C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 325–328

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Image numérique et compacité d'opérateurs de composition sur un espace de Hilbert de séries de Dirichlet

Catherine Finet [a], Hervé Queffélec [b], Alexander Volberg [c]

[a] Institut de mathématique, Université de Mons-Hainaut, « Le Pentagone », avenue du Champ de Mars, 6, 7000 Mons, Belgique

[b] UFR de mathématiques, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

[c] UFR de mathématiques, Université Pierre et Marie Curie – Paris 6, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 17 juin 2002 ; accepté le 24 juin 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé Dans cette Note, nous étudions l'image numérique et la compacité de certains opérateurs de composition, définis sur un espace de Hilbert de séries de Dirichlet introduit par Hedenmalm, Lindqvist et Seip. Nous montrons que dans la plupart des cas, zéro est un point intérieur à cette image numérique. L'étude de la compacité fait apparaître un phénomène rappelant le théorème de Polya sur les marches aléatoires en dimension d : si la longueur du symbole de l'opérateur est $d+1$, et l'image du symbole est non-triviale, alors l'opérateur est non compact si $d=1$; compact, non Hilbert–Schmidt, si $d=2$; Hilbert–Schmidt si $d \geqslant 3$. ***Pour citer cet article : C. Finet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 325–328.***

Numerical range and compacity of some composition operators on a Hilbert space of Dirichlet series

Abstract In this Note, we study the numerical range and compacity of some composition operators, defined on a Hilbert space of Dirichlet series introduced by Hedenmalm, Linqvist and Seip. We show that most often, zero is the interior of this numerical range. The study of compacity exhibits a phenomenon which recalls Polya's theorem on random walks in dimension d: if the length of the symbol of the operator is $d+1$, and if its image is non-trivial, then the operator is non-compact if $d=1$; compact, non Hilbert–Schmidt, if $d=2$; Hilbert–Schmidt if $d \geqslant 3$. ***To cite this article: C. Finet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 325–328.***

Adresses e-mail : catherine.finet@umh.ac.be (C. Finet); queff@gat.univ-lille1.fr (H. Queffélec); volberg@ccr.jussieu.fr (A. Volberg).

S1631-073X(02)02483-4/FLA

1. Introduction

Nous nous intéressons aux opérateurs de composition sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des séries de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}, \quad \text{avec } \|f\| = \Bigl(\sum_{n \geqslant 1} |a_n|^2\Bigr)^{1/2} < \infty.$$

Si on note $\mathbb{C}_\theta$ le demi-plan $\{s \in \mathbb{C},\ \mathcal{R}s > \theta\}$, où $\theta \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz montre que les fonctions de $\mathcal{H}$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}_{1/2}$, et $\mathcal{H}$ apparaît comme un espace de Hilbert fonctionnel sur $\mathbb{C}_{1/2}$, dont le noyau reproduisant est $K_a(s) = \zeta(s + \overline{a})$, ζ étant la fonction dzêta de Riemann, et dont une base orthonormée est constituée des fonctions n^{-s}, $n = 1, 2, \ldots$ [10].

Dans [7], Gordon et Hedenmalm ont caractérisé les fonctions analytiques $\phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$, qui génèrent un opérateur de composition $C_\phi(f) = f \circ \phi$, envoyant $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ (de façon automatiquement bornée).

THÉORÈME 1.1 ([7]). – *Une fonction analytique $\phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ définit un opérateur de composition borné $C_\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ si et seulement si*

(a) *ϕ est de la forme : $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, où c_0 est un entier $\geqslant 0$, et où φ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}_{1/2}$, qui se représente par une série de Dirichlet convergente dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$, pour θ assez grand ($\varphi \in \mathcal{D}$) ;*

(b) *ϕ a un prolongement analytique (encore noté ϕ) à $\mathbb{C}_0$, tel que*
  (1) *$\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_0$ si $c_0 > 0$;*
  (2) *$\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.*

Ce théorème est l'analogue dans $\mathcal{H}$ du principe de subordination de Littlewood [11]. Soulignons cependant que la situation dans $\mathcal{H}$ est différente de celle dans l'espace de Hardy $\mathrm{H}^2(D)$, avec D le disque unité, où toute fonction analytique $\phi : D \to D$ induit un opérateur de composition borné sur $\mathrm{H}^2(D)$, [12].

Du Théorème 4.2 de [7], on peut extraire le lemme utile suivant :

LEMME 1.2. – *Soit $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s) : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$, $\varphi \in \mathcal{D}$,*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Alors

(1) *si $\varphi(s) = c_1$, on a $\mathcal{R}c_1 \geqslant 0$;*
(2) *si φ n'est pas constante, on a $\mathcal{R}c_1 > 0$.*

L'image numérique d'un opérateur T sur un espace de Hilbert H est l'ensemble

$$W(T) = \bigl\{\langle Tf, f\rangle : f \in \mathrm{H} \text{ et } \|f\| = 1\bigr\}.$$

$W(T)$ est une partie convexe [8,9,13] et borélienne [1] du plan complexe ; pour T compact, elle est fermée si et seulement si $0 \in \overline{W(T)}$ [4]. Bourdon et Shapiro [5] ont étudié l'image numérique des opérateurs de composition sur $\mathrm{H}^2(D)$, et nous menons ici une étude analogue sur $\mathcal{H}$. Nous décrivons l'image numérique W pour des symboles ϕ « simples », et dans le cas général étudierons l'appartenance de l'origine 0, soit à $\overline{W}$ (ce qui se produit toujours si $\phi \neq I$), soit à W ou même à $\overset{\circ}{W}$ (ce qui se produit presque toujours).

Le résultat de [4] faisant le lien entre image numérique et compacité, il est naturel de s'intéresser à la compacité des opérateurs C_ϕ. Cette étude a été abordée par Bayart [2], qui traite également le cas d'espaces fonctionnels plus généraux que $\mathcal{H}$. Il a notamment observé que, si l'image de ϕ est « restreinte », c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_\varepsilon \quad \text{pour } c_0 > 0, \quad \text{et} \quad \phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon} \quad \text{pour } c_0 = 0,$$

alors C_ϕ est compact. Nous étudierons la réciproque de ce résultat quand $\phi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$ est un polynôme de Dirichlet ($c_{q_j} \neq 0$ pour tout j) à $d+1$ termes. Cette étude présente une analogie frappante avec le théorème de Polya sur la marche aléatoire standard dans $\mathbb{Z}^d$, récurrente si $d = 1$ ou 2, transiente si $d \geqslant 3$.

Cette Note d'annonce ne contient aucune preuve. Celles-ci seront publiées ultérieurement.

2. Image numérique

2.1. Exemples

Les résultats de Bayart [2] montrent que seuls les symboles ϕ de la forme $\phi(s) = c_0 s + c_1$, $c_0 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}c_1 \geqslant 0$, génèrent des opérateurs soit inversibles, soit normaux, soit isométriques. Nous commençons par décrire l'image numérique des opérateurs de composition associés à de tels ϕ.

THÉORÈME 2.1. – *Si ϕ est une constante dans $\mathbb{C}_{1/2}$, alors $W(C_\phi)$ est une ellipse pleine, de foyers* 0 *et* 1.

THÉORÈME 2.2. – *Si $\phi(s) = s + c_1$, avec $c_1 \neq 0$, alors* :
(1) *si $\mathcal{R}c_1 > 0$ et $\Im c_1 \neq 0$, alors $W(C_\phi)$ est un polygone convexe fermé qui contient zéro comme point intérieur, et c'est l'intervalle semi-ouvert* $]0, 1]$ *si $c_1 > 0$* ;
(2) *si $\mathcal{R}c_1 = 0$, $W(C_\phi) = D \cup \{n^{-c_1}, n \geqslant 1\}$, où D désigne le disque unité ouvert.*

THÉORÈME 2.3. – *Si $\phi(s) = c_0 s + c_1$ avec $c_0 \geqslant 2$ et $\mathcal{R}c_1 \geqslant 0$, alors*
(1) *si $\mathcal{R}c_1 > 0$, $W(C_\phi)$ est l'enveloppe convexe de* $\{1\}$ *et d'un disque fermé centré en 0* (*image numérique d'un shift pondéré unilatéral*). *Il contient le disque* $\overline{D}(0, 2^{-\mathcal{R}c_1 - 1})$;
(2) *si $\mathcal{R}c_1 = 0$, $W(C_\phi) = D \cup \{1\}$.*

2.2. Position de zéro par rapport à $W(C_\phi)$

Dans cette section, pour $\phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ générant un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}$, nous notons $\phi(s) = c_0(s) + \varphi(s)$, $c_0 \in \mathbb{N}$, φ analytique sur $\mathbb{C}_{1/2}$ et admettant une représentation en série de Dirichlet convergente dans un demi-plan vertical. Nous exclurons toujours le cas trivial $\phi(s) = s$ pour tout s, qui donne $W(C_\phi) = \{1\}$. Pour abréger, nous noterons $W = W(C_\phi)$.

THÉORÈME 2.4. – *Si $\phi(s) \neq s + c_1$, $c_1 > 0$, alors on a $0 \in \overset{\circ}{W}$. En particulier, W est fermé dès que C_ϕ est compact.*

Remarque 1. – L'exemple $\phi(s) = s + c_1$, $c_1 > 0$, du Théorème 2.2, montre que W ne contient pas toujours 0 ; mais on a toujours $0 \in \overline{W}$.

3. Compacité

Dans ce qui suit, $q_1, \ldots, q_d$ désigneront des entiers $\geqslant 2$, multiplicativement indépendants (par exemple 2 et 6, ou 2,3 et 30), et ϕ sera le polynôme de Dirichlet

$$\phi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}, \quad c_{q_j} \neq 0, \quad \text{pour tout } j.$$

La condition [7] pour que C_ϕ soit borné est alors $\mathcal{R}c_1 \geqslant \sum_1^d |c_{q_j}| + \frac{1}{2}$.

Nous avons les trois théorèmes suivants, à comparer au théorème de Polya :

THÉORÈME 3.1. – *Supposons $d = 1$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*
(1) $\mathcal{R}c_1 > |c_{q_1}| + \frac{1}{2}$.
(2) $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ *pour un certain $\varepsilon > 0$.*

(3) *C_ϕ est un opérateur de Hilbert–Schmidt.*
(4) *C_ϕ est compact.*

THÉORÈME 3.2. – *Supposons $d = 2$. Alors*
(1) *C_ϕ est toujours compact.*
(2) *C_ϕ est un opérateur de Hilbert–Schmidt si et seulement si $\mathcal{R}c_1 > |c_{q_1}| + |c_{q_2}| + \frac{1}{2}$, ou encore s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$.*
(3) *Il existe des opérateurs de composition C_ϕ, avec $c_0 = 0$, d'image « restreinte » (i.e. il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ tel que $\phi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$), compacts et non de Hilbert–Schmidt.*

THÉORÈME 3.3. – *Supposons $d \in [3, +\infty]$. Alors*
(1) *C_ϕ est toujours un opérateur de Hilbert–Schmidt.*
(2) *Il existe des opérateurs de composition C_ϕ, avec $c_0 = 0$, d'image « restreinte », et cependant de Hilbert–Schmidt.*

Remarque 2. – Le cas $c_0 \geqslant 1$ est étudié par Bayart dans [3].

Remarque 3. – En ce qui concerne l'appartenance à la classe de Hilbert–Schmidt, on peut ajouter au symbole un terme linéaire $c_0 s$ sans affecter le résultat. Pour des symboles

$$\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s},$$

on obtient donc :
(1) Si $d = 1$ ou 2, C_ϕ est un opérateur de Hilbert–Schmidt si et seulement si $\mathcal{R}c_1 > |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}| + \frac{1}{2}$.
(2) Si $d \geqslant 3$, C_ϕ est un opérateur de Hilbert–Schmidt si et seulement si $\mathcal{R}c_1 \geqslant |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}| + \frac{1}{2}$.

Remarque 4. – Dans le cas de $\mathrm{H}^2(D)$, il est non trivial de produire des exemples pour lesquels C_ϕ est compact et non de Hilbert–Schmidt [6] ; dans le cas de $\mathcal{H}$, de tels opérateurs sont faciles à produire quand leur image est « restreinte » : par exemple, $\phi(s) = s + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$. Cela redevient non trivial quand on demande que l'image ne soit pas « restreinte » : mais de tels opérateurs existent, comme le montre le (3) du Théorème 3.2.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier F. Bayart et A. Bonami pour des discussions fructueuses.

Références bibliographiques

[1] J. Agler, Geometry and topological properties of the numerical range, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982) 767–777.
[2] F. Bayart, Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators, Preprint.
[3] F. Bayart, Compact composition operators on a Hilbert space of Dirichlet eries, Preprint, 2002.
[4] G. de Barra, J.R. Giles, B. Sims, On the numerical range of compact operators on Hilbert spaces, J. London Math. Soc. 5 (1972) 704–706.
[5] P.S. Bourdon, J.H. Shapiro, When is zero in the numerical range of a composition operator?, à paraitre dans Integral Equations Operator Theory.
[6] C.C. Cowen, B.D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.
[7] J. Gordon, H. Hedenmalm, The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients, Michigan Math. J. 46 (1999) 313–329.
[8] P.R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, 2nd ed., Springer, New York, 1982.
[9] F. Hausdorff, Der Wertevorrat einer Bilinearform, Math. Z. 3 (1919) 314–316.
[10] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, K. Seip, A Hilbert space of Dirichlet series and a system of dilated functions in $\mathrm{L}^2(0,1)$, Duke Math. J. 86 (1987) 1–36.
[11] J.E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. 23 (1925) 481–519.
[12] J.H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.
[13] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satz von Fejér, Math. Z. 2 (1918) 17–197.