\mathrm{e}^u \xi).$$

La nullité du gradient horizontal implique que u est une solution de (1). $\square$

Pour une fonction K quelconque, on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. – *Soit* $K \in C^\infty(E_*)$ *une fonction* > 0 *vérifiant l'hypothèse de croissance* (3) *du Théorème* 2. *Alors, il existe un graphe radial* $\mathcal{Y}$ *sur* Σ, *de classe* C^∞, *dont la courbure moyenne est donnée par* K *et tel que* $r_1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r_2$ *pour tout* $\xi \in \mathcal{Y}$.

Démonstration. – On note $\Sigma' = \{\xi \in E;\ 1 \leqslant \|\xi\| \leqslant 2\}$. Soient $\alpha \in]0,1[$ et $w \in B^{2,\alpha}(\Sigma')$, où $B^{2,\alpha}(\Sigma')$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $C^{1,\alpha}$ sur Σ' admettant une dérivée radiale seconde $\in C^{0,\alpha}(\Sigma')$. On désigne par w_1 la restriction de w à Σ que l'on prolonge en une fonction radialement constante. On note

$$F(w) = -\mathrm{e}^{2w_1} v_2(w_1) + (m-1)\left[1 + v(w_1)\right] - \left[1 + v(w_1)\right]^{3/2} \mathrm{e}^{w_1} K\left(\mathrm{e}^{w_1}\|\xi\|^{-1}\xi\right),$$
$$A^{ab}(w) = \left[1 + v(w_1)\right] G^{ab} - r^{2-\mu_a-\mu_b}\,\mathrm{e}^{(\mu_a+\mu_b)w_1} D^a w_1 D^b w_1,$$

et $B(w) = (m-1)[1 + v(w_1)] - r^2 v_1(w_1)$. Si $t \in [0,1]$ et $w \in B^{2,\alpha}(\Sigma')$, on désigne par $u_t = T_t w$ l'unique solution du problème de Neumann

$$\begin{cases} D_{\nu\nu} u + A^{ab}(w) r^2 (r^{-1}\mathrm{e}^{w_1})^{(\mu_a+\mu_b)} D_{ab} u + \mu_a \ln(r)\,\mathrm{e}^{2\mu_a w_1} D^a_a u - u & \\ \quad = D_{\nu\nu} w + r B(w) D_\nu w - t\left[w_1 - F(w) + \beta\ln(r)\left[v(w_1)\right]^{1/2}\right] & \text{dans } \Sigma', \\ D_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Sigma', \end{cases}$$

où β est un réel > 0 assez grand. On montre que toute solution d'une équation de la forme $u_t - T_t u_t = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, est radialement constante. Il s'agit ensuite d'estimer ces points fixes éventuels u_t dans $C^1(\Sigma)$. Par dérivation radiale et restriction à Σ de l'équation satisfaite par u_t sur Σ', on parvient à un contrôle du laplacien horizontal de u_t. On peut alors obtenir l'estimée C^1 visée en usant de la fonctionnelle $\Gamma(u) = [1 + v(u)]\exp(-ku)$. $\square$

3. Courbures moyennes verticale et horizontale prescrites

La géométrie du fibré ambiant permet de définir d'autres notions de courbure moyenne pour les graphes radiaux $\mathcal{Y}$.

Si $x \in M$ et si $\xi \in \mathcal{Y}_x = E_x \cap \mathcal{Y}$, la courbure moyenne verticale de $\mathcal{Y}$ au point ξ est la courbure moyenne en ξ de la fibre $\mathcal{Y}_x$ considérée comme hypersurface de E_x. Chercher un graphe $\xi \mapsto e^{u(\xi)}\xi$ à courbure moyenne verticale prescrite K revient à résoudre sur Σ l'équation elliptique dégénérée suivante :

$$\sum_{n+1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant n+m-1} B^{\alpha\beta}(u) D_{\alpha\beta} u = (m-1)\big[1 + v_1(u)\big] - \big[1 + v_1(u)\big]^{3/2} e^u K(e^u \xi),$$

où on note $B^{\alpha\beta}(u) = [1 + v_1(u)]G^{\alpha\beta} - D^\alpha u D^\beta u$. On établit alors les résultats suivants :

THÉORÈME 4. – *Soit $K \in C^\infty(E_*)$ une fonction telle que $0 < K(\xi) = K(\pi(\xi))$ pour tout ξ. Il existe alors un graphe radial à courbure moyenne verticale égale à K.*

THÉORÈME 5. – *Soit $K \in C^\infty(E_*)$ une fonction partout strictement positive. On suppose qu'il existe deux réels r_1 et r_2, $0 < r_1 \leqslant 1 \leqslant r_2$, tels que les inégalités* (3) *soient satisfaites. Il existe alors un graphe radial $\mathcal{Y}$ à courbure moyenne verticale donnée par K, et tel que $r_1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r_2$ pour tout $\xi \in \mathcal{Y}$.*

Remarquons qu'au Théorème 4, l'hypothèse (2) n'est pas satisfaite et qu'au Théorème 5, elle n'est pas requise.

Si $\xi \in E_*$, les n vecteurs $e_i(\xi)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, forment une base du sous-espace horizontal $H_\xi E$ de $T_\xi E$. Au point $\mathcal{Y}(\xi)$ du graphe $\mathcal{Y} : \xi \in \Sigma \mapsto e^{u(\xi)}\xi$, les n vecteurs $w_i = D\mathcal{Y}(e_i)$ forment une base du sous-espace $D\mathcal{Y}(H_\xi E) = \mathcal{H}_{\mathcal{Y}(\xi)}\mathcal{Y}$ de $T_{\mathcal{Y}(\xi)}\mathcal{Y}$. Notons $\tilde{\nu}(\mathcal{Y}(\xi))$ l'orthogonal unitaire de $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}(\xi)}\mathcal{Y}$ dans $H_{\mathcal{Y}(\xi)}E \oplus \mathbb{R}\nu(\mathcal{Y}(\xi))$. Les composantes de la seconde forme fondamentale horizontale L sont définies par

$$L(w_i, w_j) = G(D_{w_i}\tilde{\nu}, w_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

La courbure moyenne horizontale de $\mathcal{Y}$ au point $\mathcal{Y}(\xi)$ est alors la trace de L relativement à la métrique induite par G sur $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}(\xi)}\mathcal{Y}$. L'existence d'un graphe radial $\mathcal{Y}$ à courbure moyenne horizontale donnée par une fonction K revient à résoudre sur Σ l'équation elliptique dégénérée suivante :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} C^{ij}(u) D_{ij} u = -v_2(u) - \big[1 + e^{2u} v_2(u)\big]^{3/2} e^{-u} K(e^u \xi),$$

où on note $C^{ij}(u) = [1 + e^{2u} v_2(u)]G^{ij} - e^{2u} D^i u D^j u$. L'équation ci-dessus ne peut admettre une solution si la fonction K est partout strictement positive ou partout strictement négative ; cette remarque justifie les hypothèses du résultat suivant :

THÉORÈME 6. – *Soit $K \in C^\infty(E_*)$. On suppose qu'il existe deux réels r_1 et r_2, $0 < r_1 \leqslant 1 \leqslant r_2$, tels que $K(\xi) > 0$ si $\|\xi\| < r_1$ et $K(\xi) < 0$ si $\|\xi\| > r_2$. Alors, il existe un graphe radial $\mathcal{Y}$ à courbure moyenne horizontale donnée par K, et tel que $r_1 \leqslant \|\xi\| \leqslant r_2$ pour tout $\xi \in \mathcal{Y}$.*

Références bibliographiques

[1] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1965.
[2] I. Bakelman, B. Kantor, Existence of spherically homeomorphic hypersurfaces in Euclidean space with prescribed mean curvature, Geometry and Topology, Leningrad 1 (1974) 3–10.
[3] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, 1977.
[4] A.E. Treibergs, S.W. Wei, Embedded hypersurface with prescribed mean curvature, J. Differential Geom. 18 (1983) 513–521.
[5] K. Yano, S. Ishihara, Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker, New York, 1973.