

# Un modèle d'expansion de plasma dans le vide

Pierre Degond, Céline Parzani, Marie-Hélène Vignal

MIP, UMR 5640 (CNRS-UPS-INSA), Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 7 juin 2002 ; accepté le 7 juin 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

---

## Résumé

Nous présentons un modèle d'expansion de plasma. Le modèle de départ est constitué des équations d'Euler isentropiques pour deux espèces (ions et électrons) couplées avec l'équation de Poisson. La simulation numérique de ce modèle s'avérant trop coûteuse dans la pratique, nous en envisageons une limite quasineutre. Nous montrons qu'à l'interface plasma–vide se produit une émission électronique, bien décrite par un modèle de type Child–Langmuir. La difficulté consiste à prendre en compte le mouvement de l'interface plasma–vide et l'émission d'électrons à partir de celle-ci. Nous justifions formellement et numériquement pourquoi l'émission électronique produit une pression de réaction qui freine l'expansion du plasma. *Pour citer cet article* : P. Degond et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 399–404*.

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## A model for plasma expansion in vacuum

## Abstract

In this paper, we propose a model describing the expansion of a plasma in vacuum. Our starting point consists of a 2-fluid Euler system (isentropic case) coupled with the Poisson equation. Since numerical simulations of this model are very expensive, we investigate a quasi-neutral limit of it. We show that electron emission happens at the plasma–vacuum interface. This emission is well modeled by a Child–Langmuir law. The difficulty consists in accounting for the motion of the plasma–vacuum interface. In this paper, we formally and numerically justify why electron emission produces a reaction pressure which slows down the plasma expansion. *To cite this article* : P. Degond et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 399–404*.

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

This paper is devoted to the study of plasma expansion, and more particularly to the description of the motion of the plasma–vacuum interface. Let us consider an external electric field applied between two electrodes and assume that a plasma constituted of ions and electrons is emitted from the cathode. The plasma undergoes a thermal expansion towards the anode while the electrons are emitted from the

---

*Adresses e-mail* : degond@mip.ups-tlse.fr (P. Degond); parzani@mip.ups-tlse.fr (C. Parzani); mhvignal@mip.ups-tlse.fr (M.-H. Vignal).

plasma–vacuum interface. The distance between the interface and the anode is decreasing with time and the extracted electron current is simultaneously increasing. Our starting point is a one-dimensional isentropic Euler model for each species coupled with the Poisson equation. Due to the large plasma densities, numerical simulations are expensive in practice, and justify the introduction of a one-fluid Euler model obtained as a formal quasi-neutral limit of the two-fluids model, and given by:

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon)((nu)_t + (nu^2)_x) + (p_i(n) + p_e(n))_x = 0, & \forall x \in [0, X(t)], \\ n_t + (nu)_x = 0, \quad \phi(x) = 0, & \forall x \in [0, X(t)], \end{cases} \quad (1)$$

where  $n$  and  $u$  are the plasma density and velocity while  $p_i(n) + p_e(n)$  is the sum of the ion and electron pressures,  $\varepsilon$  is the electron to ion mass ratio,  $\phi$  is the electric potential and  $X(t)$  is the plasma-vacuum interface position at time  $t$ . This means that  $n = 0, \forall x > X(t)$ . During the plasma expansion, electrons are emitted from the interface to the anode. Their motion in vacuum is described by a Child–Langmuir type model. Now, the boundary conditions at  $X(t)$  are determined through two additional assumptions. The first one is that electron emission is governed by the Child–Langmuir law so that  $\phi_x(X(t)) = 0$ . The analytic expression of the electron current emitted from the interface is then given by:

$$j_{CL} = \frac{4}{9} \frac{\sqrt{2}\lambda}{(1 - X(t))^2 \sqrt{\varepsilon\eta}}, \quad (2)$$

where  $\lambda$  and  $\eta$  are dimensionless parameters defined by (4). Moreover, by momentum conservation, electron emission produces a reaction pressure which slows down the plasma expansion, given by:

$$P = \varepsilon \left( \frac{j_{CL}^2}{n_-} + \sigma j_{CL} \right) + p_e(n_-), \quad (3)$$

where  $n_-$  represents the plasma density on the left side of the interface and  $\sigma = dX/dt$ . Finally, we propose a finite volume scheme to solve equations (1) together with the condition (3) and compare simulations given by the asymptotic model with those of the initial 2-fluid Euler–Poisson model. The simulations confirm the validity of our approach.

## 1. Introduction

Nous nous intéressons à la modélisation de l’expansion d’un plasma entre deux électrodes, situation intervenant dans certains types de diodes [7]. Nous considérons deux électrodes entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel et nous supposons qu’un plasma totalement ionisé est émis au niveau de la cathode et subit une détente thermique. Au cours du temps, des électrons sont émis au niveau de l’interface plasma-vide selon une loi de type Child–Langmuir [2,4]. La détente contribue ainsi à réduire la distance entre l’interface plasma-vide et l’anode. Cette interface jouant le rôle de cathode virtuelle vis à vis de l’émission électronique, le courant extrait augmente à mesure que la distance entre l’interface plasma-vide et l’anode diminue, conformément à la loi de Child–Langmuir.

Le point de départ de notre modélisation consiste en un système bifluide constitué des équations d’Euler isentropiques pour chaque espèce (ions et électrons), couplées à l’équation de Poisson. Néanmoins, du fait de la densité très élevée du plasma, la simulation numérique d’un tel modèle nécessite un maillage extrêmement fin qui en rend la simulation numérique très coûteuse dans la pratique. C’est pourquoi, dans cette note, nous en considérons la limite quasineutre, laquelle conduit à un modèle d’Euler monofluide. D’autre part, au cours de la détente adiabatique du plasma, des électrons sont émis à partir de l’interface  $X(t)$  en direction de l’anode. Par le biais d’un changement d’échelle, nous montrons que ces électrons,

qui ne sont pas décrits par le modèle quasineutre, peuvent être modélisés par un modèle de type Child–Langmuir. Pour raccorder les modèles quasineutre (pour le plasma) et de Child–Langmuir (pour les électrons émis) au niveau de l’interface  $X(t)$  nous formulons deux hypothèses qui seront validées par les simulations numériques :

- (i) L’émission électronique a lieu dans un régime de courant maximal (courant de Child–Langmuir).
- (ii) L’accélération des électrons produit une force de réaction s’exerçant sur le plasma et ralentissant le mouvement de l’interface.

Le but de cette note est de donner un cadre mathématique à cette modélisation, de détailler les hypothèses (i) et (ii) et de les valider numériquement en comparant les simulations du modèle asymptotique à celles obtenues avec le modèle bifluide de départ.

## 2. Un modèle d’interface plasma–vide

Considérons deux électrodes : la cathode est située en  $\bar{x} = 0$  et l’anode en  $\bar{x} = L$ . Les quantités relatives aux ions sont indicées par  $i$  et celles relatives aux électrons par  $e$ . Pour  $j = i, e$ , notons  $m_j$  la masse des particules  $j$ .  $N_j$  représente leur densité,  $U_j$  leur vitesse et  $P_j(N_j)$  leur loi de pression. Chacune des espèces est alors modélisée par les équations d’Euler, couplées à l’équation de Poisson. D’autre part, l’hypothèse d’adiabaticité s’écrit :  $P_i(N_i) = C_i N_i^\gamma$ ,  $P_e(N_e) = C_e N_e^\gamma$  où  $\gamma > 1$  et  $C_i, C_e$  sont des constantes données. Nous considérons que le plasma est injecté à la cathode  $\bar{x} = 0$  avec des densités et des vitesses identiques pour les deux espèces. Nous avons donc  $N_i(0) = N_e(0) = N_0$ ,  $U_i(0) = U_e(0) = U_0$ . Pour le potentiel, les conditions aux limites sont données par  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(L) = \Phi_L$ . Nous choisissons ensuite pour grandeurs caractéristiques la longueur du dispositif  $L$ , la vitesse d’injection du plasma  $U_0$ , le temps  $\tau = L/U_0$ , la densité de plasma injectée à la cathode  $N_0$ , la pression ionique à la cathode  $P_0 = N_0 m_i U_0^2$  et le potentiel d’anode  $\Phi_L$ . Notons  $q > 0$  la charge élémentaire,  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide et introduisons les paramètres sans dimension suivants :

$$\varepsilon = \frac{m_e}{m_i}, \quad \eta = \frac{T_0}{q\Phi_L}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_0\Phi_L}{qN_0L^2}. \quad (4)$$

Nous exprimons ensuite le système Euler–Poisson en fonction des inconnues adimensionnées :  $x, \phi, n_{i,e}, u_{i,e}$  et  $p_{i,e}$  où  $\bar{x} = Lx$ ,  $N_{i,e} = N_0 n_{i,e}$ ,  $U_{i,e} = U_0 u_{i,e}$ ,  $\Phi = \Phi_L \phi$  et  $P_{i,e} = P_0 p_{i,e}(n_{i,e})$ . Nous obtenons alors, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$(n_i)_t + (n_i u_i)_x = 0, \quad (n_i u_i)_t + ((n_i u_i^2) + p_i(n_i))_x = -\frac{n_i \phi_x}{\eta}, \quad (5)$$

$$(n_e)_t + (n_e u_e)_x = 0, \quad \varepsilon((n_e u_e)_t + (n_e u_e^2)_x) + (p_e(n_e))_x = \frac{n_e \phi_x}{\eta}, \quad (6)$$

$$-\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (n_i - n_e), \quad (7)$$

avec les conditions aux limites adimensionnées :

$$\text{en } x = 0 : n_i = n_e = 1, \quad u_i = u_e = 1, \quad \phi = 0; \quad \text{en } x = 1 : \phi = 1. \quad (8)$$

Dans la suite, nous nous intéressons au cas où  $\lambda = O(1)$  et  $\eta \rightarrow 0$ . Ces valeurs correspondent aux ordres de grandeurs observés dans certaines diodes à fort courant [7]. Bien qu’en pratique,  $\varepsilon$  soit petit, nous n’utilisons pas cette information dans l’analyse qui suit. Aussi ferons nous comme si  $\varepsilon = O(1)$ . Notons  $X(t)$  la position de l’interface plasma–vide au temps  $t$  ; la limite formelle  $\eta \rightarrow 0$  donne  $n_e \rightarrow n$ ,  $n_i \rightarrow n$ ,  $u_e \rightarrow u$ ,  $u_i \rightarrow u$ , où  $n$  et  $u$  sont solutions du système (1). Les conditions aux limites en  $x = 0$  sont données par :  $n = 1$ ,  $u = 1$ ,  $\phi = 0$ . La validité du modèle (1) comme modèle asymptotique de (5)–(7) lorsque  $\eta \rightarrow 0$  est limitée aux régions où  $n$  est strictement positif. La justification rigoureuse de cette limite a été

effectuée dans [1], précisément sous l’hypothèse que la densité est minorée par une constante strictement positive. Le même type de condition apparaît pour la limite quasi-neutre du modèle de dérive-diffusion [5]. Le modèle (1) cesse donc d’être valable au voisinage de  $X(t)$  où se produit la séparation des électrons et des ions. Les électrons sont accélérés par le potentiel d’anode alors que les ions sont repoussés. Au delà de l’interface  $X(t)$ , la densité ionique est nulle et nous modélisons le fluide électronique par les équations (6) et (7) avec  $n_i = 0$ . Les électrons accélérés par le champ électrique non nul atteignent alors des vitesses de l’ordre de  $(\varepsilon\eta)^{-1/2}$ . Nous changeons donc l’échelle des vitesses en posant pour  $x \in [X(t), 1]$  :  $u_e = (\varepsilon\eta)^{-1/2}\bar{u}_e$ , ce qui conduit au système :

$$\sqrt{\varepsilon\eta}(n_e)_t + (n_e\bar{u}_e)_x = 0, \quad \sqrt{\varepsilon\eta}(n_e\bar{u}_e)_t + (n_e\bar{u}_e^2)_x + \eta p_e(n_e)_x = n_e\bar{\phi}_x, \quad \lambda\bar{\phi}_{xx} = n_e.$$

La limite formelle  $\eta \rightarrow 0$  conduit au modèle stationnaire suivant. Pour tout  $x \in [X(t), 1]$  :

$$(\bar{n}_e\bar{u}_e)_x = 0, \quad (\bar{n}_e\bar{u}_e^2)_x = \bar{n}_e\bar{\phi}_x, \quad \lambda\bar{\phi}_{xx} = \bar{n}_e, \tag{9}$$

avec les conditions aux limites :  $\bar{\phi}(X(t)) = 0, \bar{\phi}(1) = 1$ . Il s’agit d’un modèle de Child–Langmuir, précédemment étudié dans la littérature [2,4].

Notons à présent qu’une condition de raccord en  $X(t)$  est nécessaire pour déterminer complètement d’une part le modèle quasineutre (1) assorti des conditions aux limites (8) en  $x = 0$  et d’autre part le modèle de Child–Langmuir (9). Cette condition découle de la dynamique des particules dans une couche limite très fine autour de  $X(t)$ . Pour l’instant, une analyse asymptotique même formelle ne permet pas de décrire cette couche limite. Nous proposons donc des conditions aux limites sur une base heuristique et validons numériquement cette approche en comparant les simulations du modèle asymptotique à celles du modèle bifluide initial. Les hypothèses sont les suivantes :

(i) Nous supposons que l’émission électronique a lieu véritablement sous un régime de Child–Langmuir, soit :

$$\bar{\phi}_x(X(t)) = 0, \quad \bar{u}_e(X(t)) = 0. \tag{10}$$

Sous ces conditions, la résolution analytique de (9) donne  $\bar{n}_e\bar{u}_e = (\varepsilon\eta)^{1/2}j_{CL}$  avec  $j_{CL}$  donné par (2).

(ii) Nous postulons la conservation de l’impulsion totale des électrons et des ions à la traversée de l’interface. Les électrons étant fortement accélérés, ils exercent en réaction une pression sur le plasma qui ralentit le mouvement de l’interface  $X(t)$ . Pour déterminer ce terme de réaction, nous sommes les équations d’impulsion ionique et électronique données par (5) et (6) puis nous appliquons les relations de Rankine–Hugoniot à travers l’interface. Si  $\sigma = dX/dt$  représente la vitesse de l’interface, et si nous notons  $[f]$  le saut d’une fonction  $f$  à travers l’interface, ainsi que  $f_-$  et  $f_+$  respectivement ses limites à gauche et à droite de  $X(t)$ , il vient alors :

$$\left[ \left( n_i u_i^2 + \varepsilon n_e u_e^2 + p_e + p_i - \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{2} |\phi_x|^2 \right) - \sigma (n_i u_i + \varepsilon n_e u_e) \right] = 0. \tag{11}$$

Nous supposons que l’asymptotique quasineutre reste valable jusqu’à l’interface. Par conséquent,  $n_{i-} = n_{e-} = n_-, u_{i-} = u_{e-} = u_-$  et  $\phi_{x-} = 0$ . D’autre part, à droite de  $X(t)$ , seul le fluide électronique persiste d’où  $n_{i+} = 0$ . D’après (10), nous avons aussi :  $\phi_{x+} = 0$ . En appliquant ensuite les conditions de Rankine–Hugoniot à la conservation de la densité ionique, nous déterminons la vitesse de l’interface :  $\sigma = u_-$ . Enfin, le courant d’électrons traversant l’interface doit coïncider avec le courant de Child–Langmuir (2) donc  $j_{CL} = n_{e+}(u_{e+} - \sigma)$ . En reportant dans (11), il vient  $(p_e + p_i)_- = \varepsilon(n_{e+}^{-1}j_{CL}^2 + \sigma j_{CL}) + p_e(n_{e+})$ . Notons que la loi de Child–Langmuir fournit la valeur du courant total  $j_{CL}$  mais ne donne pas d’estimation sur la valeur de  $n_{e+}$ . Les simulations numériques du modèle bifluide suggèrent la continuité de cette densité à travers l’interface. Nous supposons donc  $n_{e+} = n_-$  et déduisons le terme de pression (3) s’exerçant sur l’interface  $X(t)$  et modélisant l’influence de l’émission électronique sur le mouvement du plasma.

### 3. Validation numérique du modèle asymptotique

Cette section est consacrée à la prise en compte numérique du terme de pression (3) sur la résolution des équations d'Euler (1). Considérons le système quasineutre (1) écrit sous forme conservative (voir [6,8]) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial F(V)}{\partial x} = 0, \quad V(0, x) = 0, \quad V(t, 0) = V_0, \quad (12)$$

où  $V = (n, (1 + \varepsilon)nu)^T$  et  $F(V) = (nu, (1 + \varepsilon)nu^2 + (p_i(n) + p_e(n)))^T$ .

Nous discrétisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N$  cellules :  $m_k, k = 1, \dots, N$ , de même taille  $\Delta x$  et notons  $\Delta t$  le pas de temps tel que  $t^n = n\Delta t$ . Pour  $x \in m_k$ ,  $V$  est approchée au temps  $t = t^n$  par  $V_k^n$ . Supposons qu'à  $t = t^n$ ,  $m_{k_0}$  soit la dernière maille occupée par le plasma et que la position de l'interface  $X^n$  soit telle que  $X^n \in m_{k_0}$ . La définition de la vitesse de l'interface permet d'écrire :  $X^{n+1} = X^n + \Delta t u_{k_0}^n$ . La discrétisation du système (12) par une méthode volumes finis est classique (voir [8]). Nous nous intéressons donc uniquement à l'évolution de  $V$  dans la dernière maille. En appliquant la formule de Green et en considérant l'avancée de l'interface, nous avons :

$$(X^{n+1} - X_{k_0-1/2})V_{k_0}^{n+1} - (X^n - X_{k_0-1/2})V_{k_0}^n = \Delta t (g_{k_0-1/2}^n - g_+^n),$$

où  $g_{k_0-1/2}^n$  est le flux numérique entre les mailles  $m_{k_0-1}$  et  $m_{k_0}$ , évalué au temps  $t^n$  par exemple avec un schéma HLLE ou polynômial décentré [3,8]. De plus,  $g_+^n = (0, (P)^n)^T$  avec  $(P)^n = P$  donnée par (3) évaluée au temps  $t^n$ . Enfin, si  $X^{n+1} \in m_{k_0+1}$ , i.e.  $X^{n+1}$  a traversé l'interface de la maille au cours du pas de temps, nous posons :  $V_{k_0+1}^{n+1} = V_{k_0}^{n+1}$ .

Nous comparons maintenant les simulations numériques réalisées à partir des modèles bifluide et asymptotique. Nous discrétisons le domaine avec le pas d'espace  $\Delta x = 2 \times 10^{-4}$  et réalisons ces tests pour  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$ ,  $\lambda = 10^{-3}$  et  $\eta = 10^{-4}$ . La Fig. 1 est consacrée à l'étude de la zone quasineutre occupée par le plasma et modélisée soit par le système quasineutre (1), soit par le système bifluide (5). Les courbes associées au fluide ionique font clairement apparaître le ralentissement du plasma par rapport à une détente dans le vide classique. Dans les simulations, la valeur du terme de réaction réellement employé est  $\alpha P$  où  $P$  est donné par (3) et  $\alpha$  est un coefficient qu'il convient d'adapter pour obtenir le meilleur accord possible avec les simulations bifluides. Les résultats présentés ici sont obtenus avec une valeur

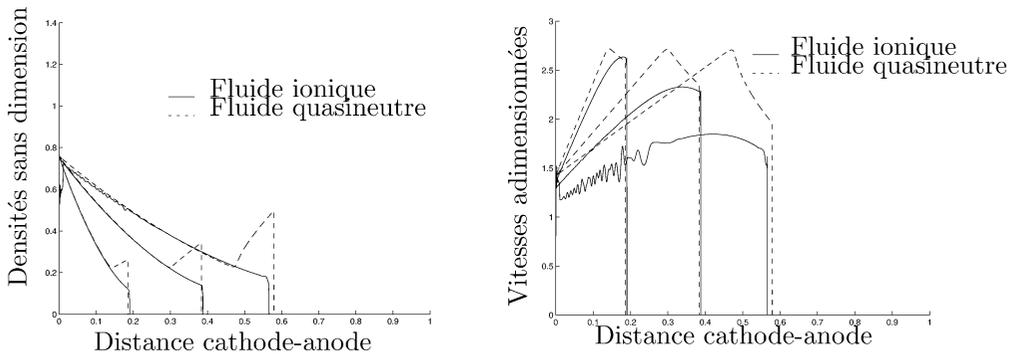


Figure 1. – Densités et vitesses du fluide ionique issues du modèle bifluide comparées à la densité et à la vitesse du plasma du modèle quasineutre : quantités observées entre la cathode  $x = 0$  et l'interface aux temps  $t = 0,07\tau$ ,  $t = 0,15\tau$ ,  $t = 0,24\tau$ .

Figure 1. – Densities and speeds of the ionic fluid coming from the 2-fluid model compared to those of the quasi-neutral model: values observed between the cathode  $x = 0$  and the interface, at times  $t = 0.07\tau$ ,  $t = 0.15\tau$ ,  $t = 0.24\tau$ .

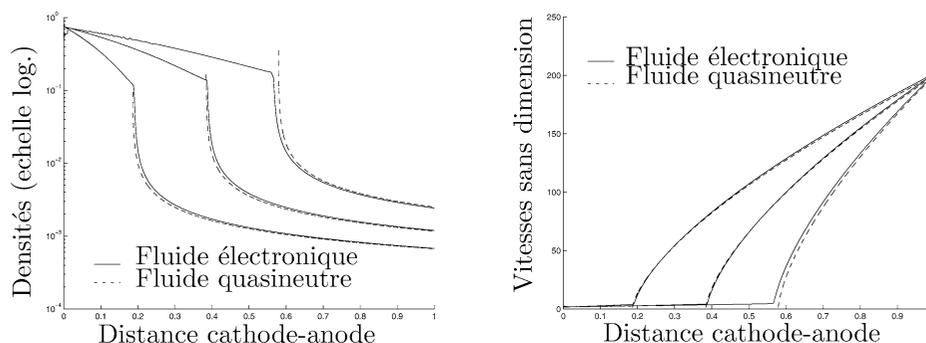


Figure 2. – Densités et vitesse du fluide électronique issues du modèle bifluide comparées à la densité et à la vitesse du plasma issues du modèle de Child–Langmuir : quantités observées entre l’interface et l’anode  $x = 1$  aux temps  $t = 0,07\tau$ ,  $t = 0,15\tau$ ,  $t = 0,24\tau$ .

*Figure 2. – Densities and speeds of the electronic fluid coming from the 2-fluid model compared to those of the Child–Langmuir model: values observed between the interface and the anode  $x = 1$  at times  $t = 0.07\tau$ ,  $t = 0.15\tau$ ,  $t = 0.24\tau$ .*

$\alpha = 0,5$ . Notons que les simulations obtenues sans cette correction donnent, pour le modèle asymptotique, des ordres de grandeur en vitesse et en densité très proches de ceux du modèle bifluide, l’interface du fluide quasineutre est simplement un peu en « retard » par rapport à celle du fluide ionique.

La Fig. 2 illustre le comportement des électrons dans le vide après la traversée de l’interface. La courbe donnant les vitesses montre leur accélération vers l’anode. Nous validons donc bien l’hypothèse que la dynamique des électrons après la traversée de l’interface s’effectue dans un régime de Child–Langmuir.

**Remerciements.** Les auteurs remercient le CEA, Centre de Bruyères-le-Châtel, pour son soutien financier ainsi que J. Segré et F. Assous, pour leur intérêt et leurs conseils.

### Références bibliographiques

- [1] S. Cordier, E. Grenier, Quasineutral limit of Euler–Poisson system arising from plasma physics, *Comm. Partial Differential Equations* 25 (5–6) (2000) 1099–1113.
- [2] P. Degond, The Child–Langmuir law in the kinetic theory of charged–particles. Part 1, Electron flows in vacuum, in: B. Perthame (Ed.), *Advances in Kinetic Theory*, World Scientific, Singapore, 1994, pp. 3–44.
- [3] P. Degond, P.F. Peyrard, G. Russo, Ph. Villedieu, Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems, *C. R. Acad. Sci. Paris* 328 (1999) 479–483.
- [4] P. Degond, P.A. Raviart, An asymptotic analysis of the one-dimensional Vlasov–Poisson system: the Child–Langmuir law, *Asymptotic Anal.* 4 (1991) 187–214.
- [5] I. Gasser, L. Hsiao, P.A. Markowich, S. Wang, Quasineutral limit of a nonlinear drift diffusion model for semiconductors, *J. Math. Anal. Appl.* 268 (2002) 184–199.
- [6] E. Godlewski, P.A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer, 1996.
- [7] H. Sze, J. Benford, W. Woo, B. Harteneck, Dynamics of a virtual cathode oscillator driven by a pinched diode, *Phys. Fluids* 29 (11) (1986) 3873–3880.
- [8] E.F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 1999.