C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 219–222

Théorie des nombres/*Number Theory*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

Zéros des fonctions L et formes toriques

Gilles Lachaud

Institut de mathématiques de Luminy, Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 9, France

Reçu le 6 mai 2002 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Alain Connes.

Résumé À partir d'un corps de nombres K de degré n, on définit un tore maximal T de $G = \mathrm{GL}_n$. Si χ est un caractère du groupe des classes d'idèles de K, satisfaisant des conditions adéquates, les formes toriques pour χ sont les fonctions sur $G_{\mathbf{Q}}Z_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}$, dont le coefficient de Fourier correspondant à χ par rapport au sous-groupe induit par T est nul. L'hypothèse de Riemann pour $L(s, \chi)$ est équivalente à des conditions portant sur certains espaces de formes toriques, construits à partir des séries d'Eisenstein. Enfin, on construit un espace de Hilbert et un opérateur auto-adjoint sur cet espace, dont le spectre est égal à l'ensemble des zéros de $L(s, \chi)$ sur la droite critique. ***Pour citer cet article : G. Lachaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 219–222.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Zeroes of L-functions and toric forms

Abstract An algebraic number field K defines a maximal torus T of the linear group $G = \mathrm{GL}_n$. Let χ be a character of the idele class group of K, satisfying suitable assumptions. The χ-toric form are the functions defined on $G_{\mathbf{Q}}Z_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}$ such that the Fourier coefficient corresponding to χ with respect to the subgroup induced by T is zero. The Riemann hypothesis is equivalent to certain conditions concerning some spaces of toric forms, constructed from Eisenstein series. Furthermore, we define a Hilbert space and a self-adjoint operator on this space, whose spectrum equals the set of zeroes of $L(s, \chi)$ on the critical line. ***To cite this article: G. Lachaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 219–222.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soient K un corps global et χ un caractère du groupe C_K des classes d'idèles de K (*voir* [6]). Dans [3], Connes définit un *espace de Pólya–Hilbert* pour la fonction $L(s, \chi)$ comme un couple formé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un opérateur D de $\mathcal{H}$, fermé, non borné, à domaine dense, tel que l'on ait

$$\operatorname{Spec} D = \left\{\gamma \in \mathbb{R} \mid L = \left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\gamma, \chi\right) = 0\right\}.$$

Les espaces de Pólya–Hilbert qu'il a construits dans [3], généralisés par Soulé [5], sont des espaces L^2 sur le groupe C_K. Il signale qu'il serait souhaitable de clarifier les rapports entre ces espaces et *l'espace des formes toriques* introduit par Zagier [8] : c'est ce que nous allons faire ici, en construisant un espace de Pólya–Hilbert à partir des formes toriques et des séries d'Eisenstein.

Adresse e-mail : lachaud@iml.univ-mrs.fr (G. Lachaud).

S1631-073X(02)02447-0/FLA

2. Séries d'Eisenstein

On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, et $G_\mathbb{A}$ le groupe des points de $G = \mathbf{GL}_n$ à valeurs dans $\mathbb{A}$. On note

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} g' & x \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe parabolique maximal standard de G de type $(n-1, 1)$, où $g' \in \mathbf{GL}_{n-1}$, où $t \in \mathbf{G}_m = \mathbf{GL}_1$, et où $x \in \mathbf{A}^{n-1}$. Le module de $P_\mathbb{A}$ est $\delta_P(p) = |t^{n-1}/\det g'|_\mathbb{A}$. On a $G_\mathbb{A} = P_\mathbb{A}\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ est le sous-groupe compact maximal usuel de $G_\mathbb{A}$. Si $g = p\kappa \in G_\mathbb{A}$, avec $p \in P$ et $\kappa \in \mathbf{K}$, on pose $\delta_P(g) = \delta_P(p)$. *La série d'Eisenstein normalisée* correspondant à P est

$$\mathbf{E}(g, s) = \sum_{\gamma \in P_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbb{Q}} \delta_P(\gamma g)^s, \quad g \in G_\mathbb{A}.$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et appartient à l'espace $C(X)$ des fonctions continues définies sur la *variété modulaire* $X = G_\mathbb{Q} Z_\mathbb{A} \backslash G_\mathbb{A}/\mathbf{K}$, où Z est le centre de G. La série $\mathbf{E}(g, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe de s dans $\mathbb{C}$, satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{E}(g, s) = c(s)\, \mathbf{E}\big({}^t g^{-1}, 1 - s\big), \quad \text{où } c(s) = \frac{\xi(n(1-s))}{\xi(ns)},\ \xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

et si $n = 2$, on a $\mathbf{E}({}^t g^{-1}, s) = \mathbf{E}(g, s)$. Les seuls pôles de la fonction $\xi(ns)\,\mathbf{E}(g, s)$ sont les points $s = 0$ et $s = 1$. Enfin, si $D = 4/(n(n-1))D_0$, où D_0 est l'opérateur de Casimir de l'algèbre de Lie de G, et si s n'est pas un pôle de $\mathbf{E}(g, s)$, on a $D\mathbf{E}(g, s) = s(1-s)\,\mathbf{E}(g, s)$.

3. Formes toriques

Soient k un corps de nombres algébriques, et K une extension de degré $n > 1$ de k. On note $\mathbf{T}_{K/k}$ le k-tore de dimension n représentant le groupe multiplicatif de K, tel que $\mathbf{T}_{K/k}(k') = (K \otimes_k k')^\times$ si k' est une k-algèbre. Soient $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de k, et $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de K. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une *base fondamentale* de K sur k, c'est-à-dire une base du $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{O}$, avec $\alpha_1 = 1$; une telle base existe toujours si $\mathfrak{o}$ est principal. On définit la *représentation régulière droite* π de $\mathbf{T}_{K/k}$ dans l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$ de la manière suivante : si k' est une k-algèbre et si $\xi \in \mathbf{T}_{K/k}(k')$, on note $\rho(\xi)$ la multiplication par ξ, et on pose

$${}^t\pi(\xi).u = \iota^{-1} \circ \rho(\xi) \circ \iota(u), \quad \text{où } u = (u_1, \ldots, u_n) \in k'^n \text{ et } \iota(u) = u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n \in \mathbf{T}_{K/k}(k').$$

La représentation π induit un isomorphisme de $\mathbf{T}_{K/k}$ sur un tore maximal non déployé T de G. On note $C_K = K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times$ le *groupe des classes d'idèles* de K. La représentation π induit un isomorphisme

$$C_k \backslash C_K \xrightarrow{\sim} T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k}.$$

Le *groupe* Cl_K *des classes* de K est fini. Le groupe $T_k Z_\mathbb{A} \backslash T_\mathbb{A}$ est compact, extension de $\mathrm{Cl}_k \backslash \mathrm{Cl}_K$ par un tore topologique (un produit de cercles) de dimension $n - 1$. On note X le groupe discret des caractères de

$$K^\times \mathbb{A}_k^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times / U \cong T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k} / U_T,$$

où U (resp. U_T) est le sous-groupe compact maximal de $\mathbb{A}_K^\times$ (resp. de $T_{\mathbb{A}_k}$) ; ces caractères sont non ramifiés en toute place finie de K. Si $k = \mathbb{Q}$, et si on note r_1 et r_2 le nombre de places réelles et imaginaires de K, le groupe X est extension d'un groupe libre de rang $r_1 + r_2 - 1$ par le groupe des caractères de Cl_K. Si $F \in C(X)$, le *coefficient de Fourier de* F *de fréquence* $\chi \in \mathsf{X}$ est

$$\Pi_\chi(F)(g) = \int_{T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k}} F(hg)\, \chi_\pi(h)\, \mathrm{d}h, \quad \text{où } \chi_\pi = \chi_\circ \pi^{-1},$$

et on dit que $F \in C(X)$ est une *forme torique en* χ si $\Pi_\chi(F)(g) = 0$ pour tout $g \in G_\mathbb{A}$; on note $T_\chi(X)$ l'espace de ces formes, qui ont été introduites par Zagier [8] lorsque $n = 2$ et $\chi = 1$. Soit ξ un élément primitif de K, et $\mathfrak{c}$ la classe de conjugaison de $\pi(\xi)$ dans G_k. Pour que $F \in C(X)$ soit torique pour le caractère $\chi = 1$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} F(g)\, u_{\mathfrak{c}}(g)\,\mathrm{d}g = 0, \quad \text{où } u_{\mathfrak{c}}(g) = \sum_{\gamma\in\mathfrak{c}} u\big(g^{-1}\gamma g\big)$$

est la *série orbitale* d'une fonction $u \in C_c(Z_{\mathbb{A}_k}\backslash G_{\mathbb{A}_k}/\mathbf{K})$ suffisamment régulière, auquel cas $u_{\mathfrak{c}}$ est à support compact sur X. La *formule de Hecke* (*voir* par ex. [7]) montre que $E(g,s)$ est torique en χ si $L(s,\chi) = 0$, plus précisément :

PROPOSITION 1. – *Supposons $k = \mathbb{Q}$. Si $\chi \in \mathsf{X}$ et si $g \in G_{\mathbb{A}}$, posons*

$$\int_{T_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash T_{\mathbb{A}}} \mathbf{E}(hg,s)\chi_\pi(h)\,\mathrm{d}h = L(s,\chi)H(g,s,\chi).$$

La fonction $\xi(ns)H(g,s,\chi)$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, et il existe $g_K \in G_{\mathbb{A}}$ tel que $\xi(ns)H(g_K,s,\chi)$ ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$.

4. Trains d'ondes d'Eisenstein

Un *train d'ondes d'Eisenstein* (*fini*) (ou *train d'ondes* pour simplifier) est une combinaison linéaire de séries d'Eisenstein. Plus précisément, l'espace $E(X)$ de ces trains d'ondes est formé des fonctions qui s'écrivent

$$\mathsf{W}(\mu)(g) = \int_B \mathbf{E}(g,s)\,\mathrm{d}\mu(s) \quad (g \in G_{\mathbb{A}}),$$

où μ appartient à l'espace $\mathcal{M}_n(B)$ des mesures dans la bande ouverte $B = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$, et à support fini, disjoint de l'ensemble des pôles de $\mathbf{E}(g,s)$ dans B. Lorsque $n = 2$, on note $\mathcal{M}_2^+(B)$ le sous-espace de $\mathcal{M}_2(B)$ formé des mesures telles que $\mu(1-s) = c(s)\mu(s)$. Si $F \in E(X)$ et si $n \geqslant 3$ (resp. si $n = 2$), il existe une unique mesure μ de $\mathcal{M}_n(B)$ (resp. de $\mathcal{M}_2^+(B)$) telle que $F = \mathsf{W}(\mu)$; on dit que le support de μ est le *spectre* de F, noté $\mathrm{Spec}\, F$. On déduit de la Proposition 1 :

THÉORÈME 1. – *Soit $\chi \in \mathsf{X}$. Pour que $F \in E(X)$ soit torique en χ, il faut et il suffit que*

$$\mathrm{Spec}\, F \subset \big\{s \in B \mid L(s,\chi) = 0\big\}.$$

On dit qu'un train d'ondes est *principal* si son spectre est contenu dans la *droite critique D* d'équation $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, et on note $E^1(X)$ l'espace des trains d'ondes principaux. Le Théorème 1 implique que les racines de $L(s,\chi)$ dans B sont situées sur D si et seulement si tout train d'ondes d'Eisenstein torique en χ est principal.

Arthur [1, p. 89] a défini un *opérateur de troncature* Λ^T sur l'espace $C(X)$, où T est un élément convenable de l'algèbre de Lie du tore maximal standard de G. Si H est l'élément tel que $\langle\alpha, H\rangle = 1$ pour toute racine simple α de G, on peut prendre $T = (\log m)H$ si $m > 0$ est assez grand ; on pose $\Lambda^m = \Lambda^T$. On note $\mathcal{A}^2(X)$ l'espace préhilbertien des $F \in C(X)$ telles que

$$\|F\|_2^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4\log m}\int_{G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} \big|\Lambda^m F(g)\big|^2\,\mathrm{d}g < +\infty,$$

et $A^2(X)$ l'espace de Hilbert séparé complété de $\mathcal{A}^2(X)$. On déduit des *relations de Maass–Selberg* (*cf.* par ex. [4, p. 401]) si $n = 2$, et de leur généralisation par Arthur [2, p. 70] si $n \geqslant 3$:

PROPOSITION 2. – *Si F est un train d'ondes principal non nul, alors $0 < \|F\|_2 < +\infty$, autrement dit $E^1(X) \subset A^2(X)$; si $n = 2$, on a $E^1(X) = E(X) \cap A^2(X)$.*

THÉORÈME 2. – *Soit $\chi \in \mathsf{X}$. Considérons les conditions suivantes :*

(1) *Les racines de $L(s,\chi)$ dans la bande B sont situées sur la droite critique.*
(2) *Si $s \in B$ et si $\mathbf{E}(g,s)$ est torique en χ, on a $\mathbf{E}(pg,s) = \mathrm{O}(\delta_P(p)^{1/2})$ pour tout $p \in P_{\mathbb{A}}$, uniformément lorsque g parcourt un compact de $G_{\mathbb{A}}$.*

(3) *Tout train d'ondes torique en* χ *appartient à* $\mathcal{A}^2(X)$.
On a (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). *Si* $n=2$, *les conditions* (1)–(3) *sont équivalentes.*

5. Un espace de Pólya–Hilbert modulaire

On note $T_\chi^2(X)$ l'espace de Hilbert qui est l'adhérence de $E^1(X)\cap T_\chi(X)$ dans $A^2(X)$. On note D_χ l'opérateur non borné de $T_\chi^2(X)$ défini par l'opérateur de Casimir D de G (normalisé comme ci-dessus) dont le domaine est le complété de $E^1(X)\cap T_\chi(X)$ pour la norme $\|DF\|_2$.

THÉORÈME 3. – *L'opérateur* D_χ *est un opérateur auto-adjoint de* $T_\chi^2(X)$, *et on a*

$$\operatorname{Spec} D_\chi = \left\{\lambda \mid \lambda = \tfrac{1}{4}+\gamma^2,\ \gamma\in\mathcal{Y}\right\},\quad \textit{où } \mathcal{Y}=\left\{\gamma\in\mathbb{R}\mid L\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\gamma,\chi\right)=0\right\}.$$

Si $L(1/2,\chi)=0$, *la valeur propre* $\lambda=1/4$ *est simple. Si* $n\geqslant 3$, *toute valeur propre* $\lambda\neq 1/4$ *est double, les fonctions propres étant* $\mathbf{E}(g,1/2\pm\mathrm{i}\gamma)$. *Si* $n=2$, *toute valeur propre est simple.*

Autrement dit, le couple $(T_\chi^2(X),D_\chi)$ est un espace de Pólya–Hilbert pour la fonction $L(s,\chi)$ (mis à part le changement de variables de γ à λ). On notera que le spectre de D_χ prend en compte les zéros des fonctions $L(s,\chi)$ avec une multiplicité uniforme. Or ces fonctions ont des racines multiples en général ; toutefois, ce point de vue semble compatible avec la *conjecture de simplicité de Serre* suivant laquelle les zéros de $L(s,\chi)$ dans la bande B sont simples si χ est cette fois-ci un caractère galoisien irréductible.

On note $\mathfrak{A}(G)$ l'algèbre de Hecke des fonctions $u\in C_c(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}})$ bi-invariantes sous $\mathbf{K}$ et $R(u)$ la représentation régulière droite de $\mathfrak{A}(G)$ dans $C(X)$. Si $u\in\mathfrak{A}(G)$, on a $R(u)\mathbf{E}(g,s)=\widetilde{u}(s)\mathbf{E}(g,s)$, où on a introduit la fonction entière

$$\widetilde{u}(s)=\int_{Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}}\delta_P(g)^s u(g)\,\mathrm{d}g\,;$$

on en déduit une représentation $R_\chi(u)$ de $\mathfrak{A}(G)$ dans $T_\chi^2(X)$.

COROLLAIRE 1. – *Si* $u\in\mathfrak{A}(G)$, *on a*

$$\operatorname{Tr} R_\chi(u)=\sum_{\gamma\in\mathcal{Y}}\widetilde{u}\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\gamma\right),$$

où la sommation ne porte que sur les $\gamma\geqslant 0$ *si* $n=2$.

Références bibliographiques

[1] J. Arthur, A trace formula for reductive groups II: Applications of a truncation operator, Compositio Math. 40 (1980) 87–121.
[2] J. Arthur, On the inner product of truncated Eisenstein series, Duke Math. J. 49 (1982) 35–70.
[3] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, Sel. Math. (N.S.) 5 (1999) 29–106.
[4] A.W. Knapp, Theoretical aspects of the Trace formula for GL(2), Proc. Symp. Pure Math. 61 (1997) 355–405.
[5] C. Soulé, Sur les zéros des fonctions L automorphes, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 328 (1999) 955–958.
[6] A. Weil, Basic Number Theory, Grund. Math. Wiss. Einzel., Vol. 144, Springer, Berlin, 1967.
[7] F. Wielonsky, Séries d'Eisenstein, intégrales toroïdales et une formule de Hecke, Enseign. Math. 31 (1985) 93–135.
[8] D. Zagier, Eisenstein Series and the Riemann zeta function, in: Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., Vol. 10, Tata Institut of Fundamental Research, Bombay, 1981, pp. 275–301.