C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 43–46

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*
(Analyse harmonique/*Harmonic Analysis*)

Connexions sur les espaces homogènes naturellement réductifs et leurs opérateurs de Dirac

Ilka Agricola

Institut für Reine Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Allemagne

Reçu le 3 mai 2002 ; accepté le 13 mai 2002

Note présentée par Friedrich Hirzebruch.

Résumé Étant donné un espace homogène équippé d'une métrique naturellement réductive, nous nous proposons d'étudier la famille à un paramètre de connexions qui relie la connexion canonique à celle de Levi–Civita ($t = 0, 1/2$). Nous montrerons que l'opérateur de Dirac D^t associé à la connexion définie par $t = 1/3$ coïncide avec un objet algébrique introduit récemment par B. Kostant et appelé « opérateur de Dirac cubique ». Nous calculerons le carré de D^t, généralizant ainsi la formule de Parthasarathy valide sur les espaces symétriques. Il en découlera l'existence d'un nouvel opérateur différentiel invariant de premier ordre ainsi qu'une inégalité pour la première valeur propre de $D^{1/3}$ et des applications dans la théorie des cordes. ***Pour citer cet article : I. Agricola, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 43–46.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Connections on naturally reductive spaces and their Dirac operator

Abstract Given a homogeneous space endowed with a naturally reductive metric, we study the one-parameter family of connections ∇^t joining the canonical and the Levi-Civita connection ($t = 0, 1/2$). We show that the Dirac operator D^t corresponding to $t = 1/3$ is the so-called "cubic" Dirac operator recently introduced by B. Kostant, and compute the formula for its square for any t, thus generalizing the classical Parthasarathy formula on symmetric spaces. Then, we derive from it the existence of a new invariant first order differential operator on spinors, an eigenvalue estimate for the first eigenvalue of $D^{1/3}$ and applications to string theory. ***To cite this article: I. Agricola, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 43–46.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. La famille de connexions ∇^t

Considérons un espace homogène riemannien $M = G/H$ de dimension n, et soit $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{SO}(\mathfrak{m})$ la représentation d'isotropie de M. Nous supposons que M est *réductif*, c.-à-d. que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se décompose en la somme directe d'espaces vectoriels de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H et d'un espace $\mathfrak{m}$ invariant par $\mathrm{Ad}(H)$. En identifiant $\mathfrak{m}$ à T_0M, il suffit d'étudier la restriction à $\mathfrak{m}$ de la métrique riemannienne de M, que nous noterons désormais $\langle\, ,\rangle$. Par un théorème de Wang [5, Ch. X, Thm 2.1], il existe une correspondance bijective entre les connexions métriques invariantes par G et les applications linéaires $\Lambda_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ qui sont $\mathrm{Ad}(H)$-équivariantes. Dans cette Note, nous étudierons la famille à un paramètre

Adresse e-mail : agricola@mathematik.hu-berlin.de (I. Agricola).

S1631-073X(02)02438-X/FLA

de connexions ∇^t définies par [9]

$$\Lambda^t_{\mathfrak{m}}(X)Y := t \cdot [X, Y]_{\mathfrak{m}},$$

où nous avons divisé le crochet de Lie en ses parties de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{h}$, $[X, Y] = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + [X, Y]_{\mathfrak{h}}$. Il est bien connu que la valeur $t = 0$ correspond à la *connexion canonique* ∇^0, qui, par le théorème d'Ambrose–Singer, est l'unique connexion métrique dont la torsion et la courbure sont parallèles, $\nabla^0 T^0 = \nabla^0 R^0 = 0$. Pour un espace symétrique, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ et par conséquent toutes les connexions ∇^t sont égales à la connexion de Levi-Civita.

DÉFINITION 1.1. – L'espace homogène riemannien M est dit *naturellement réductif* (par rapport à G) si l'application $[X, -]_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ est antisymétrique,

$$\big\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z\big\rangle + \big\langle Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}\big\rangle = 0.$$

Il est immédiat que la métrique est naturellement réductive si et seulement si la torsion $T^t(X, Y)$ de ∇^t, interprétée comme un tenseur $(0, 3)$,

$$T^t(X, Y, Z) := \big\langle T^t(X, Y), Z\big\rangle = (2t - 1)\big\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z\big\rangle,$$

est une 3-forme, propriété qui sera importante pour les applications en physique théorique. Par ailleurs, la valeur $t = 1/2$ correspond à la connexion de Levi-Civita. Nous supposerons désormais que la métrique soit naturellement réductive par rapport à G et que l'action de G sur M soit telle que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$. Par un théorème de Kostant [6], il en résulte que la métrique admet une extension unique Q sur $\mathfrak{g}$ qui soit invariante par $\mathrm{Ad}(G)$, et dont la restriction à $\mathfrak{h}$ – que nous noterons $Q_{\mathfrak{h}}$ – est non dégénérée (mais pas forcément définie positive). Enfin, nous supposerons que M admet une structure spinorielle homogène, c.-à-d. un relèvement $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{d} : H \to \mathrm{Spin}(\mathfrak{m})$ de la représentation d'isotropie. On notera $\tilde{\mathrm{a}}\mathrm{d} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ sa dérivée, $\kappa : \mathrm{Spin}(\mathfrak{m}) \to \mathrm{GL}(\Delta_{\mathfrak{m}})$ la représentation spin, et nous utiliserons [2] comme référence générale. Soit $Z_i, \ldots, Z_n$ une base orthonormée de $\mathfrak{m}$. Pour exprimer l'opérateur de Dirac associé à la connexion ∇^t, nous introduisons l'élément suivant de degré 3 dans l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(\mathfrak{m})$,

$$H := \sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot \tilde{\Lambda}^1_{\mathfrak{m}}(Z_i) = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k}\big\langle [Z_i, Z_j]_{\mathfrak{m}}, Z_k\big\rangle Z_i \cdot Z_j \cdot Z_k = \frac{3}{2}\sum_{i<j<k}\big\langle [Z_i, Z_j]_{\mathfrak{m}}, Z_k\big\rangle Z_i \cdot Z_j \cdot Z_k.$$

On voit alors aisément que D^t est donné par

$$D^t\psi = \sum_i Z_i \cdot Z_i(\psi) + t \cdot H \cdot \psi. \tag{1}$$

C'est cet élément de degré 3 qui inspira à B. Kostant le surnom « d'opérateur de Dirac cubique » (*voir* [7] et [3] pour les applications en théorie des cordes qui menèrent à la décourverte de cet opérateur).

2. La formule de Kostant–Parthasarathy

Si $M = G/H$ est un espace symétrique, il est bien connu que le carré de l'opérateur de Dirac satisfait une identité remarquable découverte par R. Parthasarathy [8, Prop. 3.1], [2, Ch. 3],

$$D^2 = \Omega_G + \frac{1}{8}\mathrm{scal}.$$

Ici, Ω_G désigne l'opérateur de Casimir et la courbure scalaire est égale à $\mathrm{scal} = 8 \cdot (\langle \varrho_{\mathfrak{g}}, \varrho_{\mathfrak{g}}\rangle - \langle \varrho_{\mathfrak{h}}, \varrho_{\mathfrak{h}}\rangle)$. A priori, la preuve de cette formule ne peut pas être généralisée à la situation étudiée dans cet article. Pour calculer $(D^t)^2$, il est nécessaire de calculer le carré de l'élément H et de l'opérateur de Casimir $\widetilde{C}_{\mathfrak{h}}$ de la représentation d'isotropie (qui est un objet purement algébrique) dans $\mathcal{C}(\mathfrak{m})$. De plus, il est utile de définir les deux combinaisons

$$\mathrm{Jac}_{\mathfrak{m}}(X,Y,Z) = \big[X,[Y,Z]_{\mathfrak{m}}\big]_{\mathfrak{m}} + \text{ perm. cyclique}, \quad \mathrm{Jac}_{\mathfrak{h}}(X,Y,Z) = \big[X,[Y,Z]_{\mathfrak{h}}\big] + \text{ perm. cyclique}$$

dont la somme est, bien entendue, nulle par l'hypothèse que M soit réductif.

THÉORÈME 2.1 (Formule générale de Kostant–Parthasarathy). – *Pour $n \geqslant 5$, on a*

$$\begin{aligned}\big(D^t\big)^2\psi = \Omega_{\mathfrak{g}}(\psi) &+ \frac{1}{2}(1-3t)\sum_{i,j,k}\big\langle [Z_i,Z_j]_{\mathfrak{m}}, Z_k\big\rangle Z_i\cdot Z_j\cdot Z_k(\psi)\\ &- \frac{1}{2}\sum_{i<j<k<l}\big\langle Z_i, \mathrm{Jac}_{\mathfrak{h}}(Z_j,Z_k,Z_l) + 9t^2\mathrm{Jac}_{\mathfrak{m}}(Z_j,Z_k,Z_l)\big\rangle\cdot Z_i\cdot Z_j\cdot Z_k\cdot Z_l\cdot\psi\\ &+ \frac{1}{8}\sum_{i,j} Q_{\mathfrak{h}}\big([Z_i,Z_j],[Z_i,Z_j]\big)\psi + \frac{3}{8}t^2\sum_{i,j} Q_{\mathfrak{m}}\big([Z_i,Z_j],[Z_i,Z_j]\big)\psi.\end{aligned}$$

Cette expression admet des simplifications considérables quand $t = 1/3$:

THÉORÈME 2.2 (Formule de Kostant–Parthasarathy pour $t = 1/3$). – *Pour $n \geqslant 5$ et $t = 1/3$, la formule générale pour $(D^t)^2$ se réduit à*

$$\big(D^{1/3}\big)^2\psi = \Omega_{\mathfrak{g}}(\psi) + \frac{1}{8}\left[\mathrm{scal}^{1/3} + \frac{1}{9}\sum_{i,j} Q_{\mathfrak{m}}\big([Z_i,Z_j],[Z_i,Z_j]\big)\right]\psi.$$

Cette formule est la variante géométrique de l'identité algébrique [7, Thm 2.13]. Le terme « diagonal » n'y apparaît pas à cause de l'identification des spineurs avec les sections du fibré $S = G \times_{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \Delta_{\mathfrak{m}}$. Elle se réduit à la formule classique de Parthasarathy au cas où M est symétrique. En corollaire, on déduit immédiatement :

COROLLAIRE 2.3. – *L'opérateur différentiel de premier ordre*

$$\mathcal{D}\psi := \sum_{i,j,k}\big\langle [Z_i,Z_j]_{\mathfrak{m}}, Z_k\big\rangle Z_i\cdot Z_j\cdot Z_k(\psi)$$

est G-invariant et n'existe que sur les espaces homogènes non symétriques.

Si le groupe G est compact, il est possible d'étudier le produit scalaire Q plus en détail. Brièvement parlant, Q est – à un scalaire non nul près – la somme directe des formes de Killing de chaque facteur simple ou abélien de G, et les scalaires en question peuvent varier d'un facteur à l'autre, de sorte que la métrique totale n'est *pas* la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et ne doit pas être définie positive. On peut alors exprimer le terme scalaire dans la formule du Théorème 2.2 en d'autres termes,

$$\mathrm{scal}^{1/3} + \frac{1}{9}\sum_{i,j} Q_{\mathfrak{m}}\big([Z_i,Z_j],[Z_i,Z_j]\big) = Q(\varrho_{\mathfrak{g}},\varrho_{\mathfrak{g}}) - Q(\varrho_{\mathfrak{h}},\varrho_{\mathfrak{h}}),$$

et cette expression montre que qu'il est *toujours* strictement positif, même si Q n'est pas définie positive. En particulier, cette constante ne dépend pas du signe de la courbure scalaire. Comme la valeur propre de l'opérateur de Casimir ne dépend pas des facteurs abéliens de G, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est non négatif si la partie définie négative de Q est concentrée sur les facteurs abéliens de $\mathfrak{g}$.

COROLLAIRE 2.4. – *Si l'opérateur $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est non négatif, la première valeur propre $\lambda_1^{1/3}$ de l'opérateur $D^{1/3}$ satisfait l'inégalité*

$$\left(\lambda_1^{1/3}\right)^2 \geqslant Q(\varrho_{\mathfrak{g}}, \varrho_{\mathfrak{g}}) - Q(\varrho_{\mathfrak{h}}, \varrho_{\mathfrak{h}}). \tag{2}$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe un spineur algébrique dans $\Delta_{\mathfrak{m}}$ qui est invariant par la représentation d'isotropie $\kappa(\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{d}H)$.

Exemple 1. – Sur la variété de Stiefel $V_{4,2} = \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2) = (\mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(2))/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2))$, il existe une famille de métriques naturellement réductives par rapport à $\mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(2)$ qui dépend d'un paramètre $s > 0$ [4]. Le terme scalaire apparaissant dans le Théorème 2.1 a la valeur $1 + (9t^2 - 1)s$ et ne dépend pas de s que pour $t = 1/3$. En ce cas, l'opérateur $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est non négatif, et pour $s \neq 1/2$, il n'y a pas de spineurs constants, l'inégalité (2) est donc stricte. Néanmoins, la courbure scalaire riemannienne est négative pour s suffisament large.

3. Applications en théorie des cordes

En théorie des cordes, il est d'intérêt de construire des variétés spinorielles riemanniennes (M, g) admettant une 3-forme T et un champ de spineurs ψ tels que la connexion métrique ∇ ayant T pour torsion satisfait [10]

$$\mathrm{Ric}^{\nabla} = 0, \qquad \nabla\psi = 0, \qquad H \cdot \psi = 0.$$

On démontre à l'aide de la formule classique de Schrödinger–Lichnerowicz que ce système n'admet pas de solutions compactes. Pour les espaces homogènes compacts étudiés dans cet article, le corollaire implique même :

COROLLAIRE 3.1. – *Si l'opérateur $\Omega_{\mathfrak{g}}$ est non négatif, les équations*

$$\nabla^t\psi = 0, \qquad T^t \cdot \psi = 0,$$

ne peuvent être satisfaites que pour la connexion de Levi-Civita ($t = 1/2$).

Remerciements. Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance envers Thomas Friedrich (Berlin), avec qui j'ai souvent pu discuter du sujet traité dans cet article. En un certain sens, cette note est complémentaire à l'article [1] de Friedrich et Ivanov.

Références bibliographiques

[1] Th. Friedrich, S. Ivanov, Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory, SFB 288 preprint Nr. 492, 2001, math.DG/0102142, à paraître dans Asian J. Math.
[2] Th. Friedrich, Dirac Operators in Riemannian Geometry, Grad. Stud. Math., Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
[3] B.H. Gross, B. Kostant, P. Ramond, S. Sternberg, The Weyl character formula, the half spin representations, and equal rank subgroups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 95 (15) (1998) 8441–8442.
[4] G. Jensen, Imbeddings of Stiefel manifolds into Grassmannians, Duke Math. J. 42 (3) (1975) 397–407.
[5] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry II, Wiley Classics Library, Wiley, Princeton, 1969, 1996.
[6] B. Kostant, On differential geometry and homogeneous spaces II, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 42 (1956) 354–357.
[7] B. Kostant, A cubic Dirac operator and the emergence of Euler number multiplets of representations for equal rank subgroups, Duke Math. J. 100 (3) (1999) 447–501.
[8] R. Parthasarathy, Dirac operator and the discrete series, Ann. of Math. 96 (1) (1972) 1–30.
[9] S. Slebarski, The Dirac operator on homogeneous spaces and representations of reductive Lie groups I, Amer. J. Math. 109 (1987) 283–301.
[10] A. Strominger, Superstrings with torsion, Nuclear Phys. B 274 (1986) 253–284.