C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 243–247

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Les formes de torsion holomorphes du complexe de de Rham

Jean-Michel Bismut

Département de mathématique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 22 mai 2002 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Jean-Michel Bismut.

Résumé Dans cette Note, on annonce l'annulation des formes de torsion analytique holomorphes du complexe de de Rham relatif d'une fibration équivariante. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 243–247.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The holomorphic torsion forms of the de Rham complex

Abstract In this Note, we announce the vanishing of the holomorphic torsion forms of the relative de Rham complex of an equivariant fibration. ***To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 243–247.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

0. Introduction

Soit $\pi : M \to S$ une submersion holomorphe de variétés complexes, de fibre compacte X, et soit E un fibré holomorphe sur M. Soit ω^M une $(1,1)$ forme fermée sur M, qui induit une métrique hermitienne h^{TX} sur TX. Soit h^E une métrique hermitienne sur E. Soit G un groupe de Lie compact agissant holomorphiquement sur M le long des fibres X. On suppose que cette action de G se relève à E et que G préserve ω^M et h^E. On suppose également que les $R^i\pi_*E$ sont localement libres sur S. Si $g \in G$, Bismut, Gillet et Soulé [6], Bismut et Köhler [7] et Ma [11] ont défini des formes de torsion analytique équivariantes holomorphes $T_g(\omega^M, h^E)$. Soit $M_g \subset M$ la sous-variété des points fixes de g, qui fibre sur S, de fibre X_g. Les formes $T_g(\omega^M, h^E)$ sont des sommes de formes de type (p,p) sur S, telles que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} T_g\left(\omega^M, h^E\right) = \mathrm{ch}_g\left(R^{\cdot}\pi_*E, h^{R^{\cdot}\pi_*E}\right) - \int_{X_g} \mathrm{Td}_g\left(TX, h^{TX}\right)\mathrm{ch}_g\left(E, h^E\right). \tag{0.1}$$

Les classes caractéristiques qui apparaissent à droite de (0.1) sont les classes apparaissant dans la formule de Lefschetz d'Atiyah et Bott [1,2], et sont évaluées en théorie de Chern–Weil en utilisant les connexions holomorphes hermitiennes correspondantes. En particulier la métrique $h^{R^{\cdot}\pi_*E}$ sur $R^{\cdot}\pi_*E$ est une version convenablement normalisée de la métrique L_2 obtenue par identification de $R^{\cdot}\pi_*E$ aux formes harmoniques qui lui correspondent par la théorie de Hodge.

Les formes $T_g(\omega^M, h^E)$ sont utilisées par Gillet et Soulé [10] dans la définition de l'image directe en théorie d'Arakelov.

Adresse e-mail : jean-michel.bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut).

S1631-073X(02)02469-X/FLA

Appliquons la construction précédente au fibré $\mathbf{Z}$-gradué $\Lambda^{\cdot}(T^*X)$. Comme les fibres X sont kählériennes, $R^{\cdot}\pi_*E$ est la cohomologie de de Rham $H^{\cdot}(X,\mathbf{C})$ des fibres X. Soit $T_g(\omega^M)$ les formes de torsion analytique holomorphes correspondantes. On vérifie facilement que (0.1) devient dans ce cas

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}T_g(\omega^M)=0. \tag{0.2}$$

Si S est compacte et kählérienne, on déduit de (0.2) que $T_g(\omega^M)$ définit une classe de cohomologie sur S.

L'objet de cette Note est d'annoncer qu'en toute généralité, les formes $T_g(\omega^M)$ sont non seulement fermées, mais exactes.

Le résultat d'annulation des formes de torsion analytique du complexe de de Rham est utilisé par Maillot et Roessler [12] dans leur calcul de hauteurs de degrés arithmétiques de fibrés associés à des fibrations semiabéliennes.

Les preuves des résultats annoncés dans cette Note sont données dans [5].

1. Algèbres extérieures et algèbres de Clifford

Soit V un espace vectoriel réel de dimension paire $n=2\ell$. On suppose que V est muni d'une forme symplectique ω, et d'une structure complexe $J\in\mathrm{End}(V)$ telle que ω est J-invariante et que J polarise ω, c'est à dire que $\omega(J\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur V. Soit $W,\overline{W}$ les espaces propres de J dans $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ relativement aux valeurs propres i et $-$i.

Si $X\in V$, si X^* correspond à V par le produit scalaire, on pose

$$c(X)=X^*-\mathrm{i}_X,\qquad \widehat{c}(X)=X^*\wedge+\mathrm{i}_X. \tag{1.1}$$

Soit [ ] le supercommutateur dans $\mathrm{End}(\Lambda^{\cdot}(V^*))$. Alors si $X,Y\in V$, on a

$$\bigl[c(X),c(Y)\bigr]=-2\langle X,Y\rangle,\qquad \bigl[\widehat{c}(X),\widehat{c}(Y)\bigr]=2\langle X,Y\rangle,\qquad \bigl[c(X),\widehat{c}(Y)\bigr]=0. \tag{1.2}$$

Les identités (1.2) font de $\Lambda^{\cdot}(V^*)$ un $c(V)$-module de Clifford à gauche et à droite.

Si $X\in W$, alors $X^*\in\overline{W}^*$. Les algèbres extérieures $\Lambda^{\cdot}(\overline{W}^*)$ et $\Lambda^{\cdot}(W^*)$ sont également des $c(V)$-modules de Clifford. Si $X\in W$, $Y\in\overline{W}$, on pose en effet

$$\begin{aligned} &c_{\overline{W}}(X)=\sqrt{2}X^*\wedge, &&c_{\overline{W}}(Y)=-\sqrt{2}\mathrm{i}_Y,\\ &c_W(X)=-\sqrt{2}\mathrm{i}_X, &&c_W(Y)=\sqrt{2}Y^*\wedge. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Soit L l'endomorphisme de $\Lambda^{\cdot}(V^*)$, $\alpha\to\omega\wedge\alpha$ et soit Λ son adjoint. Notons ici que Λ peut être considéré comme l'adjoint symplectique de L, et ne dépend donc pas de J. Soit N l'opérateur de nombre de $\Lambda^{\cdot}(V^*)$, soit $N^{(0,1)}$ et $N^{(1,0)}$ les restrictions de N à $\Lambda^{\cdot}(\overline{W}^*)$ et $\Lambda^{\cdot}(W^*)$ de telle sorte que $N=N^{(0,1)}+N^{(1,0)}$. On pose

$$\mathcal{N}=N^{(0,1)}-N^{(1,0)},\qquad M=L-\Lambda. \tag{1.4}$$

PROPOSITION 1.1. – *Si $X\in V$, on a les identités,*

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}^{-N^{(1,0)}}\,\mathrm{e}^{\pi/4M}c_{\overline{W}}(X)\,\mathrm{e}^{-\pi/4M}\,\mathrm{i}^{N^{(1,0)}}=c(X),\quad \mathrm{i}^{N^{(0,1)}}\,\mathrm{e}^{\pi/4M}c_W(X)\,\mathrm{e}^{-\pi/4M}\,\mathrm{i}^{-N^{(0,1)}}=c(X),\\ &\mathrm{i}^{-N^{(1,0)}}\,\mathrm{e}^{\pi/4M}c_W(X)\,\mathrm{e}^{-\pi/4M}\,\mathrm{i}^{N^{(1,0)}}=-\mathrm{i}\widehat{c}(X),\quad \mathrm{i}^{-N^{(1,0)}}\,\mathrm{e}^{\pi/4M}N^{(0,1)}\,\mathrm{e}^{-\pi/4M}\mathrm{i}^{N^{(1,0)}}=\frac{1}{2}\mathcal{N}+\frac{n}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}M,\\ &\mathrm{i}^{-N^{(1,0)}}\mathrm{e}^{\pi/4M}N^{(1,0)}\,\mathrm{e}^{-\pi/4M}\,\mathrm{i}^{N^{(1,0)}}=-\frac{1}{2}\mathcal{N}+\frac{n}{4}+\frac{\mathrm{i}}{2}M. \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Fibrations de Kähler et superconnexions de Levi-Civita

Soit $\pi:M\to S$ une submersion holomorphe de fibre compacte X de dimension complexe ℓ. Soit $TX=TM/S$ le fibré tangent holomorphe relatif, et $T_{\mathbf{R}}X$ le fibré réel correspondant. Soit ω^M une $(1,1)$ forme fermée sur M, qui induit sur TX une métrique hermitienne h^{TX}. Soit $T^HM\subset TM$ le fibré orthogonal à TX pour ω^M. Soit ω^X, ω^H les restrictions de ω^M à $T_{\mathbf{R}}X$, $T_{\mathbf{R}}^HM$. Alors ω^X est la forme de Kähler des fibres X. Dans la suite, on adopte les notations de la Section 1 avec $V=T_{\mathbf{R}}X$.

De l'identité $TM = T^H X \oplus TX$, on tire l'identification

$$\Lambda^{\cdot}(T_{\mathbf{R}}^* M) \simeq \pi^* \Lambda^{\cdot}(T_{\mathbf{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}(T_{\mathbf{R}}^* X). \tag{2.1}$$

Si $A \in T_{\mathbf{R}} S$, soit $A^H \in T_{\mathbf{R}}^H M$ le relevé horizontal de A. Si $A, B \in T_{\mathbf{R}} S$, on pose

$$T^H(A, B) = -P^{TX}\left[A^H, B^H\right]. \tag{2.2}$$

Par [6, Théorème 1.7], T^H est un tenseur de type $(1, 1)$.

Soit $(\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{R}), d^X)$ le complexe de de Rham des fibres X. Soit $*$ l'opérateur de dualité associé à la métrique h^{TX}. On munit $\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{R})$ du produit scalaire

$$s, s' \in \Omega^{\cdot}(X, \mathbf{R}) \to \langle s, s' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\ell}} \int_X s \wedge *s'. \tag{2.3}$$

Si $A \in T_{\mathbf{R}} S$, l'opérateur de dérivée de Lie L_{A^H} agit sur $\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{R})$. On pose

$$\nabla_U^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})} s = L_{A^H} s. \tag{2.4}$$

Alors $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$ est une connexion sur $\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{R})$. Si $(\Omega^{\cdot}(M), d^M)$ est le complexe de de Rham de M, on a l'identité

$$d^M = d^X + \nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})} + \mathrm{i}_{T^H}. \tag{2.5}$$

Comme ω^M est fermée, on vérifie facilement que ω^X est parallèle pour $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$ et que $T^H \in T_{\mathbf{R}} X$ est un champ de vecteurs de Hamiltonien ω^H. L'opérateur L associé à ω^X est donc parallèle pour $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$. Son adjoint Λ, qui est aussi son adjoint symplectique, est également parallèle pour $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$. Soit $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})*}$ la connexion adjointe de $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$ relativement au produit scalaire (2.3).

Soit $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{C}),u}$ la connexion unitaire sur $\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{C})$ qu'on construit naturellement à l'aide de $T^H M$ et de la connexion holomorphe hermitienne sur (TX, h^{TX}). On montre dans [5] l'identité non triviale

$$\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R}),u} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})} + \nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})*}\right). \tag{2.6}$$

Pour $t > 0$, on désigne par B_t la superconnexion de Levi-Civita holomorphe agissant sur $\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{C})$, construite dans [6,7,4]. On a l'identité

$$B_t = \sqrt{t}\left(\bar{\partial}^X + \bar{\partial}^{X,*}\right) + \nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{C}),u} - \frac{c_{\overline{TX}}(T^H)}{2\sqrt{2t}}. \tag{2.7}$$

Dans (2.7), $c_{\overline{TX}}(T^H)/(2\sqrt{2t})$ est une section impaire de $\Lambda^{\cdot}(T_{\mathbf{R}}^* S) \widehat{\otimes} \operatorname{End}(\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{C}))$.

Pour $t > 0$, on désigne par C_t la superconnexion construite par Bismut–Lott [8, Section 3]. Rappelons brièvement sa construction pour $t = 1$. Par (2.1), (2.5), on peut considérer d^M comme une superconnexion $C_1^{\dagger}$ sur $\Omega^{\cdot}(X, \mathbf{R})$. On définit alors la superconnexion adjointe $C_1^{\dagger *}$ relativement au produit scalaire (2.3). On pose

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(C_1^{\dagger *} + C_1^{\dagger}\right). \tag{2.8}$$

On a la formule

$$C_t = \frac{\sqrt{t}}{2}\left(d^X + d^{X,*}\right) + \nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R}),u} - \frac{c(T^H)}{2\sqrt{t}}, \tag{2.9}$$

qu'il convient de comparer à la formule (2.7) pour B_t.

Rappelons que M est défini par (1.4).

THÉORÈME 2.1. – *On a l'identité*

$$\mathrm{e}^{-\pi/4M} \mathrm{i}^{N^{(1,0)}} C_{2t}\, \mathrm{i}^{-N^{(1,0)}} \mathrm{e}^{\pi/4M} = B_t. \tag{2.10}$$

Démonstration. – On utilise la Proposition 1.1. □

La connexion $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$ induit une connexion plate $\nabla^{H^{\cdot}(X,\mathbf{R})}$ sur $H^{\cdot}(X, \mathbf{R})$, qui est la connexion de Gauss–Manin. Par identification de $H^{\cdot}(X, \mathbf{C})$ aux formes harmoniques dans la fibre et par projection orthogonale, la connexion $\nabla^{\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{C}),u}$ induit une connexion unitaire sur $(H^{\cdot}(X,\mathbf{C}), h^{H^{\cdot}(X,\mathbf{C})})$ qui préserve la décomposition de Hodge. On montre facilement cette dernière connexion est la connexion holomorphe hermitienne sur les fibrés holomorphes hermitiens $H^{(p,q)}(X,\mathbf{C})$.

3. Formes de superconnexion et annulation des formes de torsion

Soit G un groupe de Lie compact agissant holomorphiquement le long des fibres de X, et préservant toutes les données précédentes. Dans la suite, on fixe $g \in G$. On utilise le formalisme des superconnexions de Quillen [13] appliqué au fibré $\Omega^{\cdot}(X,\mathbf{C})$. En particulier, $\mathrm{Tr_s}$ désigne la supertrace. Pour $t > 0$, on pose

$$N_t^{(0,1)} = N^{(0,1)} + \frac{\mathrm{i}\omega^H}{t}. \tag{3.1}$$

Soit Φ l'endomorphisme de $\Lambda^{\cdot}(T^*_{\mathbf{R}}S) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ donné par $\alpha \to (2\mathrm{i}\pi)^{-\deg\alpha/2}\alpha$.

Pour $t > 0$, on pose

$$\begin{aligned} &\alpha_t = \Phi\,\mathrm{Tr_s}\big[g\exp\big(-B_t^2\big)\big], \qquad \beta_t = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}\pi}}\Phi\,\mathrm{Tr_s}\left[g\frac{\partial}{\partial t}B_t\exp\big(-B_t^2\big)\right],\\ &\gamma_t = \Phi\,\mathrm{Tr_s}\big[gN_t^{(0,1)}\exp\big(-B_t^2\big)\big], \qquad \delta_t = \Phi\,\mathrm{Tr_s}\big[gN^{(1,0)}\exp\big(-B_t^2\big)\big]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Alors α_t, γ_t, δ_t sont des formes sur S qui sont sommes de formes de type (p,p). En utilisant les résultats de [3], on vérifie que δ_t est une forme fermée sur S, dont la classe de cohomologie ne dépend pas de t et est égale à la classe de Chern équivariante $\sum_{0\leqslant p,q\leqslant \ell}(-1)^{p+q}p\,\mathrm{ch}_g(H^{(p,q)}(X,\mathbf{C}))$. De plus, par [6, Théorème 2.9], on sait que

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_t = -d\beta_t, \qquad \beta_t = \frac{1}{4\mathrm{i}\pi}(\partial - \overline{\partial})\frac{\gamma_t}{t}. \tag{3.3}$$

En utilisant le Théorème 2.1, on montre que

$$\alpha_t = \Phi\,\mathrm{Tr_s}\big[g\exp\big(-C_{2t}^2\big)\big], \qquad \beta_t = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}\pi}}\Phi\,\mathrm{Tr_s}\left[g\frac{\partial}{\partial t}C_{2t}\exp\big(-C_{2t}^2\big)\right]. \tag{3.4}$$

En utilisant les résultats de [8], on tire de (3.3) et (3.4) que si $L(g)$ désigne la supertrace de l'action de g sur $H^{\cdot}(X,\mathbf{R})$, alors

$$\alpha_t = L(g), \qquad d\gamma_t = 0. \tag{3.5}$$

Les formes de torsion analytique holomorphes du complexe de de Rham $T_g(\omega^M)$ sont définies dans [6, 7,9] comme la dérivée en $s = 0$ de la transformée de Mellin de γ_t. De (3.5), on tire que $T_g(\omega^M)$ est une forme fermée sur S.

THÉORÈME 3.1. – *On a l'identité*

$$\gamma_t + \delta_t = \Phi\,\mathrm{Tr_s}\left[g\,\mathrm{i}\left(2L + \frac{\omega^H}{t}\right)\exp\big(-C_{2t}^2\big)\right] + \frac{n}{2}L(g). \tag{3.6}$$

Démonstration. – On utilise la Proposition 1.1 et le Théorème 2.1. □

Soit M_g la sous-variété des points fixes de g, qui fibre sur S de fibre X_g. Soit $\mathrm{Td}_g(TX) \in H^{\cdot}(M_g,\mathbf{C})$ la classe de Todd qui apparaît dans la formule des points fixes d'Atiyah et Bott [1,2]. Soit $\mathrm{Td}'_g(TX)$ la classe dérivée de la classe de Todd équivariante, obtenue en remplaçant les classes de Chern x_i par $x_i + b$, et en dérivant en $b = 0$. Soit L le genre multiplicatif associé à la fonction $1 - \mathrm{e}^{-x}$, et soit $L_g(TX)$ la classe équivariante correspondante sur M_g.

Soit $[\gamma_t] \in H^{\cdot}(S,\mathbf{C})$ la classe de cohomologie de la forme fermée γ_t.

THÉORÈME 3.2. – *Pour tout $t > 0$, on a l'identité*

$$[\gamma_t] = \int_{X_g}\frac{\omega^M}{2\pi}c_{\max}(TX_g)\frac{1}{t} + \frac{n}{2}L(g) - \int_{X_g}\mathrm{Td}'_g(TX)L_g(TX). \tag{3.7}$$

To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 243–247

Démonstration. – On utilise la formule (3.6), le formalisme de [8] et le fait que ω^M est fermée. □

On a enfin le résultat final annoncé sur les formes $T_g(\omega^M)$.

THÉORÈME 3.3. – *Les formes $T_g(\omega^M)$ sont exactes.*

Démonstration. – Par le Théorème 3.2, $[\gamma_t]$ est un polynôme de degré 1 en t^{-1}. La transformée de Mellin d'un tel polynôme est nécessairement nulle. □

Remerciements. Jean-Michel Bismut remercie l'Institut Universitaire de France (I.U.F.) pour son soutien.

Références bibliographiques

[1] M.F. Atiyah, R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I, Ann. of Math. 86 (2) (1967) 374–407.
[2] M.F. Atiyah, R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications, Ann. of Math. 88 (2) (1968) 451–491.
[3] J.-M. Bismut, The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent. Math. 83 (1) (1986) 91–151.
[4] J.-M. Bismut, Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms, Astérisque 244 (1997) viii+275.
[5] J.-M. Bismut, Holomorphic and de Rham torsion, Preprint Université Paris-Sud, Orsay, 2002.
[6] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott–Chern forms, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 79–126.
[7] J.-M. Bismut, K. Köhler, Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas, J. Algebraic Geom. 1 (4) (1992) 647–684.
[8] J.-M. Bismut, J. Lott, Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion, J. Amer. Math. Soc. 8 (2) (1995) 291–363.
[9] J.-M. Bismut, X. Ma, Holomorphic immersions and equivariant torsion forms, Preprint Université Paris-Sud, Orsay, 2002.
[10] H. Gillet, C. Soulé, An arithmetic Riemann–Roch theorem, Invent. Math. 110 (3) (1992) 473–543.
[11] X. Ma, Submersions and equivariant Quillen metrics, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50 (5) (2000) 1539–1588.
[12] V. Maillot, D. Roessler, Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs, Preprint, 2002.
[13] D. Quillen, Superconnections and the Chern character, Topology 24 (1) (1985) 89–95.