

Demi-isomorphie, autodualité et tournois non fortement connexes finis

Moncef Bouaziz^a, Youssef Boudabbous^b

^a Faculté des sciences de Tunis, département de mathématiques, Elmanar II 2092, Tunisie

^b Al-Jouf Technical College, P.O. Box 1642, Sakaka, Al-Jouf, Saudi Arabia

Reçu le 26 juin 2002 ; accepté le 9 juillet 2002

Note présentée par Jean-Yves Girard.

Résumé

Soient $T = (S, A)$ un tournoi fini à n sommets et F un ensemble d'entiers positifs $\leq n$. Le dual de T est le tournoi $T^* = (S, A^*)$ défini par : pour tous $x, y \in S$, $(y, x) \in A^*$ si et seulement si $(x, y) \in A$. A chaque partie X de S est associé le sous-tournoi $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de T induit par X . Le tournoi T est fortement connexe si pour tous $x, y \in S$, avec $x \neq y$, il existe une suite $x_0 = x, \dots, x_p = y$ telle que pour $i \in \{0, \dots, p-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$. Un demi-isomorphisme de T sur un tournoi T' est soit un isomorphisme de T sur T' soit un isomorphisme de T^* sur T' . Un tournoi T' , ayant le même ensemble de sommets S que T , est F -demi-isomorphe à T lorsque pour toute partie X de S telle que $|X| \in F$, les sous-tournois $T(X)$ et $T'(X)$ sont demi-isomorphes. Nous étudions la $\{3, n-2\}$ -demi-isomorphie et la $\{n-3\}$ -demi-isomorphie entre deux tournois à n sommets dont l'un est non fortement connexe. *Pour citer cet article : M. Bouaziz, Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 411–416.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Half-isomorphy, selfduality and finite non strongly connected tournaments

Abstract

Let $T = (V, A)$ be a finite tournament with n vertices and let F be a set of non negative integers $\leq n$. The dual of T is the tournament $T^* = (V, A^*)$ defined by: for all $x, y \in V$, $(y, x) \in A^*$ if and only if $(x, y) \in A$. To every subset X of V is associated the subtournament $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ of T induced by X . The tournament T is strongly connected if for all $x, y \in V$, with $x \neq y$, there is a sequence $x_0 = x, \dots, x_p = y$ such that for $i \in \{0, \dots, p-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$. An half-isomorphism from T onto a tournament T' is either an isomorphism from T onto T' or an isomorphism from T^* onto T' . A tournament T' , with the same set of vertices V than T , is F -half-isomorphic to T if for every subset X of V such that $|X| \in F$, the subtournaments $T(X)$ and $T'(X)$ are half-isomorphic. We study the $\{3, n-2\}$ -half-isomorphy and the $\{n-3\}$ -half-isomorphy between two tournaments with n vertices, one of which is non strongly connected. *To cite this article: M. Bouaziz, Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 411–416.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Adresses e-mail : Moncef.Bouaziz@issatm.rnu.tn (M. Bouaziz); youssef_boudabbous@yahoo.fr (Y. Boudabbous).

Abridged English version

1. A finite tournament $T = (V, A)$ consists of a finite set V of vertices with a prescribed collection A of ordered pairs of distinct vertices, called the set of arcs of T , which satisfies: for $x, y \in V$, with $x \neq y$, $(x, y) \in A$ if and only if $(y, x) \notin A$. The dual of T is the tournament $T^* = (V, A^*)$ defined by: for all $x, y \in V$, $(y, x) \in A^*$ if and only if $(x, y) \in A$. The tournament T is selfdual when T is isomorphic to T^* . An half-isomorphism from T onto a tournament T' is either an isomorphism from T onto T' or an isomorphism from T^* onto T' . The tournament T is a total order when for all $x, y, z \in V$, if $(x, y), (y, z) \in A$, then $(x, z) \in A$. The first and the last element of a total order T are called the extremes of T . With every subset X of V is associated the subtournament $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ of T induced by X . In another vein, a relation \mathcal{R} is defined on V as follows: for all $x, y \in V$, with $x \neq y$, $x \mathcal{R} y$ if there exist two sequences $x_0 = x, \dots, x_n = y$ and $y_0 = y, \dots, y_m = x$ of vertices of T such that for $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$, and for $j \in \{0, \dots, m - 1\}$, $(y_j, y_{j+1}) \in A$. The relation \mathcal{R} is an equivalence relation, the classes of which are called the strongly connected components of T . A tournament is then said to be strongly connected when it admits a single strongly connected component. For example, the two tournaments $D_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\})$ and $D_2 = (D_1)^*$, called diamonds, are non strongly connected and admit two strongly connected components: $\{1, 2, 3\}$ and $\{4\}$.

Given a tournament $H = (\{1, \dots, k\}, A)$, with every $i \in \{1, \dots, k\}$ is associated a tournament $T_i = (V_i, A_i)$ such that the V_i 's are mutually disjoint. The lexicographical sum of the T_i 's over H is the tournament denoted by $H(T_1, \dots, T_k)$ and defined on the union of the V_i 's as follows: given $u \in V_i$ and $v \in V_j$, where $i, j \in \{1, \dots, k\}$, (u, v) is an arc of $H(T_1, \dots, T_k)$ if either $i = j$ and $(u, v) \in A_i$ or $i \neq j$ and $(i, j) \in A$. It is also said that the tournament $H(T_1, \dots, T_k)$ is obtained from the tournament H by dilating each $i \in \{1, \dots, k\}$ by the tournament T_i . For example, it is recalled that every non strongly connected tournament is a lexicographical sum of its subtournaments induced by its strongly connected components over a total order.

Given two tournaments $T = (V, A)$ and $T' = (V, A')$, with $|V| = n$, and a set F of non-negative integers $\leq n$, T and T' are F -half-isomorphic if for every subset X of V such that $|X| \in F$, the subtournaments $T(X)$ and $T'(X)$ are half-isomorphic. The tournament T is F -half-reconstructible provided that for every tournament T' , the F -half-isomorphy implies the half-isomorphy between T and T' .

Concerning the notion of selfduality, we cite [3,10] and introduce the following classes $D_{n,p}$ which are used to state our results.

Definition 1. – Given an integer $n \geq 4$ and a subset P of $\{1, \dots, n - 1\}$, $D_{n,P}$ denotes the class of tournaments with n vertices, which are strongly connected and non selfdual, and whose subtournaments with $(n - p)$ vertices are selfdual for every $p \in P$.

It ensues from [6–8,10] that the classes $D_{n,\{5\}}$, $D_{n,\{6\}}$, $D_{n,\{1,2,\dots,n-1\}}$, $D_{n,\{1,n-4\}}$ and $D_{n,\{4\}}$ are all empty for each integer $n \geq 12$. The problem of whether each of the classes $D_{n,\{3\}}$, $D_{n,\{2,3\}}$, $D_{n,\{1,2,3\}}$, $D_{n,\{2\}}$ and $D_{n,\{1,2\}}$ is empty, for a sufficiently large n , is a still open question.

2. In continuation of [1,2,4,5], we study the $\{3, n - 2\}$ -half-isomorphy between two tournaments of n vertices, one of them is non strongly connected. The following is obtained.

THEOREM 1. – Let T be a non strongly connected tournament with $n \geq 9$ vertices and let k be the number of its strongly connected components.

- (1) If $k \geq 4$, then T is $\{3, n - 2\}$ -half-reconstructible.
- (2) If $k = 3$, then T is non $\{3, n - 2\}$ -half-reconstructible if and only if T is obtained from a total order with 3 vertices by dilating one of its two extremes by an element of $D_{n-2,\{1,2\}}$.
- (3) If $k = 2$, then T is non $\{3, n - 2\}$ -half-reconstructible if and only if T is obtained from a total order with 2 vertices by dilating one of its vertices by an element of $D_{n-1,\{2\}}$.

We then study the $\{n - 3\}$ -half-isomorphy between two tournaments, one of them is non strongly connected. The following is obtained.

THEOREM 2. – *Let T be a non strongly connected tournament with $n \geq 10$ vertices and let k be the number of its strongly connected components.*

- (1) *If $k \geq 5$, then T is $\{n - 3\}$ -half-reconstructible.*
- (2) *If $k = 4$, then T is non $\{n - 3\}$ -half-reconstructible if and only if T is obtained from a total order with 4 vertices by dilating one of its vertices by an element of $D_{n-3, \{1,2,3\}}$.*
- (3) *If $k = 3$, then T is non $\{n - 3\}$ -half-reconstructible if and only if T is obtained from a total order with 3 vertices by dilating one of its two extremes by an element of $D_{n-2, \{2,3\}}$.*
- (4) *If $k = 2$, then T is non $\{n - 3\}$ -half-reconstructible if and only if T is obtained either from a total order with 2 vertices by dilating one of its vertices by an element of $D_{n-1, \{3\}}$ or from a diamond by dilating one of its vertices by an element of $D_{n-3, \{1,2,3\}}$.*

Theorems 1 and 2 allow for an analogous examination of the $\{n - 3, n - 2\}$ -half-reconstructibility and of the $\{n - 3, n - 2, n - 1\}$ -half-reconstructibility of the non strongly connected tournaments with $n \geq 10$ vertices.

1. Préliminaires

Un *tournoi fini* T est un couple (S, A) , où S est l'ensemble *des sommets* de T et A est un ensemble de couples de sommets distincts, appelés *arcs* de T , vérifiant : pour tous $x, y \in S$ avec $x \neq y$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. Le *dual* du tournoi T est le tournoi $T^* = (S, A^*)$ défini par : pour tous $x, y \in S$, $(y, x) \in A^*$ si et seulement si $(x, y) \in A$. Le tournoi T est *autodual* lorsque T est isomorphe à T^* . Un *demi-isomorphisme* de T sur un tournoi T' est soit un isomorphisme de T sur T' soit un isomorphisme de T^* sur T' . Le tournoi T est un *ordre total* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y), (y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Le premier et le dernier élément d'un ordre total T sont appelés *extrémités* de T . A chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de T induit par X . Par ailleurs, définissons sur S la relation \mathcal{R} comme suit : pour tous $x, y \in S$, avec $x \neq y$, $x \mathcal{R} y$ s'il existe deux suites $x_0 = x, \dots, x_n = y$ et $y_0 = y, \dots, y_m = x$ de sommets de T telles que pour $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$, et pour $j \in \{0, \dots, m - 1\}$, $(y_j, y_{j+1}) \in A$. La relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées *composantes fortement connexes* de T . Un tournoi est alors *fortement connexe* lorsqu'il admet une seule composante fortement connexe. Par exemple, les deux tournois $D_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\})$ et $D_2 = (D_1)^*$, appelés *diamants*, sont non fortement connexes et admettent deux composantes fortement connexes : $\{1, 2, 3\}$ et $\{4\}$.

Étant donné un tournoi $H = (\{1, \dots, k\}, A)$, associons à chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ un tournoi $T_i = (S_i, A_i)$ de telle sorte que les ensembles S_i sont mutuellement disjoints. La *somme lexicographique* des tournois T_i suivant H est le tournoi noté $H(T_1, \dots, T_k)$ et défini sur la réunion des S_i , comme suit : étant donné $u \in S_i$ et $v \in S_j$ où $i, j \in \{1, \dots, k\}$, (u, v) est un arc de $H(T_1, \dots, T_k)$ lorsque, $i = j$ et $(u, v) \in A_i$ ou $i \neq j$ et $(i, j) \in A$. Nous dirons aussi que le tournoi $T = H(T_1, \dots, T_k)$ est obtenu à partir du tournoi H en *dilatant* chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ par le tournoi T_i . Par exemple, rappelons que tout tournoi non fortement connexe est une somme lexicographique de ses sous-tournois induits par ses composantes fortement connexes suivant un ordre total.

Étant donné deux tournois T et T' ayant le même ensemble de sommets S à n éléments et un ensemble F d'entiers positifs $\leq n$, T et T' sont *F-demi-isomorphes* (resp. *F-isomorphes*) si pour toute partie X de S telle que $|X| \in F$, les sous-tournois $T(X)$ et $T'(X)$ sont demi-isomorphes (resp. isomorphes). Le tournoi T est *F-demi-reconstructible* (resp. *F-reconstructible*) lorsque tout tournoi F -demi-isomorphe (resp. F -isomorphe) à T , lui est demi-isomorphe (resp. isomorphe).

L'étude de la restructurabilité [6–8] et le problème de la caractérisation des tournois dont certains sous-tournois sont autoduaux [3,10], nous conduisent à introduire les classes suivantes de tournois qui interviennent aussi dans nos principaux résultats.

DÉFINITION 1. – Etant donné un entier $n \geq 4$ et une partie P de $\{1, \dots, n - 1\}$, $D_{n,P}$ est la classe des tournois ayant n sommets, qui sont fortement connexes et non autoduaux, et dont les sous-tournois à $(n - p)$ sommets sont autoduaux pour tout $p \in P$.

Il découle de [6–8] que les tournois ayant $n \geq 12$ sommets sont $\{n - k\}$ -restructurables pour tout $k \geq 4$. Par suite, pour tout $k \geq 4$, il existe un seuil $s(k)$ tel que la classe $D_{n,\{k\}}$ est vide dès que $n \geq s(k)$. Par contre, comme le problème de la $\{n - 3, n - 2, n - 1\}$ -restructurabilité des tournois ayant n sommets est encore ouvert, nous ne savons pas si la classe $D_{n,P}$ est vide pour $P = \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$ ou $\{1, 2, 3\}$.

2. Présentation des résultats

Suite aux [1,2,4,5], nous étudions la $\{3, n - 2\}$ -demi-isomorphie entre deux tournois à n sommets dont l'un est non fortement connexe. Cette étude aboutit au théorème suivant.

THÉORÈME 1. – Soit T un tournoi non fortement connexe à $n \geq 9$ sommets et soit k le nombre de ses composantes fortement connexes.

- (1) Si $k \geq 4$, alors T est $\{3, n - 2\}$ -demi-restructurable.
- (2) Si $k = 3$, alors T est non $\{3, n - 2\}$ -demi-restructurable si et seulement si T est obtenu à partir d'un ordre total à 3 éléments en dilatant l'une de ses deux extrémités par un élément de $D_{n-2,\{1,2\}}$.
- (3) Si $k = 2$, alors T est non $\{3, n - 2\}$ -demi-restructurable si et seulement si T est obtenu à partir d'un ordre total à 2 éléments en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-1,\{2\}}$.

De ce théorème découle directement le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. – Il existe un entier n_1 tel que tout tournoi non fortement connexe à $n \geq n_1$ sommets est $\{3, n - 2\}$ -demi-restructurable si et seulement si il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, la classe $D_{n,\{2\}}$ est vide.

Nous étudions ensuite la $\{n - 3\}$ -demi-isomorphie entre deux tournois à n sommets dont l'un est non fortement connexe.

THÉORÈME 2. – Soit T un tournoi non fortement connexe à $n \geq 10$ sommets et soit k le nombre de ses composantes fortement connexes.

- (1) Si $k \geq 5$, alors T est $\{n - 3\}$ -demi-restructurable.
- (2) Si $k = 4$, alors T est non $\{n - 3\}$ -demi-restructurable si et seulement si T est obtenu à partir d'un ordre total à 4 éléments en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-3,\{1,2,3\}}$.
- (3) Si $k = 3$, alors T est non $\{n - 3\}$ -demi-restructurable si et seulement si T est obtenu à partir d'un ordre total à 3 éléments en dilatant l'une de ses deux extrémités par un élément de $D_{n-2,\{2,3\}}$.
- (4) Si $k = 2$, alors T est non $\{n - 3\}$ -demi-restructurable si et seulement si T est soit obtenu à partir d'un ordre total à 2 éléments en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-1,\{3\}}$ soit obtenu à partir d'un diamant en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-3,\{1,2,3\}}$.

De ce théorème découle directement le résultat suivant.

COROLLAIRE 2. – Il existe un entier n_1 tel que tout tournoi non fortement connexe à $n \geq n_1$ sommets est $\{n - 3\}$ -demi-restructurable si et seulement si il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, la classe $D_{n,\{3\}}$ est vide.

3. Preuve du Théorème 1

Dans tout ce paragraphe, on considère un tournoi non fortement connexe $T = (S, A)$, avec $|S| = n \geq 9$, qui n'est pas un ordre total et un tournoi T' qui est $\{3, n - 2\}$ -demi-isomorphe à T . Ainsi, le tournoi T (resp. T') s'écrit $T = C_1(R_1, \dots, R_p)$ (resp. $T' = C'_1(R'_1, \dots, R'_q)$), où $p \geq 2$ (resp. $q \geq 2$), C_1 (resp. C'_1) est l'ordre total $1 < \dots < p$ (resp. $1 < \dots < q$) et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ (resp. $i \in \{1, \dots, q\}$), R_i (resp. R'_i) est un tournoi sur un ensemble J_i (resp. J'_i) tel que R_i (resp. R'_i) est soit fortement connexe soit un ordre total. De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ (resp. $i \in \{1, \dots, q - 1\}$), R_i et R_{i+1} (resp. R'_i et R'_{i+1}) ne sont pas simultanément des ordres totaux. Nous montrons d'abord que $p = q$, puis nous établissons la proposition suivante.

PROPOSITION 1. – *Ou bien pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $J'_i = J_i$ ou bien pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $J'_i = J_{p-i+1}$.*

Puisque seulement la demi-isomorphie entre T et T' est à établir, quitte à échanger T et son dual, on peut supposer que $|J_1| \leq |J_p|$ et, quitte à échanger T' et son dual, on peut supposer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $J'_i = J_i$. Il s'ensuit que nous pouvons conclure immédiatement par l'isomorphie entre T et T' dès que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, R_i et R'_i sont isomorphes. La proposition suivante, dont la preuve est longue et technique, permet d'énumérer les cas où on ne peut pas conclure comme précédemment, c'est-à-dire, les cas où il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que R_i et R'_i ne sont pas isomorphes.

PROPOSITION 2. – *Il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que R_i et R'_i ne sont pas isomorphes lorsque l'une des trois assertions suivantes est satisfaite.*

- (1) $p = 3$, $|J_1| = |J_3| = 1$. De plus, R_2 n'est pas autodual et est isomorphe à $(R'_2)^*$.
- (2) $p = 2$, $|J_1| = 2$ et $R_2 \in D_{n-2, \{1,2\}}$. De plus, pour toute partie X de J_2 , $R'_2(X)$ et $(R_2)^*(X)$ sont isomorphes.
- (3) $p = 2$, $|J_1| = 1$ et $R_2 \in D_{n-1, \{2\}}$. De plus, pour toute partie X de J_2 , $R'_2(X)$ et $(R_2)^*(X)$ sont isomorphes.

Dans les cas (1), T^* et T' sont isomorphes. En revanche, dans les cas (2) et (3), T et T' ne sont pas demi-isomorphes.

4. Preuve du Théorème 2

Considérons un tournoi non fortement connexe $T = (S, A)$, avec $|S| = n \geq 10$, qui n'est pas un ordre total et un tournoi $T' = (S, A')$ qui est $\{n - 3\}$ -demi-isomorphe à T . Comme dans le paragraphe précédent, T se décompose en une somme lexicographique $T = C_1(R_1, \dots, R_p)$. D'après un lemme fondamental de coloration en Combinatoire dû à Pouzet [9], T et T' sont $\{3\}$ -demi-isomorphes et, par suite, pour tout $x \in S$, $T(S - \{x\})$ et $T'(S - \{x\})$ sont $\{3, n - 2\}$ -demi-isomorphes. Les résultats précédents peuvent alors être utilisés dès que $T(S - \{x\})$ est non fortement connexe et n'est pas un ordre total. Par exemple, étant donné $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que R_j est fortement connexe avec $|J_j| \geq 4$, pour tout $x \in J_j$ tel que $R_j(J_j - \{x\})$ est fortement connexe, $T(S - \{x\})$ est non fortement connexe et se décompose en $C_1(R_1, \dots, R_{j-1}, R_j(J_j - \{x\}), R_{j+1}, \dots, R_p)$. En utilisant alors la Proposition 1, on montre qu'on peut encore supposer que $T' = C_1(R'_1, \dots, R'_p)$, où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $J'_i = J_i$. A l'aide de la Proposition 2, on obtient alors le résultat suivant dont découle le Théorème 2.

PROPOSITION 3. – *Il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que R_i et R'_i ne sont pas isomorphes lorsque l'une des cinq assertions suivantes est satisfaite.*

- (1) $p = 3$, $|J_1| = |J_3| = 1$. De plus, R_2 n'est pas autodual et est isomorphe à $(R'_2)^*$.
- (2) T est obtenu à partir d'un ordre total à 4 éléments en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-3, \{1,2,3\}}$.

- (3) T est obtenu à partir d'un ordre total à 3 éléments en dilatant l'une de ses deux extrémités par un élément de $D_{n-2, \{2,3\}}$.
- (4) T est obtenu à partir d'un ordre total à 2 éléments en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-1, \{3\}}$.
- (5) T est obtenu à partir d'un diamant en dilatant l'un de ses sommets par un élément de $D_{n-3, \{1,2,3\}}$.

Notons que l'étude de la $\{n-2, n-3\}$ -demi-reconstructibilité et celle de la $\{n-1, n-2, n-3\}$ -demi-reconstructibilité des tournois non fortement connexes à $n \geq 10$ sommets découlent directement des Propositions 2 et 3.

Remerciements. Nous adressons nos vifs remerciements au rapporteur pour les améliorations qu'il a apportées à la rédaction de cette Note.

Références bibliographiques

- [1] M. Bouaziz, Y. Boudabbous, La demi-isomorphie et les tournois fortement connexes finis, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris.
- [2] Y. Boudabbous, J. Dammak, Sur la $(-k)$ -demi-reconstructibilité des tournois finis, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 326 (1998) 1037–1040.
- [3] Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, Discrete Math. 223 (2000) 55–82.
- [4] Y. Boudabbous, G. Lopez, La relation différence et l'anti-isomorphie, Math. Log. Quart. 41 (1995) 268–280.
- [5] J.G. Hagendorf, G. Lopez, La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 317 (1993) 7–12.
- [6] P. Ille, La reconstruction des relations binaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 306 (1988) 635–638.
- [7] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317.
- [8] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n-1)$, II, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 157–168.
- [9] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Z. 150 (1976) 117–134.
- [10] K.B. Reid, C. Thomassen, Strongly self-complementary and hereditarily isomorphic tournaments, Monatsh. Math. 81 (1976) 291–304.