C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 365–370

Topologie/*Topology*
(Algébre homologique/*Homological Algebra*)

Une décomposition prismatique de l'opérade de Barratt–Eccles

Clemens Berger, Benoit Fresse

Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France

Reçu le 8 mai 2002 ; acceptée après révision le 1er juillet 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé L'opérade de Barratt–Eccles est une opérade simpliciale formée par les constructions bar homogènes des groupes symétriques. On montre que ces ensembles simpliciaux se décomposent en réunions de prismes indexés par des surjections. On observe que les complexes cellulaires définis par cette structure prismatique s'identifient aux composantes de l'opérade des surjections (l'opérade introduite par J. McClure et J. Smith dans leur travaux sur la conjecture de Deligne). ***Pour citer cet article : C. Berger, B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 365–370.***

A prismatic decomposition of the Barratt–Eccles operad

Abstract The Barratt–Eccles operad is a simplicial operad formed by the classical homogeneous bar construction of symmetric groups. We prove that these simplicial sets decompose as unions of prisms indexed by surjections. We observe that the cellular complexes given by this prismatic structure are nothing but the components of the surjection operad (the operad introduced by J. McClure and J. Smith in their work on the Deligne conjecture). ***To cite this article: C. Berger, B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 365–370.***

Abridged English version

The purpose of this Note is to discuss the relationship between the *Barratt–Eccles operad* and the *surjection operad*. We prove that the surjection operad arises from a prismatic decomposition of the Barratt–Eccles operad. This work sheds a new light on results of McClure and Smith (*cf.* [5,6]).

1. The Barratt–Eccles operad. – We follow the conventions of our former article (*cf.* [2]). We work in the category of differential graded $\mathbf{Z}$-modules. The simplicial Barratt–Eccles operad is denoted by $\mathcal{W}$. The letter $\mathcal{E}$ denotes the normalized differential graded operad associated to $\mathcal{W}$. The simplicial set $\mathcal{W}(r)$ is the homogeneous bar construction of the symmetric group Σ_r. Hence, an n-dimensional simplex in $\mathcal{W}(r)$ is an $n+1$-tuple of permutations $(w_0,\dots,w_n)\in\mathcal{W}(r)_n$. We have $d_i(w_0,\dots,w_n)=(w_0,\dots,\widehat{w_i},\dots,w_n)$ and

Adresses e-mail : cberger@math.unice.fr (C. Berger); fresse@math.unice.fr (B. Fresse).

S1631-073X(02)02489-5/FLA

$s_j(w_0,\dots,w_n)=(w_0,\dots,w_j,w_j,\dots,w_n)$. The differential graded module $\mathcal{E}(r)$ is the normalized chain complex of $\mathcal{W}(r)$. We refer to the literature for more details about the operad structure of $\mathcal{W}(r)$ and $\mathcal{E}(r)$.

The surjection operad is denoted by the letter $\mathcal{X}$. We recall that the module $\mathcal{X}(r)_d$ is generated by the *non-degenerate surjections* $u:\{1,\dots,r+d\}\to\{1,\dots,r\}$. A surjection is non-degenerate if $u(i+1)\neq u(i)$, for $i=1,\dots,r+d-1$.

Let us mention that the degree 0 component of $\mathcal{E}(r)$ and $\mathcal{X}(r)$ is nothing but the regular representation of the symmetric group: $\mathcal{E}(r)_0=\mathcal{X}(r)_0=\mathbf{Z}[\Sigma_r]$.

2. Cellular E-infinity structures. – The Barratt–Eccles operad has a filtration $F_1\mathcal{W}\subset F_2\mathcal{W}\subset\cdots\subset F_n\mathcal{W}\subset\cdots\subset F_\infty\mathcal{W}=\mathcal{W}$ by simplicial operads $F_n\mathcal{W}$ whose topological realization is equivalent to the *little n-cubes operad* (*cf.* [1]). We have a cellular structure which refines this filtration and which we call the cellular E-infinity structure of the Barratt–Eccles operad. The cells $F_{n_{ij},w}\mathcal{W}(r)\subset\mathcal{W}(r)$ are indexed by pairs consisting of a collection of non-negative integers $n_{ij}\in\mathbf{N}$ and of a permutation $w\in\Sigma_r$. We have explicitly $F_n\mathcal{W}(r)=\bigcup_{n_{ij}<n}F_{n_{ij},w}\mathcal{W}(r)$. We have an induced cellular structure and an induced filtration on the differential graded operad $\mathcal{E}$.

The surjection operad is also equipped with a cellular E-infinity structure. The reader is refered to the article of McClure and Smith (*cf.* [6]).

THEOREM. – *There are chain-morphisms $TR:\mathcal{E}\to\mathcal{X}$ and $TC:\mathcal{X}\to\mathcal{E}$ such that*:
(1) *in degree* 0, *the morphisms TR and TC are the identity of* $\mathbf{Z}[\Sigma_r]$;
(2) *we have* $TR\cdot TC=\mathrm{Id}_{\mathcal{X}}$;
(3) *the morphisms TR and TC preserve the cellular E-infinity structures and the operad filtrations*;
(4) *the map TR is an operad morphism.*

The map $TR:\mathcal{E}\to\mathcal{X}$ is the morphism introduced in the article [2]. Assertion (4) is the main result of article [2]. The purpose of this Note is to construct the section $TC:\mathcal{X}\to\mathcal{E}$ of $TR:\mathcal{E}\to\mathcal{X}$.

LEMMA. – *There is a map $H:\mathcal{E}(r)_*\to\mathcal{E}(r)_{*+1}$ such that $TC\cdot TR=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}+H\cdot\delta+\delta\cdot H$. This map preserves the cellular E-infinity structure of $\mathcal{E}$.*

This lemma is a consequence of a general property. Let $T:\mathcal{E}(r)_*\to\mathcal{E}(r)_*$ be a chain map which is the identity morphism in degree 0. We have in fact an explicit homotopy $H:\mathcal{E}(r)_*\to\mathcal{E}(r)_{*+1}$ defined by $H(w_0,\dots,w_d)=\sum_{i=0}^d(-1)^i(T(w_0,\dots,w_i),w_i,\dots,w_d)$. To be more precise, the expression $T(w_0,\dots,w_i)$ represents a sum of i-dimensional simplices in $\mathcal{W}(r)$. These are $i+1$-tuples of permutations which can be concatenated with $(w_i,\dots,w_d)$. This process gives a sum of $d+1$-dimensional simplices in $\mathcal{W}(r)$ and hence an element of $\mathcal{E}(r)_{*+1}$. The relation $T=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}+H\cdot\delta+\delta\cdot H$ is readily verified. In addition, we observe that H preserves the cellular structure of $\mathcal{E}$ if T satisfies this property.

The next theorem is an immediate corollary of the results above:

THEOREM. – *The morphism $TR:\mathcal{E}\to\mathcal{X}$ induces a quasi-isomorphism of operads $F_n\,TR:F_n\mathcal{E}\to F_n\mathcal{X}$, for $n=1,2,\dots,\infty$.*

Le but de cette Note est de préciser la relation entre deux opérades E-infinis : l'*opérade de Barratt–Eccles*, d'une part, l'*opérade des surjections*, d'autre part. On complète les résultats obtenus dans l'article [2]. On montre que l'opérade des surjections provient d'une décomposition prismatique de l'opérade de Barratt–Eccles. Ce travail donne un nouveau point de vue sur des résultats de McClure et Smith (*cf.* [5,6]).

Pour citer cet article : C. Berger, B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 365–370

1. Résultats

1.1. L'opérade de Barratt–Eccles

On reprend les conventions de notre article (*cf.* [2]). On travaille dans la catégorie des **Z**-modules différentiels gradués. L'opérade de Barratt–Eccles simpliciale est notée $\mathcal{W}$. L'opérade différentielle graduée associée est désignée par la lettre $\mathcal{E}$. L'ensemble simplicial $\mathcal{W}(r)$ est la construction bar homogène du groupe symétrique Σ_r. Ainsi, les simplexes de dimension n de $\mathcal{W}(r)$ sont les $n+1$-uplets de permutations $(w_0,\dots,w_n) \in \mathcal{W}(r)_n$. On a $d_i(w_0,\dots,w_n) = (w_0,\dots,\widehat{w_i},\dots,w_n)$ et $s_j(w_0,\dots,w_n) = (w_0,\dots,w_j,w_j,\dots,w_n)$. Le module différentiel gradué $\mathcal{E}(r)$ est le complexe des chaînes normalisées de $\mathcal{W}(r)$. On renvoie le lecteur à la littérature pour plus de détails sur les structures d'opérades de $\mathcal{W}(r)$ et de $\mathcal{E}(r)$.

L'opérade des surjections est désignée par la lettre $\mathcal{X}$. On rappelle que le module $\mathcal{X}(r)_d$ est engendré par les surjections non-dégénérées $u:\{1,\dots,r+d\} \to \{1,\dots,r\}$. On dit qu'une surjection u est non-dégénérée si on a $u(i+1) \neq u(i)$, pour $i = 1,\dots,r+d-1$.

On note que la composante de degré 0 de $\mathcal{E}(r)$ et de $\mathcal{X}(r)$ est la représentation régulière du groupe symétrique $\mathcal{E}(r)_0 = \mathcal{X}(r)_0 = \mathbf{Z}[\Sigma_r]$.

1.2. Structures cellulaires E-infini

On a une filtration de l'opérade de Barratt–Eccles $F_1\mathcal{W} \subset F_2\mathcal{W} \subset \cdots \subset F_n\mathcal{W} \subset \cdots \subset F_\infty\mathcal{W} = \mathcal{W}$ par des opérades simpliciales $F_n\mathcal{W}$ dont la réalisation topologique est équivalente à l'opérade des *petits n-cubes* (*cf.* [1]). Cette filtration se raffine en une structure cellulaire que l'on désignera comme la *structure cellulaire E-infini* de l'opérade de Barratt–Eccles. Les cellules $F_{n_{ij},w}\mathcal{W}(r) \subset \mathcal{W}(r)$ sont indexées par les paires constituées d'une collection d'entiers $n_{ij} \in \mathbf{N}$ et d'une permutation $w \in \Sigma_r$. On a explicitement $F_n\mathcal{W}(r) = \bigcup_{n_{ij}<n} F_{n_{ij},w}\mathcal{W}(r)$. On considère la structure cellulaire E-infini induite sur l'opérade différentielle graduée $\mathcal{E}$.

Le but de cette Note est d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3. – *On a des morphismes de complexes de chaînes $TR:\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ et $TC:\mathcal{X} \to \mathcal{E}$ tels que :*
(1) *en degré 0, les morphismes TR et TC sont l'identité de* $\mathbf{Z}[\Sigma_r]$;
(2) *on a* $TR \cdot TC = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}$;
(3) *le morphisme composé $TC \cdot TR:\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ préserve la structure cellulaire E-infini de $\mathcal{E}$* ;
(4) *l'application TR est un morphisme d'opérades.*

L'application $TR:\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ est le morphisme introduit dans l'article [2]. L'assertion (4) du théorème est le résultat principal de l'article [2]. L'application $TC:\mathcal{X} \to \mathcal{E}$ est définie dans la Section 3 de cette Note. L'assertion (2) résulte d'un énoncé plus précis (*cf.* Lemme 3.3).

On a une structure cellulaire E-infini sur l'opérade des surjections qui a été introduite par McClure et Smith. On prouve dans l'article [2] que le module $F_{n_{ij},w}\mathcal{X}(r)$ défini par ces auteurs est l'image de $F_{n_{ij},w}\mathcal{E}(r)$ par le morphisme $TR:\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ (*cf.* [2, Lemme 1.6.5]). Cette propriété se déduit aussi de la compatibilité des structures cellulaires avec les structures d'opérades. Le lecteur vérifiera facilement en reprenant la définition des structures cellulaires et les arguments de l'article [2] que l'image de $F_{n_{ij},w}\mathcal{X}(r)$ par le morphisme $TC:\mathcal{X} \to \mathcal{E}$ est contenue dans $F_{n_{ij},w}\mathcal{E}(r)$. Ceci prouve l'assertion (3) du théorème.

On a aussi la propriété suivante :

LEMME 1.4. – *On a une application $H:\mathcal{E}(r)_* \to \mathcal{E}(r)_{*+1}$ telle que $TC \cdot TR = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + H\cdot\delta + \delta\cdot H$. Cette application préserve la structure cellulaire E-infini de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. – Ce lemme est conséquence d'un résultat plus général : on se donne un morphisme de complexes $T:\mathcal{E}(r)_* \to \mathcal{E}(r)_*$ qui est l'identité en degré 0. On a alors une homotopie naturelle $H:\mathcal{E}(r)_* \to \mathcal{E}(r)_{*+1}$ entre T et l'identité de $\mathcal{E}$. Explicitement, on pose $H(w_0,\dots,w_d) =$

$\sum_{i=0}^{d}(-1)^i(T(w_0,\dots,w_i),w_i,\dots,w_d)$. L'expression $T(w_0,\dots,w_i)$ représente une somme de simplexes de dimension i dans $\mathcal{W}(r)$. Ce sont des $i+1$-uplets de permutations que l'on concatène avec $(w_i,\dots,w_d)$. On obtient ainsi des simplexes de dimension $d+1$ dans $\mathcal{W}(r)$ et donc un élément de $\mathcal{E}(r)_{*+1}$. La relation $T = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + H\cdot\delta + \delta\cdot H$ se vérifie sans difficultés. On constate également que H préserve la structure cellulaire E-infini de $\mathcal{E}$ si T a cette propriété.

Les résultats ci-dessus ont pour corollaire immédiat :

THÉORÈME 1.5. – *Le morphisme $TR:\mathcal{E}\to\mathcal{X}$ induit un quasi-isomorphisme d'opérades $F_n TR: F_n\mathcal{E}\to F_n\mathcal{X}$, quelque soit $n=1,2,\dots,\infty$.*

2. La décomposition prismatique de l'opérade de Barratt–Eccles

2.1. Le prisme associé à une surjection

On fixe une surjection $u\in\mathcal{X}(r)_d$. On note d_k le nombre d'occurences de $k\in\{1,\dots,r\}$ dans la suite $(u(1),\dots,u(r+d))$. (On a de la sorte $d+r=d_1+\cdots+d_r$.)

On a un prisme $\tau_u:\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1}\to\mathcal{W}(r)$ associé à u. L'image d'un simplexe $\sigma\in(\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1})_n$ dans $\mathcal{W}(r)_n$ est déterminée par l'image de ses sommets $(\sigma(0),\dots,\sigma(n))$. On a explicitement $\tau_u(\sigma)=(\tau_u(\sigma(0)),\dots,\tau_u(\sigma(n)))$. Un sommet du prisme $\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1}$ est spécifié par un r-uplet d'entiers $(x_1,\dots,x_r)$ tels que $0\leqslant x_k\leqslant d_k-1$. Le sommet correspondant $\tau_u(x_1,\dots,x_r)\in\mathcal{W}(r)_0$ est la permutation de $(1,\dots,r)$ qui est définie par la sous-suite de $(u(1),\dots,u(r+d))$ formée par les occurrences numéros $x_1+1,\dots,x_r+1$ des valeurs $1,\dots,r$.

On considère par exemple la surjection $(u(1),\dots,u(5))=(1,2,3,1,2)$. Le prisme associé $\tau_u:\Delta^1\times\Delta^1\times\Delta^0\to\mathcal{W}(3)$ se représente par la figure suivante :

$$\begin{tikzcd}
(0,1,0) \arrow[r] & (1,1,0) & & (1,3,2) \arrow[r] & (3,1,2) \\
(0,0,0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur] & (1,0,0) \arrow[u] & \mapsto & (1,2,3) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur] & (2,3,1) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Les résultats ci-dessous montrent que ces prismes définissent une décomposition cellulaire de $\mathcal{W}(r)$. La preuve du Lemme 2.3 (cité en remarque) est omise.

LEMME 2.2. – *Les faces d'un prisme τ_u sont les prismes τ_v associés aux sous-suites $(v(1),\dots,v(r+e))$ de $(u(1),\dots,u(r+d))$.*

Démonstration. – On considère par exemple la composition de τ_u avec le morphisme de face

$$1\times\cdots\times d^x\times\cdots\times 1:\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_k-2}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1}\to\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_k-1}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1}.$$

Ce morphisme composé s'identifie à un prisme $\tau_v:\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_k-2}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1}\to\mathcal{W}(r)$. La surjection v s'obtient en omettant la $x+1$-ième occurrence de k dans la suite $(u(1),\dots,u(r+d))$. On généralise facilement cette construction à tous les sous-prismes $\Delta^{e_1-1}\times\cdots\times\Delta^{e_r-1}\subset\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1}$.

LEMME 2.3. –
(1) *On a $\tau_v(\Delta^{e_1-1}\times\cdots\times\Delta^{e_r-1})\subset\tau_u(\Delta^{d_1-1}\times\cdots\times\Delta^{d_r-1})$ si et seulement si $(v(1),\dots,v(r+e))$ est une sous-suite de $(u(1),\dots,u(r+d))$. Le prisme τ_v est alors une face de τ_u.*
(2) *Les images des prismes τ_u, $u\in\mathcal{X}(r)$, recouvrent l'ensemble simplicial $\mathcal{W}(r)$. Les prismes τ_u, $u\in\mathcal{X}(r)$, s'intersectent selon des réunions de faces.*

2.4. Le simplexe fondamental associé à une surjection

On reprend le prisme associé à une surjection donnée $u : \{1,\dots,r+d\} \to \{1,\dots,r\}$. On spécifie un *simplexe fondamental* parmi les simplexes maximaux de $\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1}$. Un simplexe maximal $\sigma \in (\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1})_d$ est déterminé par une suite d'entiers $k_i \in \{1,\dots,r\}$, $i = 0,\dots,d-1$. On considère la suite de sommets $(x_1^{(i)},\dots,x_r^{(i)}) \in (\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1})_0$ telle que $x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + 1$ si $k = k_i$ et $x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)}$ sinon. On a alors un et un seul simplexe maximal dans $\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1}$ dont les sommets sont les $(x_1^{(i)},\dots,x_r^{(i)})$ (*cf.* [3, Section II.5]). Le simplexe fondamental de τ_u est le simplexe maximal associé à la suite $(k_0,\dots,k_{d-1})$ formée par les *césures* de la surjection u. On obtient cette suite en retirant de $(u(1),\dots,u(r+d))$ la dernière occurrence de chaque valeur $k \in \{1,\dots,r\}$ (*cf.* [2, §1.2.2]).

Le simplexe fondamental associé à la surjection $u = (1,2,3,1,2)$ du Paragraphe 2.1 a pour sommets $((1,2,3),(2,3,1),(3,1,2))$.

Remarques 2.5. – On peut considérer le complexe cellulaire associé à notre décomposition prismatique de $\mathcal{W}(r)$. Ce complexe est isomorphe au module $\mathcal{X}(r)$. Le Lemme 3.2 montre essentiellement que la différentielle de l'opérade des surjections, définie dans l'article [2], correspond à la différentielle cellulaire.

Outre les travaux de McClure et Smith (*cf.* [5,6]), l'opérade $F_2\mathcal{X}$ apparaît (sous la notation $\mathcal{M}$) dans le travail de Kontsevich et Soibelman sur la conjecture de Deligne (*cf.* [4]). La réunion des images des prismes indexés par les surjections de $F_2\mathcal{X}$ est la collection simpliciale $\mathcal{F}$ de l'article [5].

3. Les morphismes

3.1. Le morphisme d'Eilenberg–Zilber

On définit l'élément $TC(u) \in \mathcal{E}(r)_d$ associé à une surjection $u \in \mathcal{X}(r)_d$. On prend la somme alternée des simplexes maximaux du prisme $\tau_u : \Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1} \to \mathcal{W}(r)_d$. Un simplexe a un signe positif si son orientation naturelle concorde avec l'orientation du simplexe fondamental, négatif sinon. Ce morphisme diffère de l'application d'Eilenberg–Zilber classique par un signe. Plus explicitement, l'application d'Eilenberg–Zilber associe au générateur de $N_{d_1-1}(\Delta^{d_1-1}) \otimes \cdots \otimes N_{d_r-1}(\Delta^{d_r-1})$ une somme de simplexes dans $N_d(\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1})$. On prend l'image de cette somme par $N_*(\tau_u)$. C'est $\pm TC(u) \in \mathcal{E}(r)_d$. Le signe est déterminé par l'orientation du simplexe fondamental. Ainsi, pour l'exemple du Paragraphe 2.1, on obtient $TC(1,2,3,1,2) = ((1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)) - ((1,2,3),(1,3,2),(3,1,2))$.

LEMME 3.2. – *L'application* $TC : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ *est un morphisme de complexes.*

Démonstration. – On identifie l'ensemble simplicial Δ^{d_k-1} au simplexe de dimension $d_k - 1$ qui l'engendre. Ainsi, le produit tensoriel $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1}$ représente le générateur de $N_{d_1-1}(\Delta^{d_1-1}) \otimes \cdots \otimes N_{d_r-1}(\Delta^{d_r-1})$.

L'application d'Eilenberg–Zilber classique est un morphisme de complexes. La somme des faces de $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1}$ dans $N_*(\Delta^{d_1-1}) \otimes \cdots \otimes N_*(\Delta^{d_r-1})$ est donc envoyée sur la différentielle de $TC(u)$ dans $N_*(\mathcal{W}(r))$. L'image de la face $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes d_x(\Delta^{d_k-1}) \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1}$ par le morphisme d'Eilenberg–Zilber correspond également à l'image du générateur $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_k-2} \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1}$ de $N_{d_1-1}(\Delta^{d_1-1}) \otimes \cdots \otimes N_{d_k-2}(\Delta^{d_k-2}) \otimes \cdots \otimes N_{d_r-1}(\Delta^{d_r-1})$ par l'application composée du morphisme d'Eilenberg–Zilber $N_{d_1-1}(\Delta^{d_1-1}) \otimes \cdots \otimes N_{d_k-2}(\Delta^{d_k-2}) \otimes \cdots \otimes N_{d_r-1}(\Delta^{d_r-1}) \to N_{d-1}(\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_k-2} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1})$ et du morphisme simplicial $N_*(1 \times \cdots \times d^x \times \cdots \times 1) : N_*(\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_k-2} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1}) \to N_*(\Delta^{d_1-1} \times \cdots \times \Delta^{d_k-1} \times \cdots \times \Delta^{d_r-1})$. Par suite, une face $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes d_x(\Delta^{d_k-1}) \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1}$ donne un élément de la forme $TC(v)$ dans $N_*(\mathcal{W}(r))$: on considère la surjection v telle que $\tau_v = \tau_u \cdot 1 \times \cdots \times d^x \times \cdots \times 1$ (*cf.* Lemme 2.2). Les surjections v ainsi obtenues sont les termes de la différentielle de u dans le complexe des surjections $\mathcal{X}(r)$ (*cf.* [2, §1.2.3]). On vérifie que la différence entre le signe de v dans la différentielle de $u \in \mathcal{X}(r)$ et le signe de $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes d_x(\Delta^{d_k-1}) \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1}$ dans la différentielle de $\Delta^{d_1-1} \otimes \cdots \otimes \Delta^{d_r-1} \in N_*(\Delta^{d_1-1}) \otimes \cdots \otimes N_*(\Delta^{d_r-1})$ correspond à la différence d'orientation entre les simplexes fondamentaux de τ_u et de τ_v. Ceci termine la preuve du lemme.

LEMME 3.3. – *L'application* $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ *est caractérisée par les propriétés suivantes* :
(1) *c'est un morphisme de complexes* ;
(2) *on suppose que* σ *est le simplexe maximal d'un prisme* τ_u*, alors* :

$$TR(\sigma) = \begin{cases} u & \textit{si } \sigma \textit{ est le simplexe fondamental de } \tau_u, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

L'essentiel de la preuve de ce lemme est contenue dans l'article [2]. En particulier, une surjection $u \in \mathcal{X}(r)$ étant donnée, au Paragraphe 1.4.2 de [2], on construit un simplexe $\sigma \in \mathcal{W}(r)$ tel que $TR(\sigma) = u$. Ce simplexe est en fait le simplexe fondamental de τ_u. On montre que le morphisme *TR* s'annule sur les autres simplexes maximaux de τ_u en reprenant les arguments pour déterminer l'image du simplexe fondamental (*cf.* [2, Claim 1.4.3]).

Ces propriétés caractérisent l'application $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ parce que tout simplexe de $\mathcal{W}(r)$ est contenu dans un prisme τ_u. On en conclut également que le morphisme $TR : \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ est une application d'Alexander–Whitney tordue par le choix du simplexe fondamental.

Références bibliographiques

[1] C. Berger, Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés, Ann. Inst. Fourier 46 (1996) 1125–1157.
[2] C. Berger, B. Fresse, Combinatorial operad actions on cochains, Prépublication, arXiv:math.AT/0109158.
[3] P. Gabriel, M. Zisman, Calculus of Fractions and Homotopy Theory, Ergeb. Math. Grenzgeb., Vol. 35, Springer-Verlag, 1967.
[4] M. Kontsevich, Y. Soibelman, Deformations of algebras over operads and Deligne's conjecture, in: Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I, Math. Phys. Stud., Vol. 21, Kluwer Academic, 2000, pp. 255–307.
[5] J. McClure, J.H. Smith, A solution of Deligne's conjecture, Prépublication, arXiv:math.QA/9910126.
[6] J. McClure, J.H. Smith, Multivariable cochain operations and little n-cubes, Prépublication, arXiv:math.QA/0106024.