C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 295–299

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Résolution de problèmes hyperélastiques de recalage d'images

Frédéric J.P. Richard

MAP5, Université Paris V (René Descartes), UFR de mathématiques et d'informatique, 45, rue des Saints Pères, 75270 Paris cedex 06, France

Reçu le 15 mars 2001 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Olivier Faugeras.

Résumé Nous nous intéressons à des problèmes de recalage d'images qui sont définis à partir d'énergies de déformation de matériaux hyperélastiques. Nous construisons un algorithme qui permet de résoudre les équations d'Euler–Lagrange associées à ces problèmes. Cet algorithme est exprimé sous la forme d'une EDO (Equation Différentielle Ordinaire). Nous formulons un théorème qui établit que cette EDO a une unique solution et qu'elle converge vers une solution des équations d'Euler–Lagrange. ***Pour citer cet article : F.J.P. Richard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 295–299.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Resolution of some hyperelastic image-matching problems

Abstract We focus on some image-matching problems that are based on hyperelastic strain energies. We design an algorithm that solves numerically the Euler–Lagrange equations associated to the problem. This algorithm is formulated in terms of an ODE (Ordinary Differential Equation). We give a theorem which states that the ODE has a unique solution and converges to a solution of the Euler–Lagrange equations. ***To cite this article: F.J.P. Richard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 295–299.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

1. The hyperelastic image-matching

Let U be a connected and open subspace of $\mathbb{R}^2$. Let us consider two images I^0 and I^1 mapping $\overline{U}$ into a grey level set. Let us denote $\mathcal{W}$ a subspace which is formed by smooth functions mapping $\overline{U}$ into itself (i.e. an image coordinate change space). The problem to match I^0 and I^1 is formulated in terms of the following inverse problem: find in $\mathcal{W}$ a minimum of the functionnal J that is defined by Eq. (1). The first term of J enforces the matching of the images I^0 and I^1 by constraining the deformed images I^0_ϕ (equal to $I^0 \circ \phi$) to have approximately the same grey levels as I^1. The second term is a regularity term that enforces some

Adresse e-mail : frederic.richard@math-info.univ-paris5.fr (F.J.P. Richard).

S1631-073X(02)02454-8/FLA

smoothness properties (in particular, the homeomorphic property) of solutions. The regularity terms that we are interested in are some energies of hyperelastic materials which are of the form described by Eq. (2).

In [5], Rabbitt et al. designed an algorithm to approximate the local minima of Problem 1. However, they did not prove that the problem has a local solution, nor that the algorithm converges to a solution. Moreover, the algorithm implementation, which uses the Galerkin method, is based on the choice of an approximation space that is not theoretically justified.

2. Problem resolution

In order to find a local minimum of the problem, we first derive the Euler–Lagrange equations associated to the energy J and express it in terms of a boundary value problem (Eq. (2)). We propose an algorithm for the resolution of this problem. This algorithm is designed as follows: using a weighting parameter λ in $[0,1]$, we define a family of approximate problems (Eq. (3)). We then show that the solutions in $\mathrm{C}^1([0,1];\mathcal{W})$ of the family of approximate problems are characterized as the solutions of the ODE (ordinary Differential Equation) that is described by Eq. (4). This ODE defines an algorithm for the resolution of Problem 2. Indeed, Eq. (4) is linear and can be solved numerically. Moreover, the solution of the ODE is a solution of Problem 2 when λ is equal to 1.

3. ODE convergence

We proved the following theorem:

THEOREM 1. – *Let us assume that* $2 < p < +\infty$ *and that* Γ *is of class* C^2. *Let us also assume that* Σ *is* $\mathrm{C}^2(\mathbb{M},\mathbb{R})$ *where* $\mathbb{M}$ *is the set of the* 2×2*-matrix of the form* $\frac{1}{2}(C-\mathrm{Id})$ *where* C *is a symmetrical and positive definite matrix. Let* $\mathcal{W}$ *be the following Sobolev space*: $\{v \in (\mathrm{W}^{2,p}(U))^2,\ v_{|\Gamma} = 0\}$. *Let* f *be a function which maps* $\overline{U}^2$ *into* $\mathbb{R}^2$, *is twice continuously differentiable with respect to* y *and is such that the norm* $|\partial^2_{yy} f|_\infty$ *is bounded. Under these conditions, there exist two real values* A_1 *and* A_2 *which are such that, if* $|f|_\infty$ *and* $|\partial_y f|_\infty$ *are respectively bounded by* A_1 *and* A_2, *the ODE has a unique solution* z *in* $\mathrm{C}^1([0,1],\mathcal{W})$. *Moreover,* $z(1)$ *is a solution in* $\mathcal{W}$ *of the problem defined by Eq.* (2) *and the function* $\Phi = \mathrm{Id} + z(1)$ *has a representative in the* C^1*-diffeomorphism space.*

This result shows that the Euler–Lagrange equations have a solution in the space of the homeomorph mappings. It justifies the use of the algorithm for the resolution of this problem. Besides, it gives important details about the solution space. These details enable the application of the Galerkin method to the discretization of equations and are helpful for the algorithm implementation [6,7].

---

1. Recalage hyperélastique d'images

Soit U un sous-espace ouvert et connexe de $\mathbb{R}^2$. Considérons deux images I^0 et I^1 définies sur $\overline{U}$ et à valeurs dans un ensemble de niveaux de gris. Notons $\mathcal{W}$ un espace formé d'applications régulières qui sont définies sur $\overline{U}$ et à valeurs dans $\overline{U}$ ($\mathcal{W}$ est précisé dans le Théorème 1). Les éléments ϕ de $\mathcal{W}$ sont des changements de variables d'images. Ils permettent de transformer géométriquement une image I en d'autres images I_ϕ égales à $I \circ \phi$. Faire le recalage de I^0 et de I^1 consiste à trouver un élément ϕ de $\mathcal{W}$ qui est tel que la transformée I^0_ϕ de I^0 par ϕ a des niveaux de gris similaires à ceux de I^1 en chaque point de $\overline{U}$ et qui est aussi régulier que possible. On traduit cela sous la forme du problème inverse suivant.

PROBLÈME 1 (recalage hyperélastique). – *Trouver un minimum dans $\mathcal{W}$ de la fonctionnelle J qui est définie de $\mathcal{W}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ comme suit* :

$$J(\phi) := \frac{1}{2}\int_U \big(I^0_\phi(x) - I^1(x)\big)^2\,\mathrm{d}x + \int_U W\big(\mathbf{E}\big(u(x)\big)\big)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

avec $u = \phi - \mathrm{Id}$ *et* $\mathbf{E}(u(x)) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + \nabla^t u(x) + \nabla u(x)\nabla^t u(x))$ *et* $\nabla u(x)$ *la matrice* 2×2 *de composante* $\partial u_i(x)/\partial x_j$ *sur la ligne* i *et la colonne* j.

La fonctionnelle J comporte deux termes qui se contre-balancent l'un l'autre. Le premier est un terme d'attache aux données. Il est d'autant plus faible que les niveaux de gris de la transformée I^0_ϕ sont proches de ceux de I^1. De ce fait, il exerce une contrainte qui conduit au recalage de I^0 et I^1. Le second terme ne dépend pas des images. Son rôle est d'exercer une contrainte de régularité sur les changements de variables ϕ et d'assurer principalement le caractère homéomorphe de la solution. Nous nous plaçons dans le cadre où W a la forme suivante :

$$W(E) = \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(E)\big)^2 + \mu\,\mathrm{tr}\big(EE^t\big) + \mathrm{o}\big(\|E\|^2\big). \tag{2}$$

Ainsi le terme de régularité dans l'équation (1) est-il l'énergie de déformation d'un matériau hyperélastique homogène, isotrope et pour lequel la configuration de référence est un état naturel [4].

Les énergies de déformation hyperélastiques sont introduites dans la formulation du problème pour pallier les limitations inhérentes à l'emploi d'énergies de déformation telles que celle de l'élasticité linéarisée [5,2,3] : elles étendent le champ de validité du problème aux images dont on ne peut faire le recalage qu'au moyen d'applications ϕ qui, en termes mécaniques, sont de « grandes déformations ».

En raison du choix du second terme, le Problème 1 est analogue à certains problèmes de mécanique [4]. L'existence de minima pour certains de ces problèmes analogues a été démontrée par Ball à l'aide du calcul des variations et de la théorie des fonctions polyconvexes [1,4]. Une autre approche pour aborder cette question d'existence consiste à étudier les équations d'Euler–Lagrange associées au problème de minimisation. On démontre l'existence de solutions à certaines de ces équations en leur appliquant le théorème des fonctions implicites [4]. Dans certaines situations, les solutions obtenues correspondent aux minima de l'énergie [8].

Dans [5], Rabbitt et al. proposent un algorithme pour résoudre numériquement les équations d'Euler–Lagrange associées aux problèmes hyperélastiques de recalage. Toutefois, ils ne prouvent pas que les équations admettent une solution, ni que leur algorithme converge vers une solution. Qui plus est, la mise en œuvre de l'algorithme, qui est basée sur la méthode de Galerkin, repose sur le choix d'un espace d'approximation qui n'est pas justifié théoriquement.

Dans la suite de cet article, nous nous intéressons à la résolution des équations d'Euler–Lagrange des problèmes de recalage hyperélastique. Nous construisons un algorithme de résolution et énonçons un résultat de convergence de cet algorithme vers des solutions des équations.

1.1. Résolution du problème

Supposons que les éléments ϕ de $\mathcal{W}$ sont égaux à l'identité sur la frontière Γ de U. La condition d'Euler–Lagrange du problème 1 s'écrit alors comme suit (cf. [4]).

PROBLÈME 2 (condition d'Euler–Lagrange). – *Trouver une solution dans $\mathcal{W}$ de l'équation aux dérivées partielles suivante.*

$$\mathrm{A}(u) - f(\cdot, u) = 0 \quad \textit{dans } U \textit{ et } u_{|\Gamma} = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = -\big(I^0(x+y) - I^1(x)\big)\nabla I^0_{|x+y},\\
&\mathrm{A}(u) = -\operatorname{div}\big\{(I+\nabla u)\Sigma\big[\mathbf{E}(u)\big]\big\} \quad \textit{et}\\
&\Sigma(E) = \frac{\partial W}{\partial E}(E) = \lambda\,\mathrm{tr}(E)\,\mathrm{Id} + 2\mu E + \mathrm{O}\big(\|E\|^2\big).
\end{aligned}$$

Pour résoudre cette EDP (Equation aux Dérivées Partielles) non linéaire, nous avons adapté une méthode utilisée dans [4] pour la résolution de problèmes aux limites en hyperélasticité. Cette méthode permet de ramener le problème de la résolution de l'EDP à celui de la résolution d'une suite d'équations linéaires. Le principe est le suivant : à l'aide d'un paramètre de pondération λ dans $[0,1]$, nous introduisons une suite de problèmes qui approchent le Problème 2 :

$$P(\lambda, z) = \mathrm{A}(z) - \lambda f(\cdot, z) = 0 \quad \text{dans } U,\ z = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{3}$$

On caractérise ensuite les fonctions z de $\mathrm{C}^1([0,1];\mathcal{W})$ qui sont solutions de la suite de problèmes approchés. Pour cela, on observe que les fonctions qui sont solutions sont exactement celles qui vérifient $\mathrm{d}_\lambda P(\lambda, z(\lambda)) = 0$ pour tout λ et $z(0) = 0$. Ainsi ces solutions sont-elles exactement les solutions de l'EDO (Equation Différentielle Ordinaire) suivante : pour tout λ dans $[0,1]$, $z(\lambda) = \int_0^\lambda z'(s)\,\mathrm{d}s$ avec, pour tout s dans $[0,1]$, $z'(s)$ solution en δ de l'équation aux dérivées partielles suivante.

$$\{\mathrm{dA}_{|z(\lambda)} - \lambda \partial_y f_{|(\cdot, z(\lambda))}\}[\delta] = f\big(\cdot, z(\lambda)\big), \tag{4}$$

où $\mathrm{dA}_{|z(\lambda)}$ est la dérivée de A au point $z(\lambda)$ et $\partial_y f(x,y)$ la dérivée partielle par rapport à la variable y de la fonction f. Cette EDO peut être résolue numériquement car l'équation (4) est linéaire. En outre, la solution de l'EDO pour λ égal à 1 est une solution du Problème 2. Par conséquent, l'EDO définit un algorithme permettant de résoudre numériquement le Problème 2.

1.2. Convergence de l'algorithme

Nous avons démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 1. – *Supposons que* $2 < p < +\infty$ *et que* Γ *est de classe* C^2. *Faisons l'hypothèse que* Σ *est* $\mathrm{C}^2(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ *où* $\mathbb{M}$ *désigne l'ensemble des matrices* 2×2 *de la forme* $\frac{1}{2}(C - \mathrm{Id})$ *avec C matrice symétrique définie positive. Soit* $\mathcal{W}$ *l'espace de Sobolev suivant* : $\{v \in (\mathrm{W}^{2,p}(U))^2,\ v_{|\Gamma} = 0\}$. *Soit* f *une fonction qui est définie de* $\overline{U}^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$, *deux fois continûment dérivable par rapport à la variable* y *et telle que la norme* $|\partial^2_{yy} f|_\infty$ *est bornée. Dans ces conditions, il existe deux réels* A_1 *et* A_2 *tels que, si* $|f|_\infty$ *et* $|\partial_y f|_\infty$ *sont majorés respectivement par* A_1 *et* A_2, *l'EDO admet une unique solution* z *dans* $\mathrm{C}^1([0,1], \mathcal{W})$. *En outre,* $z(1)$ *est une solution dans* $\mathcal{W}$ *du Problème* 2 *et l'application* $\Phi = \mathrm{Id} + z(1)$ *a un représentant dans l'espace des* C^1*-difféomorphismes.*

Ce résultat montre que le Problème 2 a une solution dans un espace de fonctions homéomorphes. Il justifie également l'utilisation de l'EDO comme algorithme de résolution des équations d'Euler–Lagrange. Par ailleurs, il donne des précisions sur l'espace des solutions. Ces dernières permettent d'appliquer la méthode de Galerkin pour discrétiser l'équation (4) de l'EDO et mettre en œuvre l'algorithme. La preuve complète du Théorème 1 peut être trouvée dans [6,7]. Celle-ci consiste à appliquer le théorème général d'existence et d'unicité de Cauchy–Lipschitz à l'EDO. Dans la démonstration, nous faisons appel à un théorème qui donne des propriétés générales sur l'opérateur dA [4, Théorème 6.6-1].

Remerciements. Les recherches présentées dans cet article ont été réalisées au sein de l'équipe MAP5 (FRE CNRS 2428). Je remercie vivement Madame Christine Graffigne pour ses nombreux conseils et ses suggestions avisées tout au long de ce travail.

To cite this article: F.J.P. Richard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 295–299

Références bibliographiques

[1] J. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 63 (1977) 337–403.
[2] G.E. Christensen, R.D. Rabbitt, M.I. Miller, A deformable neuroanatomy textbook based on viscous fluid mechanics, in : J. Prince, T. Runolfsson (Eds.), Proc. of the 1993 Conference on Information Science and System, Jonh Hopkins University, Baltimore, USA, 1993, pp. 211–216.
[3] G.E. Christensen, R.D. Rabbitt, M.I. Miller, Deformable templates using large deformation kinematics, IEEE Trans. Image Processing 5 (10) (1996) 1435–1447.
[4] P.G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Volume 1 : Three-Dimensional Elasticity, Stud. Math. Appl., North-Holland, Amsterdam, 1988.
[5] R. Rabbitt, J. Weiss, G. Christensen et al., Mapping of hyperelastic deformable templates using the finite element method, in : Proc. of SPIE, International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation, Vol. 2573, San Diego, CA, July 1995, pp. 252–265.
[6] F. Richard, Modèles élastiques d'ajustements d'images et applications aux paires bilatérales et temporelles de mammographies, Ph.D. thesis, University Paris 5, France, Décembre 2000.
[7] F. Richard, Modèles hyperélastiques d'ajustement d'images, Technical report, Laboratoire PRISME, Université René Descartes, February 2001.
[8] K. Zhang, Energy minimizers in nonlinear elastostatics and the implicit function theorem, Arch. Rational Mech. Anal. 114 (1991) 95–117.