C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 381–386

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Algorithme de Neumann–Dirichlet pour des problèmes de contact unilatéral : Résultat de convergence

Guy Bayada [a,b], Jalila Sabil [a], Taoufik Sassi [a]

[a] Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon, MAPLY, UMR 5585, bâtiment Léonard De Vinci-21, avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne cedex, France

[b] Laboratoire de mécanique de contact, LMC, UMR 5514, INSA de Lyon, 20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 21 avril 2002 ; accepté après révision le 1er juillet 2002

Note présentée par Pierre-Louis Lions.

Résumé Dans cette Note, nous proposons et nous démontrons la convergence d'un algorithme de décomposition de domaine de type Neumann–Dirichlet. Celui-ci permet d'approcher un problème de contact unilatéral sans frottement entre deux matériaux élastiques en gardant les interfaces (physiques) de contact comme interfaces (numériques) de décomposition. L'idée est de remplacer dans l'approche proposée par [4], le problème de Dirichlet par une inéquation variationnelle. ***Pour citer cet article : G. Bayada et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 381–386.***

Neumann–Dirichlet algorithm for unilateral contact problems: Convergence results

Abstract In this Note, we propose and we prove the convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm in order to approximate a Signorini problem between two elastic bodies. The idea is to retain the natural interface between the two bodies as numerical interface for the domain decomposition and to replace the Dirichlet problem in [4] by a variational inequality. ***To cite this article: G. Bayada et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 381–386.***

Abridged English version

We consider a Signorini problem between two elastic bodies Ω^α, $\alpha = 1, 2$, in contact through an interface Γ_c. Assuming linear elasticity behavior and classical boundary conditions, the problem is given by (2)–(5), and the weak related formulation is:

$$\begin{cases} \text{Find } u \in K \\ a(u, v-u) \geqslant F(v-u) \quad \forall v \in K, \end{cases} \tag{P_1}$$

where K is a convex defined in Section 2. Existence and uniqueness of solution are well known (*see* [3]).

Adresses e-mail : bayada@insa-lyon.fr (G. Bayada); jalila.sabil@insa-lyon.fr (J. Sabil); sassi@insa-lyon.fr (T. Sassi).

S1631-073X(02)02488-3/FLA

The first step is to introduce the following equivalent multibody formulation.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma^2+f=0 & \text{in } \Omega^2,\\ \sigma_N^1=\sigma_N^2,\quad \sigma_T^1=\sigma_T^2 & \text{on } \Gamma_c,\\ \sigma^2 n^2=0 & \text{on } \Gamma_l^2,\\ u^2=0 & \text{on } \Gamma_u^2. \end{cases}\qquad \begin{cases} \operatorname{div}\sigma^1+f=0 & \text{in } \Omega^1,\\ [u_N]\leqslant 0,\quad \sigma_N^1\leqslant 0,\quad \sigma_N^1[u_N]=0 & \text{on } \Gamma_c,\\ \sigma_T^1=0 & \text{on } \Gamma_c,\\ \sigma^1 n^1=0 & \text{on } \Gamma_l^1,\\ u^1=0 & \text{on } \Gamma_u^1. \end{cases}$$

This allows us to define the following algorithm (Q_n) in which θ_n is a non negative parameter that will be determined in order te ensure the convergence of the algorithm, and R_D^α is an extension of traces which is defined by (6).

Let $g_0^2\in V^{2'}$ be given. For $n\geqslant 1$, we build the sequence of functions $(u_n^1)_{n\geqslant 0}\in V^1$ and $(u_n^2)_{n\geqslant 0}\in V^2$, by solving the following problems:

$$(Q_n)\quad \begin{cases} \text{(i) Find } u_n^2\in V^2\\ a^2(u_n^2,v)=F^2(v)+\langle g_{n-1}^2,v\rangle_2\quad \forall v\in V^2,\\ \text{(ii) Find } u_n^1\in V^{1^-}(u_{n,N}^2)\\ a^1(u_n^1,\omega+R_D^1(\gamma u_n^2)-u_n^1)\geqslant F^1(\omega+R_D^1(\gamma u_n^2)-u_n^1)\quad \forall\omega\in V^{1^-}(0),\\ \text{(iii)}\langle g_n^2,v\rangle_2:=\theta_n(-a^1(u_n^1,R_D^1\gamma v)+F^1(R_D^1\gamma v))+(1-\theta_n)\langle g_{n-1}^2,v\rangle_2\quad \forall v\in V^2. \end{cases}\tag{1}$$

The convergence of this algorithm towards the solution of (P_2),(P_3) and then of (2)–(5) is given by a two-step procedure. We prove first in Proposition 3.1 that the convergence of $(g_n)_n$ in $V^{2'}$ induces the strong convergence of $(u_n^\alpha)_n$. Then in Proposition 3.4, the contraction of an auxilary operator T_θ defined by (11) is gained. This induces the convergence of the sequence $(g_n)_n$ by way of Theorem 3.5 for $0<\theta_n<\theta^*$.

1. Introduction

Les problèmes de contact et d'impact représentent depuis longtemps une part significative en calcul des structures non linéaires. Nous proposons une méthode de décomposition naturelle de domaine qui consiste à adapter l'approche de sous-structuration « Neumann » à un problème de contact sans frottement en gardant la décomposition physique du problème (contrairement à [1]). Notons que cette méthode a déjà fait l'objet de simulations numériques [2] et permetterait d'utiliser des opérateurs de discretisations différents dans chacun des domaines.

On considère deux matériaux élastiques, occupant deux domaines $\overline{\Omega}^\alpha$, $\alpha=1,2$, de $\mathbb{R}^2$, et susceptibles d'entrer en contact unilatéral sans frottement à travers une zone $\Gamma_c=\Gamma_c^1=\Gamma_c^2$. Le problème étudié consiste à trouver les déplacements u^α et les contraintes $\sigma(u^\alpha)$ tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma(u^\alpha)+f^\alpha=0 & \text{sur } \Omega^\alpha,\\ \sigma(u^\alpha)n^\alpha=0 & \text{sur } \Gamma_l^\alpha,\\ u^\alpha=0 & \text{sur } \Gamma_u^\alpha. \end{cases}\tag{2}$$

Γ_u^α, Γ_l^α, Γ_c^α forment une partition de la frontière $\Gamma^\alpha=\partial\Omega^\alpha$, avec $\Gamma_u^\alpha\neq\emptyset$. La force f^α est une donnée régulière. La loi de comportement élastique, avec les hypothèses habituelles de coercivité, est :

$$\sigma_{ij}\big(u^\alpha\big)=A_{ijkh}^\alpha e_{kh}\big(u^\alpha\big),\quad \text{avec } e(u)=\frac{1}{2}\big(\nabla u+\nabla u^{\mathrm{T}}\big),\tag{3}$$

où A^α est le tenseur d'élasticité du corps élastique occupant le domaine $\overline{\Omega}^\alpha$.

On définit la composante normale du déplacement u^α et le déplacement normal relatif d'un solide par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_c par : $u_N^\alpha=u_i^\alpha n_i^\alpha$ et $[u_N]=u^1\cdot n^1+u^2\cdot n^2$, où n^α est la normale unitaire extérieure à Ω^α. Les composantes normales et tangentielles du vecteur de contraintes σ^α sont définies, avec convention des indices répétés, par : $\sigma_N^\alpha=\sigma_{ij}(u^\alpha)n_i^\alpha n_j^\alpha$ et $\sigma_T^\alpha=\sigma_{ij}(u^\alpha)n_j^\alpha-\sigma_N^\alpha n_i^\alpha$.

Les conditions sur Γ_c pour un contact unilatéral sans frottement sont :

$$\sigma_N^1=\sigma_N^2=\sigma_N,\qquad \sigma_T^1=\sigma_T^2=0,\tag{4}$$

$$[u_N]\leqslant 0,\qquad \sigma_N\leqslant 0,\qquad \sigma_N\cdot[u_N]=0.\tag{5}$$

Pour citer cet article : G. Bayada et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 381–386

2. Formulation multidomaine du problème de Signorini

Pour obtenir la formulation multidomaine du problème (2)–(5), on introduit le cadre fonctionnel suivant : $V^\alpha = \{v^\alpha \in (\mathrm{H}^1(\Omega^\alpha))^2,\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\alpha\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{(\mathrm{H}^1(\Omega^\alpha))^2}$, $V = V^1 \times V^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_V = \left(\sum_\alpha \|\cdot\|_\alpha^2\right)^{1/2}$, $K = \{v \in V,\ [v_N] \leqslant 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}$, $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_c) = \{\varphi \in (\mathrm{L}^2(\Gamma_c))^2;\ \exists v \in V^\alpha;\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\}$, muni de la norme $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_c} = \inf\{\|v\|_{V^\alpha};\ v \in V^\alpha,\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\}$ et $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_c) = \{\varphi \in \mathrm{L}^2(\Gamma_c);\ \exists v \in \mathrm{H}^1(\Omega^\alpha);\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\}$, où γ signifie l'application trace pour les fonctions vectorielles dans la définition de $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_c)$, et scalaires dans la définition de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_c)$. On note $V^{\alpha'}$ l'espace dual de V^α et $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ le produit de dualité entre ces deux espaces. La norme duale induite est définie par $\|\psi\|_{V^{\alpha'}} = \sup_{v\in V^\alpha} \langle\psi, v\rangle_\alpha / \|v\|_\alpha$.

On utilise les notations suivantes :

$$a^\alpha(u,v) = \int_{\Omega^\alpha} A^\alpha_{ijkl} e_{ij}(u) e_{kl}(v)\,\mathrm{d}x, \quad a(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{2} a^\alpha(u,v),$$

$$F^\alpha(v) = \int_{\Omega^\alpha} f v\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad F(v) = \sum_{\alpha=1}^{2} F^\alpha(v).$$

Pour $\alpha = 1, 2$, on définit le relèvement :

$$\begin{aligned} R_D^\alpha:\quad \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_c) &\longrightarrow V^\alpha,\\ \varphi &\longrightarrow R_D^\alpha\varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{cases} a^\alpha(R_D^\alpha\varphi, v) = 0 \quad \forall v \in V^\alpha \text{ tel que } v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_c,\\ \gamma(R_D^\alpha\varphi)n^\alpha = \varphi n^\alpha \quad \text{sur } \Gamma_c, \end{cases}$$

dont la formulation forte est :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma^\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega^\alpha & \text{avec } A\,e(R_D^\alpha\varphi) = \sigma^\alpha,\\ \gamma(R_D^\alpha\varphi)n^\alpha = \varphi n^\alpha, \quad \sigma^\alpha{}_T = 0 & \text{sur } \Gamma_c,\\ \sigma^\alpha n^\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_l^\alpha,\\ \gamma(R_D^\alpha\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_u^\alpha. \end{cases} \tag{7}$$

PROPOSITION 2.1. – (i) *Les trois normes* $\|\varphi_N\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_c)}$ *et* $\|R_D^\alpha\varphi\|_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, *sont équivalentes sur* $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_c)$.

(ii) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\forall v \in V^i\ \|R_D^j\gamma v_{|\Gamma_c}\|_j \leqslant C\|v\|_i$, $i, j = 1, 2$ *et* $i \neq j$.

Démonstration. – On utilise la définition de $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_c}$ et l'inégalité $\|R_D^\alpha\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_c}$ [5]. □

Remarque 1. – Afin de ne pas alourdir les notations, on écrit $R_D^\alpha(\gamma v)$ au lieu de $R_D^\alpha(\gamma v_{|\Gamma_c})$.

On introduit pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_c)$ l'ensemble :

$$V^{1^-}(\varphi) = \{v^1 \in V^1,\ v^1 n^1 \leqslant -\varphi \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}.$$

PROPOSITION 2.2. – *La formulation variationnelle* (P_1) *est équivalente aux deux problèmes suivants* :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^2 \in V^2\\ a^2(u^2, v) = F^2(v) - a^1(u^1, R_D^1(\gamma v)) + F^1(R_D^1(\gamma v)) \quad \forall v \in V^2, \end{cases} \tag{P_2}$$

et

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^1 \in V^{1^-}(u_N^2)\\ a^1(u^1, v - u^1) \geqslant F^1(v - u^1) \quad \forall v \in V^{1^-}(u_N^2). \end{cases} \tag{P_3}$$

Démonstration. – L'implication $(P_1) \Rightarrow (P_3)$ est immédiate. Pour montrer que (P_1) implique (P_2), on considère pour tout $v^2 \in V^2$ les fonctions admissibles $\tilde{v} = \mp(R_D^1(\gamma v^2), v^2)$, ce qui implique :

$$a(u, \tilde{v}) = F(\tilde{v})$$

d'où le résultat.

Inversement, soit $v = (v^1, v^2) \in K$, puisque $v^1 n^1 - (v^2 - u^2) n^1 \leqslant -u_N^2$ sur Γ_c, alors $w = v^1 - R_D^1 \gamma (v^2 - u^2) \in V^{1^-}(u_N^2)$. On choisit w (resp. $v^2 - u^2$) comme fonction-test dans (P_3) (resp. dans (P_2)). Par addition, on trouve (P_1). □

Remarque 2. – L'espace des fonctions admissibles du problème variationnel (P_3) dépend de la trace de la solution du problème de Neumann (P_2). Pour avoir un espace fixe, on effectue une translation des fonctions admissibles $v^1 \in V^{1^-}(u_N^2)$: $w = v^1 - R_D^1(\gamma u^2)$. On obtient le problème (P_3') qui est équivalent au problème (P_3) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^1 \in V^{1^-}(u_N^2) \\ a^1(u^1, w + R_D^1(\gamma u^2) - u^1) \geqslant F^1(w + R_D^1(\gamma u^2) - u^1) \quad \forall w \in V^{1^-}(0). \end{cases} \tag{P_3'}$$

3. Algorithme et convergence

On considère l'algorithme (Q_n) introduit dans (1) qui permet de construire des suites $(u_n^\alpha)_{n \geqslant 0} \in V^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, à l'aide d'un paramètre de relaxation θ_n et du relèvement R_D^1.

Remarque 3. – Grâce à l'inégalité (ii) de la Proposition 2.1, l'écriture $\langle g_n^2, v \rangle_2$ dans (1) (iii) a bien un sens, i.e. $g_n^2 \in V^{2'}$.

PROPOSITION 3.1. – *On suppose qu'il existe un réel strictement positif $\theta_{\min}$ tel que $\forall \theta_n \geqslant \theta_{\min}$, la suite $(g_n^2)_{n \geqslant 0}$ converge dans $V^{2'}$. Alors $u_n^\alpha \to u^\alpha$ dans V^α fortement.*

Démonstration. – Soient (u_n^1, u_n^2) et (u_m^1, u_m^2) les solutions des problèmes (Q_n) et (Q_m) respectivement, alors

$$a^1\big(u_n^1 - u_m^1, R_D^1 \gamma v\big) = -\big\langle g_{n-1}^2 - g_{m-1}^2, v \big\rangle_2 - \left\langle \frac{g_n^2 - g_{n-1}^2}{\theta_n} - \frac{g_m^2 - g_{m-1}^2}{\theta_m}, v \right\rangle_2 \quad \forall v \in V^2,$$

en choisissant $v = R_D^2 \gamma (u_n^1 - u_m^1)$ et en vérifiant que $R_D^1 \gamma (R_D^2 \gamma (u_n^1 - u_m^1)) = u_n^1 - u_m^1$, l'inégalité précédente devient :

$$\big\|u_n^1 - u_m^1\big\|_1^2 \leqslant c\big(\big\|g_{n-1}^2 - g_{m-1}^2\big\|_{V^{2'}} + \big\|g_n^2 - g_{n-1}^2\big\|_{V^{2'}} + \big\|g_m^2 - g_{m-1}^2\big\|_{V^{2'}}\big)\big\|R_D^2 \gamma \big(u_n^1 - u_m^1\big)\big\|_2$$

en utilisant la Proposition 2.1(i), et la convergence forte de $(g_n^2)_{n \geqslant 0}$ dans $V^{2'}$, on obtient la convergence de $(u_n^1)_n$.

La convergence forte de $(u_n^2)_n$ s'obtient à partir de celle de $(g_n^2)_{n \geqslant 0}$, en utilisant la coercivité de $a^2(\cdot, \cdot)$.

Pour finir la démonstration, on passe à la limite dans les équations (ii) et (iii) du problème (Q_n). La limite de $(u_n^\alpha)_n$, $\alpha = 1, 2$, apparaît comme l'unique solution du problème (P_2), (P_3). □

Afin de prouver la convergence de $(g_n^2)_n$, on introduit l'opérateur T défini par :

$$\begin{aligned} T: \quad & V^{2'} \longrightarrow V^{2'}, \\ & \psi \longmapsto T\psi \end{aligned} \tag{8}$$

tel que :

$$\langle T\psi, v \rangle_2 = -a^1\big(w^1, R_D^1 \gamma v\big) + F^1\big(R_D^1 \gamma v\big) \quad \forall v \in V^2,$$

où w^1 est la solution du problème d'obstacle suivant :

$$a^1\big(w^1, v - \omega^1\big) \geqslant F^1\big(v - w^1\big) \quad \forall v \in V^{1-}\big(w_N^2\big) \tag{9}$$

et w^2 est la solution dans V^2 du problème de Neumann :

$$a^2(w^2, v) = F^2(v) + \langle \psi, v\rangle_2 \quad \forall v \in V^2. \tag{10}$$

On définit également l'opérateur T_θ par :

$$\begin{aligned} T_\theta: \quad V^{2'} &\longrightarrow V^{2'}, \\ \psi &\longmapsto T_\theta(\psi) = \theta T(\psi) + (1-\theta)\psi. \end{aligned} \tag{11}$$

PROPOSITION 3.2. – *L'opérateur T est lipschitzien.*

Démonstration. – Soient ψ et $\tilde\psi$ dans $V^{2'}$, w^1 (resp. $\widetilde{w}^1$) et w^2 (resp. $\widetilde{w}^2$) les solutions correspondantes de (9) et (10). La continuité de $a^1(\cdot,\cdot)$ et la Proposition 2.1(i) impliquent

$$\left|\langle T\psi - T\tilde\psi, v\rangle_2\right| \leqslant C\left\|w^1 - \widetilde{w}^1\right\|_1 \|v\|_2. \tag{12}$$

En posant $x^1 = w^1 - R^1_D(\gamma w^2)$ et $\tilde x^1 = \widetilde{w}^1 - R^1_D(\gamma \widetilde{w}^2)$, l'inégalité (9) devient

$$a^1\left(x^1 + R^1_D(\gamma w^2), v - x^1\right) \geqslant F^1(v - x^1) \quad \forall v \in V^{1^-}(0), \tag{13}$$

$$\text{(resp.)} \quad a^1\left(\tilde x^1 + R^1_D(\gamma \tilde w^2), v - \tilde x^1\right) \geqslant F^1(v - \tilde x^1) \quad \forall v \in V^{1^-}(0). \tag{14}$$

On choisit dans (13) $v = \tilde x^1$, et dans (14), $v = x^1$. En rassemblant les deux inégalités, il vient :

$$\left\|w^1 - \widetilde{w}^1\right\|_1 \leqslant \frac{M+m}{m}\left\|R^1_D(\gamma \widetilde{w}^2 - \gamma w^2)\right\|_1, \tag{15}$$

où m et M sont respectivement les constantes de coercivité et de continuité de la forme bilinéaire $a^1(\cdot,\cdot)$. En utilisant la Proposition 2.1, et le fait que $R^2_D(\gamma\widetilde{w}^2 - \gamma w^2) = w^2 - \widetilde{w}^2$, l'inégalité (15) devient :

$$\left\|w^1 - \widetilde{w}^1\right\|_1 \leqslant C\left\|w^2 - \widetilde{w}^2\right\|_2 \tag{16}$$

d'après l'équation (10), on a :

$$\left\|w^2 - \widetilde{w}^2\right\|_2 \leqslant C\|\psi - \tilde\psi\|_{V^{2'}}. \tag{17}$$

De (12), (16) et (17), on déduit l'existence d'une constante C_T telle que :

$$\|T(\psi) - T(\tilde\psi)\|_{V^{2'}} \leqslant C_T\|\psi - \tilde\psi\|_{V^{2'}}. \qquad \square$$

On définit le relèvement suivant :

$$\begin{aligned} R^2: \quad V^{2'} &\longrightarrow V^2, \\ \psi &\longmapsto R^2\psi, \end{aligned}$$

où $R^2\psi$ est l'unique solution du problème :

$$a^2\left(R^2(\psi), v\right) = \langle\psi, v\rangle_2 \quad \forall v \in V^2. \tag{18}$$

On introduit la norme suivante sur $V^{2'}$:

$$|||\psi||| = \left(a^2\left(R^2\psi, R^2\psi\right)\right)^{1/2}. \tag{19}$$

PROPOSITION 3.3. – *Les normes $|||\cdot|||$ et $\|\cdot\|_{V^{2'}}$ sont équivalentes sur l'espace $V^{2'}$.*

Démonstration. – Il suffit d'utiliser la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a^2(\cdot,\cdot)$, dans (18). $\square$

PROPOSITION 3.4. – *Il existe θ^* tel que $\forall 0 < \theta < \theta^*$, T_θ est contractante.*

Démonstration. – Soient ψ et $\tilde\psi$ dans $V^{2'}$ alors :

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde\psi)\right|\right|\right|^2 &= \theta^2\left|\left|\left|T(\psi) - T(\tilde\psi)\right|\right|\right|^2 + (1-\theta)^2\left|\left|\left|\psi - \tilde\psi\right|\right|\right|^2 \\ &\quad + 2\theta(1-\theta)a^2\left(R^2\left(T(\psi) - T(\tilde\psi)\right), R^2(\psi - \tilde\psi)\right). \end{aligned}$$

Montrons que : $a^2(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})), R^2(\psi - \tilde{\psi})) \leqslant 0$.

En gardant les mêmes notations utilisées dans la démonstration de la Proposition 3.2, et puisque $R^2(\psi - \tilde{\psi}) = w^2 - \widetilde{w}^2$, alors :

$$\begin{aligned}
a^2\big(R^2\big(T(\psi) - T(\tilde{\psi})\big), R^2(\psi - \tilde{\psi})\big) &= a^2\big(R^2\big(T(\psi) - T(\tilde{\psi})\big), w^2 - \widetilde{w}^2\big) \\
&= -a^1\big(w^1 - \widetilde{w}^1, R_D^1\gamma\big(w^2 - \widetilde{w}^2\big)\big) \\
&= -a^1\big(w^1, \widetilde{w}^1 - R_D^1\gamma\widetilde{w}^2 + R_D^1\gamma w^2 - w^1\big) \\
&\quad - a^1\big(\widetilde{w}^1, w^1 - R_D^1\gamma w^2 + R_D^1\gamma\widetilde{w}^2 - \widetilde{w}^1\big) \\
&\quad - a^1\big(w^1 - \widetilde{w}^1, w^1 - \widetilde{w}^1\big).
\end{aligned}$$

Le choix $v = \widetilde{w}^1 - R_D^1\gamma\widetilde{w}^2 + R_D^1\gamma w^2$ (resp. $v = w^1 - R_D^1\gamma w^2 + R_D^1\gamma\widetilde{w}^2$) dans (9), (resp. dans (9) avec $\tilde{\psi}$), montre que les deux premiers termes à droite de l'équation précédente sont négatifs, d'où

$$a^2\big(R^2\big(T(\psi) - T(\tilde{\psi})\big), R^2(\psi - \tilde{\psi})\big) \leqslant -a^1\big(w^1 - \widetilde{w}^1, w^1 - \widetilde{w}^1\big) \leqslant 0.$$

Par conséquent

$$\big|\big|\big|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})\big|\big|\big|^2 \leqslant \theta^2\big|\big|\big|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\big|\big|\big|^2 + (1-\theta)^2 |||\psi - \tilde{\psi}|||^2.$$

De la Proposition 3.2, et en étudiant la fonction $K(\theta) = \theta^2 C_T^2 + (1-\theta)^2$, on montre que $\forall\theta \in]0, \theta^*[$, où $\theta^* = \min(1, 2/(1 + C_T^2))$, on a $0 < K(\theta) < 1$, d'où le résultat. □

THÉORÈME 3.5. – *Si* $0 < \theta_n < \theta^*$ *alors la suite* $(g_n^2)_{n\geqslant 0}$ *converge vers* g^2 *défini par* :

$$\langle g^2, v\rangle_2 = -a^1\big(u^1, R_D^1(\gamma v)\big) + F^1\big(R_D^1(\gamma v)\big) \quad \forall v \in V^2,$$

où (u^1, u^2) *est la solution du problème* (P_1).

Démonstration. – D'après l'algorithme (Q_n), il est facile de remarquer que $T_\theta(g_{n-1}^2) = g_n^2$. D'autre part, on déduit des problèmes (P_2) et (P_3) que $T_\theta(g^2) = g^2$. La Proposition 3.4 permet de conclure. □

Remarque 4. – L'approche décrite ci-dessus peut se généraliser au cas d'un contact avec frottement en changeant la définition du relèvement R_D^α, et en remplaçant le problème (ii) de (1) par un problème de type Tresca variationnel. La convergence est prouvée dans le cas d'un frottement de type Tresca, Coulomb à seuil fixe, et pour un coefficient de frottement petit dans le cas de frottement de type Coulomb.

Une version parallélisable peut être obtenue en résolvant simultanément le problème de Neumann (i) de (1) et le problème d'obstacle (ii) dans lequel on utilise la solution du problème de Neumann à l'itération précédente. Les détails de cette généralisation et les simulations numériques sont en cours de rédaction [6].

Références bibliographiques

[1] P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec, M. Vidrascu, Méthode de Schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non-symétryque, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 331 (2000) 399–404.
[2] R.H. Krause, B.I. Wohlmuth, Nonconforming domain decomposition techniques for linear elasticity, East-West J. Numer. Math. 8 (3) (2000) 177.
[3] J.L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math. XX (1967) 493–519.
[4] L.D. Marini, A. Quarteroni, A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements, Numer. Math. 55 (5) (1989) 575–598.
[5] M. Moussaoui, Communication personnelle, mars 2002.
[6] J. Sabil, Analyse numérique des algorithmes de contact, Thèse, INSA de Lyon, soutenance prévue en 2003.