

# Sur le Spectre de Fučik du $p$ -Laplacien avec des poids indéfinis

Mohssine Alif

60, av. Yacoub El Mansour, Résidence Abbès, Meknès, Maroc

Reçu le 11 mars 2002 ; accepté le 15 avril 2002

Note présentée par Haïm Brezis.

---

## Résumé

On étudie le spectre de Fučik  $\Sigma$  du  $p$ -Laplacien en dimension un et en présence de deux fonctions-poids qui peuvent changer de signe. Quelques nouveaux résultats concernant la description et le comportement asymptotique de  $\Sigma$  sont obtenus. *Pour citer cet article : M. Alif, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1061–1066.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## On the Fučik spectrum of the $p$ -Laplacian with indefinite weights

## Abstract

We study the Fučik spectrum  $\Sigma$  of the one-dimensional  $p$ -Laplacian with indefinite weights. Some new results concerning the description and the asymptotic behaviour of  $\Sigma$  are obtained. *To cite this article : M. Alif, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1061–1066.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

In this paper, we present some properties of the so-called Fučik spectrum  $\Sigma$  associated to the following non-linear problem with indefinite weights

$$\begin{cases} Lu = \alpha m(t)(u^+)^{p-1} - \beta n(t)(u^-)^{p-1} & \text{in } ]T_1, T_2[, \\ Au(T_1) = 0 = Au(T_2). \end{cases} \quad (\text{P})$$

Here:  $Lu := -[a(t)f_p(u')]'$ ;  $f_p(s) := |s|^{p-2}s$ ;  $a, m$  and  $n \in C([T_1, T_2])$ ;  $a > 0$ ,  $m \neq 0$  and  $n \neq 0$  in  $[T_1, T_2]$ ;  $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$ ;  $1 < p < +\infty$  and  $u^\pm := \max\{\pm u, 0\}$ . We consider both Dirichlet and Neumann boundary conditions where  $Au := u$  and  $Au := u'$  respectively.  $\Sigma$  is defined as the set of those  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  for which (P) has a non-trivial solution  $u$ .

Suppose finally that both  $m$  and  $n$  have no “singular points” in the following sense:

if  $m(t) = 0$  for some  $t \in [T_1, T_2]$ , then there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $m \in C^1([T_1, T_2] \cap ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$  and  $m'(t) := \lim_{[T_1, T_2] \cap ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \ni s \rightarrow t} m(s)/s \neq 0$ . Similarly for  $n$ .

The last “technical” hypothesis on  $m$  and  $n$  allows us to use the shooting method on which our approach in this paper is based.

We give some informations concerning the global distribution of  $\Sigma$ . For instance, in the particular case where  $m \equiv n$  and  $m$  changes sign in  $[T_1, T_2]$ , we show that, besides the four trivial horizontal and vertical lines passing through  $(\lambda_{-1}^m, \lambda_{-1}^m)$  and  $(\lambda_1^m, \lambda_1^m)$ ,  $\Sigma$  is made of a double-sequence of hyperbolic like curves in

---

Adresse e-mail : mohssine.alif@wanadoo.ma (M. Alif).

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  passing through  $(\lambda_k^m, \lambda_k^m)$  and a double-sequence of hyperbolic like curves in  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$  passing through  $(\lambda_{-k}^m, \lambda_{-k}^m)$ ,  $k \geq 2$ , together with a *non-zero finite* number of additional hyperbolic like curves which appear in each one of the other quadrants  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  and  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ . The number of these additional curves depends (only) on the number of changes of sign of  $m$  in  $[T_1, T_2]$ . More precisely, if  $m$  changes sign  $N (\in \mathbb{N})$  times, then we get exactly  $(2N - 1)$ -curves in  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  and also in  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ . Here  $(\lambda_{\pm k}^m)_{k \in \mathbb{N}^*}$  is the sequence of the eigenvalues of the problem:  $Lu = \lambda m(t) f_p(u)$  in  $]T_1, T_2[$ ,  $Au(T_1) = 0 = Au(T_2)$ . In fact, all the above curves can be classified according to the number of zeros of the corresponding solutions of (P).

We also obtain some informations on the asymptotic behaviour of the Fučík spectrum. For instance, in the Dirichlet case, if  $m^+ \neq 0$  and  $n^+ \neq 0$  in  $]T_1, T_2[$ , then we show that there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $(\Sigma \setminus ((\{\lambda_1^m\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{\lambda_1^n\}))) \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \subset ]\lambda_1^m + \varepsilon, +\infty[ \times ]\lambda_1^n + \varepsilon, +\infty[$  if and only if both  $m^+$  and  $n^+$  have compact supports in  $]T_1, T_2[$ . Whereas, in the Neumann case, the existence of such an  $\varepsilon$  is always true even if  $m^+$  or  $n^+$  does not have compact support.

## 1. Introduction et notations

Soient  $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$  et  $1 < p < +\infty$  et soient  $a, m$  et  $n \in C([T_1, T_2])$  tels que  $a > 0$  sur  $[T_1, T_2]$ ,  $m$  et  $n \neq 0$ . Supposons en plus que  $m$  et  $n$  satisfont toutes les deux à la condition suivante :

(H) si  $m(t) = 0$ ,  $t \in [T_1, T_2]$ , alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $m \in C^1([T_1, T_2] \cap ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$  et  $m'(t) := \lim_{[T_1, T_2] \cap ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \ni s \rightarrow t} m(s)/s \neq 0$ . De même pour  $n$ .

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude du spectre de Fučík  $\Sigma$  associé au problème (P) où :

$u^\pm := \max\{\pm u, 0\}$ ,  $Au := u$  dans le cas Dirichlet et  $Au := u'$  dans le cas Neumann et  $L$  est défini par  $Lu := -[a(t) f_p(u')]'$  avec  $f_p(s) := |s|^{p-2}s$ .  $\Sigma$  est l'ensemble des paires  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  telles que (P) a au moins une solution non triviale  $u$ .

Nous étendons, en quelque sorte, au cas général des résultats récents obtenus dans [2] et [3] dans le cas particulier où  $p = 2$  (voir aussi [1]). Nous démontrons, en particulier, que si  $m \equiv n$  et si  $m$  change de signe dans  $[T_1, T_2]$ , alors  $\Sigma$  est composé de quatre droites (deux horizontales et deux verticales), de deux double-suites de courbes de type hyperbole dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et dans  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$  ainsi qu'un nombre fini  $\neq 0$  de courbes additionnelles qui apparaissent dans chacun des deux quadrants  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ . Ce nombre dépend (uniquement) du nombre de changements de signe de  $m$  dans  $[T_1, T_2]$  : si  $m$  change de signe  $N (\in \mathbb{N})$  fois, alors  $\Sigma$  contient exactement  $(2N - 1)$ -courbes de type hyperbole dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  et dans  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ .

Ensuite, nous étudions le comportement asymptotique des premières courbes du spectre i.e. celles qui sont les plus proches des droites triviales de  $\Sigma$ .

Finalement, notons que l'hypothèse (H) est purement technique. Elle nous permet d'utiliser la méthode de « shooting » sur laquelle est basée notre approche dans ce travail. Plus précisément, nous l'utilisons dans le paragraphe suivant pour démontrer l'unicité des solutions  $u$  et  $v$  du problème à valeurs initiales. En revanche, dans le cas particulier où  $p = 2$ , l'unicité de  $u$  et de  $v$  est une conséquence directe des résultats standards de la théorie des EDO. C'est pour cette raison que l'hypothèse (H) n'est pas utilisée dans [1,2] et [3].

## 2. Fonctions-zéros

Dans la suite de cette section, nous étendons les fonctions  $a$  et  $m$  de  $[T_1, T_2]$  à  $\mathbb{R}$  tout en gardant la continuité et la condition (H) sur  $m$  : si  $m(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $m \in C^1(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$  et  $m'(t) \neq 0$ . Nous gardons aussi le fait que  $a_1 \leq a(t) \leq a_2$ , où  $a_1 > 0$  et  $a_2$  sont des constantes.

Étant donné  $s \in \mathbb{R}$ , on a l'existence et l'unicité de deux solutions  $u(t) := u(t; \alpha, s)$  et  $v(t) := v(t; \alpha, s)$  du problème à valeurs initiales :  $Lu = \alpha m(t) f_p(u)$  avec  $u(s) = 0$ ,  $u'(s) = 1$ ,  $v(s) = 1$  et  $v'(s) = 0$ . En plus,  $u$  et  $v$  sont continues par rapport à chacune des deux variables  $\alpha$  et  $s$ .<sup>1</sup> Bien évidemment,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  par rapport à  $t$ .

Définissons les trois fonctions-zéros  $\varphi$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  par :  $\varphi_\alpha(s) := \min\{t > s : u(t; \alpha, s) = 0\}$ ,  $\psi_1(\alpha) := \min\{t > T_1 : v(t; \alpha, T_1) = 0\}$  et  $\psi_2(\alpha) := \sup\{t < T_2 : v(t; \alpha, T_2) = 0\}$ , avec  $\varphi_\alpha(s)$  (resp.  $\psi_1(\alpha)$ ) =  $+\infty$  dans le cas où  $u(t; \alpha, s)$  (resp.  $v(t; \alpha, T_1)$ ) n'a aucun zéro  $> s$  (resp.  $> T_1$ ). De même,  $\psi_2(\alpha) = -\infty$  si  $v(t; \alpha, T_2)$  ne s'annule en aucun point  $t < T_2$ .

Posons  $A := \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\alpha(s) < +\infty\}$ ,  $B_1 := \{\alpha \in \mathbb{R} : \psi_1(\alpha) < +\infty\}$  et  $B_2 := \{\alpha \in \mathbb{R} : \psi_2(\alpha) > -\infty\}$  et notons  $\gamma_s^> := \inf\{t > s : m(t) > 0\}$  et  $\gamma_s^< := \inf\{t > s : m(t) < 0\}$  avec la convention «  $\inf \emptyset = +\infty$  ». Il est bien clair que si  $m(s) \leq 0$  (resp.  $m(s) \geq 0$ ) et si  $m^+ \neq 0$  (resp.  $m^- \neq 0$ ) dans  $]s, +\infty[$ , alors  $\gamma_s^>$  (resp.  $\gamma_s^<$ ) est la borne inférieure de la première bosse positive (resp. négative) de  $m(t)$  située à droite de  $s$ .

LEMME. – Les fonctions-zéros  $\varphi$  et  $\psi_1$  se réjouissent des propriétés suivantes :

- (1)  $\varphi$  et  $\psi_1$  sont continues.
- (2) –  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_\alpha(s)$  est  $\nearrow$  par rapport à  $s$ , strictement dans  $A$ ,  
 –  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_\alpha(s)$  est  $\searrow$  par rapport à  $\alpha \geq 0$ , strictement dans  $A$ ,  
 –  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_\alpha(s)$  est  $\nearrow$  par rapport à  $\alpha \leq 0$ , strictement dans  $A$ ,  
 –  $\psi_1$  est  $\searrow$  dans  $\mathbb{R}^+$ , strictement dans  $B_1 \cap \mathbb{R}^+$ ,  
 –  $\psi_1$  est  $\nearrow$  dans  $\mathbb{R}^-$ , strictement dans  $B_1 \cap \mathbb{R}^-$ .
- (3) –  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(s) = \gamma_s^>$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi_\alpha(s) = \gamma_s^<$ ,  
 –  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi_1(\alpha) = \gamma_{T_1}^>$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \psi_1(\alpha) = \gamma_{T_1}^<$ .
- (4) –  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha(s) = +\infty$ ,  
 –  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi_1(\alpha) = +\infty$ .

Démonstration. – (1) Il n'est pas difficile de prouver la continuité de  $\varphi$  et de  $\psi_1$ .

(2) Les preuves des assertions de (2) sont semblables. Elles sont basées essentiellement sur la fameuse identité de Picone (cf. [4]). Nous allons donc nous restreindre à la preuve de la première. Soient  $s \leq \tilde{s}$ . Supposons par contradiction que  $\varphi_\alpha(s) > \varphi_\alpha(\tilde{s})$ . Alors de l'identité de Picone (cf. Théorème 1.1, [4]) il vient que  $|\tilde{u}'|^p - (\tilde{u}^p/u^{p-1})' f_p(u') \geq 0$  dans  $]\tilde{s}, \varphi_\alpha(\tilde{s})[$ . Par suite

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\tilde{s}}^{\varphi_\alpha(\tilde{s})} a(t) |\tilde{u}'(t)|^p dt - \int_{\tilde{s}}^{\varphi_\alpha(\tilde{s})} \left( \frac{\tilde{u}^p}{u^{p-1}} \right)'(t) (a(t) f_p[u'(t)]) dt \\ &= - \int_{\tilde{s}}^{\varphi_\alpha(\tilde{s})} [a(t) f_p(\tilde{u}')] \tilde{u}'(t) dt + \int_{\tilde{s}}^{\varphi_\alpha(\tilde{s})} (-\alpha) m(t) [\tilde{u}(t)]^p dt = 0. \end{aligned}$$

D'où  $|\tilde{u}'|^p - (\tilde{u}^p/u^{p-1})' f_p(u') = 0$  sur  $]\tilde{s}, \varphi_\alpha(\tilde{s})[$ . Le même Théorème 1.1 dans [4] entraîne que  $\tilde{u} = ku$  sur  $]\tilde{s}, \varphi_\alpha(\tilde{s})[$  où  $k$  est une constante. On en déduit, par continuité, que  $u[\varphi_\alpha(\tilde{s})] = 0$ ; ce qui est absurde avec le fait que  $\varphi_\alpha(s) > \varphi_\alpha(\tilde{s})$ . La preuve de la stricte monotonie dans  $A$  est tout à fait similaire.

(3) Supposons tout d'abord que  $m(s) > 0$  et soit  $\varepsilon > 0$  assez petit. Alors, puisque  $m$  est continue,  $m > 0$  sur  $[s, s + \varepsilon]$  et  $\exists A_\varepsilon > 0$  tel que  $\alpha m(t) \geq a_2(p-1)(\pi_p/\varepsilon)^p$ ,  $\forall \alpha \geq A_\varepsilon$  et  $\forall t \in [s, s + \varepsilon]$ , où  $\pi_p := 2 \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}} = \frac{2\pi}{p \sin \pi/p}$ . Il est clair que la fonction  $v(t) := \sin_p(\pi_p \frac{t-s}{\varepsilon})$  est une solution du problème :  $-[f_p(v')] = (p-1)(\pi_p/\varepsilon)^p f_p(v)$  qui s'annule en  $s$  et en  $s + \varepsilon$ . L'identité de Picone appliquée à  $u$  et  $v$  entraîne que  $s < \varphi_\alpha(s) \leq s + \varepsilon$ ,  $\forall \alpha \geq A_\varepsilon$ . On en déduit que  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(s) = s$ .

Revenons au cas général où  $s$  est un point quelconque de  $\mathbb{R}$  et supposons que  $m^+ \neq 0$  sur  $]s, +\infty[$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors par continuité de  $m$ , il existe  $s_\varepsilon \in ]\gamma_s^>, \gamma_s^> + \varepsilon[$  tel que  $m(s_\varepsilon) > 0$ . On déduit de ce qui précède qu'il existe  $A_\varepsilon > 0$  tel que  $\varphi_\alpha(s) < \varphi_\alpha(s_\varepsilon) \leq s_\varepsilon + \varepsilon \leq \gamma_s^> + 2\varepsilon$  pour tout  $\alpha \geq A_\varepsilon$ . Ensuite, nous démontrons que  $\varphi_\alpha(s) > \gamma_s^>$ , ce qui nous permet de conclure. En effet, pour voir que  $\varphi_\alpha(s) > \gamma_s^>$ , il suffit d'appliquer une autre fois l'identité de Picone à  $u$  et à toute fonction  $v$  de la forme  $v(t) = c_1 t + c_2$ ,  $c_1$  et  $c_2 \in \mathbb{R}$ , qui est bien évidemment une solution de l'équation  $-[f_p(v')] = 0$ . Si  $m^+ \equiv 0$  dans  $]s, +\infty[$ , alors on démontre que  $\varphi_\alpha(s) = +\infty = \gamma_s^>$ . La preuve du fait que  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi_\alpha(s) = \gamma_s^<$  est tout à fait similaire.

D'autre part, en utilisant l'identité de Picone, nous démontrons que  $\psi_1(\alpha) \geq \gamma_{T_1}^>$  et que  $\psi_1(\alpha) \leq \varphi_\alpha(T_1)$ . D'où l'on tire de ce qui précède que  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi_1(\alpha) = \gamma_{T_1}^>$ . De même, on démontre que  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \psi_1(\alpha) = \gamma_{T_1}^<$ .

(4) Supposons que  $\alpha > 0$  (si  $\alpha < 0$ , alors il suffit de considérer  $-m$ ). Soit  $R > 0$ , alors il existe  $\varepsilon_R > 0$  tel que  $\alpha m(t) \leq a_1(p-1)(\pi_p/R)^p, \forall \alpha \leq \varepsilon_R$ . La fonction  $v(t) := \sin_p(\pi_p \frac{t-s}{R})$  est une solution de l'équation  $-[f_p(v')] = (p-1)(\pi_p/R)^p f_p(v)$  dont  $s$  et  $s+R$  sont deux zéros consécutifs. En utilisant une autre fois l'identité de Picone, nous démontrons que, pour tout  $0 < \alpha \leq \varepsilon_R, \varphi_\alpha(s) \geq s+R$ . D'où l'on tire que,  $\forall s \in \mathbb{R}, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha(s) = +\infty$ . Le deuxième point peut être démontré par le même procédé.  $\square$

*Remarque.* – Les propriétés de  $\psi_2$  peuvent être déduites de celles de  $\psi_1$  en faisant le changement de variable «  $\tilde{t} = -t$  ». On obtient ainsi les résultats suivants :

- (1)  $\psi_2 : B_2 \mapsto \mathbb{R}$  est continue,
- (2)  $\psi_2$  est  $\nearrow$  (resp.  $\searrow$ ) dans  $\mathbb{R}_+$  (resp.  $\mathbb{R}_-$ ), strictement dans  $B_2 \cap \mathbb{R}_+$  (resp.  $B_2 \cap \mathbb{R}_-$ ),
- (3)  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \psi_2(\alpha) = \sup\{t < T_2 : m(t) > 0\}$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \psi_2(\alpha) = \sup\{t < T_2 : m(t) < 0\}$ ,
- (4)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi_2(\alpha) = -\infty$ .

Pour clôturer cette section, notons qu'il est bien clair que les restrictions de  $\varphi_\alpha$  sur  $\{s \in [T_1, T_2] : \varphi_\alpha(s) \in [T_1, T_2]\}$ , de  $\psi_1$  sur  $\{\alpha \in \mathbb{R} : \psi_1(\alpha) \in [T_1, T_2]\}$  et de  $\psi_2$  sur  $\{\alpha \in \mathbb{R} : \psi_2(\alpha) \in [T_1, T_2]\}$  ne dépendent pas des extensions du coefficient  $a$  et de la fonction-poids  $m$  introduites au début de cette section. Par ailleurs, puisque  $\varphi, \psi_1$  et  $\psi_2$  dépendent de la fonction-poids  $m$ , nous allons désormais les noter par  $\varphi^m, \psi_1^m$  et  $\psi_2^m$  (respectivement). De même, nous allons noter par  $\lambda_1^m$  et  $\lambda_{-1}^m$  les valeurs propres principales positive et négative (respectivement) de l'opérateur  $L$  en présence du poids  $m$ .

### 3. Problème non-linéaire avec poids

Considérons dans ce paragraphe le problème non-linéaire (P). Les zéros de toute solution nontriviale de (P) sont isolés. Nous pouvons donc classifier ces solutions selon leurs nombres de zéros dans l'intervalle  $]T_1, T_2[$ . Ceci nous amène à la description suivante du spectre de Fučík :  $\Sigma = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (C_k^> \cup C_k^<)$ , où  $C_k^>$  (resp.  $C_k^<$ ) est l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que (P) a une solution nontriviale  $u$  qui a exactement  $k$ -zéros dans  $]T_1, T_2[$  et qui se termine positivement (resp. négativement), i.e. telle que  $u > 0$  (resp.  $u < 0$ ) sur  $]T_2 - \varepsilon, T_2[$ ,  $\varepsilon > 0$ , étant assez petit.

Par ailleurs, si  $(\alpha, \beta) \in C_k^>$  (resp.  $C_k^<$ ), alors toutes les solutions de (P) qui se terminent positivement (resp. négativement) sont multiples l'une de l'autre. Nous pouvons donc décrire les ensembles  $C_k^>$  et  $C_k^<$  comme ce qui suit :

$$\begin{aligned} C_0^> &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\alpha^m(T_1) = T_2\}, & C_0^< &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\beta^n(T_1) = T_2\}, \\ C_1^> &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n(T_1)] = T_2\}, & C_1^< &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m(T_1)] = T_2\}, \\ C_2^> &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m(T_1)]] = T_2\}, & C_2^< &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n(T_1)]] = T_2\}, \end{aligned}$$

etc., dans le cas Dirichlet, et

$$\begin{aligned} C_1^> &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1^n(\beta) = \psi_2^m(\alpha)\}, & C_1^< &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1^m(\alpha) = \psi_2^n(\beta)\}, \\ C_2^> &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\beta^n[\psi_1^m(\alpha)] = \psi_2^m(\alpha)\}, & C_2^< &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\alpha^m[\psi_1^n(\beta)] = \psi_2^n(\beta)\}, \end{aligned}$$

etc., dans le cas Neumann.

Il est bien clair que dans les deux cas Dirichlet et Neumann, si  $m^+ \equiv 0$  (resp.  $n^+ \equiv 0$ ) dans  $[T_1, T_2]$ , alors  $C_0^> = \{\lambda_{-1}^m\} \times \mathbb{R}$  (resp.  $C_0^< = \mathbb{R} \times \{\lambda_{-1}^n\}$ ). De même, si  $m^- \equiv 0$  (resp.  $n^- \equiv 0$ ) dans  $[T_1, T_2]$ , alors  $C_0^> = \{\lambda_1^m\} \times \mathbb{R}$  (resp.  $C_0^< = \mathbb{R} \times \{\lambda_1^n\}$ ). Et si  $m^+ \neq 0$  et  $m^- \neq 0$  (resp.  $n^+ \neq 0$  et  $n^- \neq 0$ ) dans  $[T_1, T_2]$ , alors  $C_0^> = (\{\lambda_1^m\} \times \mathbb{R}) \cup (\{\lambda_{-1}^m\} \times \mathbb{R})$  (resp.  $C_0^< = (\mathbb{R} \times \{\lambda_1^n\}) \cup (\mathbb{R} \times \{\lambda_{-1}^n\})$ ). Désormais, nous allons noter par  $\Sigma^*$  le spectre  $\Sigma$  dépourvu de ces droites triviales. Si, par exemple,  $m$  et  $n$  changent de signe dans  $[T_1, T_2]$ , alors il résulte des propriétés de monotonie des fonctions-zéros que  $\Sigma^* \cap \{([\lambda_{-1}^m, \lambda_1^m] \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times [\lambda_{-1}^n, \lambda_1^n])\} = \emptyset$ .

Dans la suite, il nous conviendra d'utiliser les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_0^>(\alpha, \beta)(s) &= \varphi_\alpha^m(s), & \Phi_1^>(\alpha, \beta)(s) &= \varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n(s)], & \Phi_2^>(\alpha, \beta)(s) &= \varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m(s)]], & \dots \\ \Phi_0^<(\alpha, \beta)(s) &= \varphi_\beta^n(s), & \Phi_1^<(\alpha, \beta)(s) &= \varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m(s)], & \Phi_2^<(\alpha, \beta)(s) &= \varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n(s)]], & \dots \\ \Psi_1^>(\alpha, \beta) &= \psi_1^n(\beta), & \Psi_2^>(\alpha, \beta) &= \varphi_\beta^n[\psi_1^m(\alpha)], & \Psi_3^>(\alpha, \beta) &= \varphi_\beta^n[\varphi_\alpha^m[\psi_1^n(\beta)]], & \dots \\ \Psi_1^<(\alpha, \beta) &= \psi_1^m(\alpha), & \Psi_2^<(\alpha, \beta) &= \varphi_\alpha^m[\psi_1^n(\beta)], & \Psi_3^<(\alpha, \beta) &= \varphi_\alpha^m[\varphi_\beta^n[\psi_1^m(\alpha)]], & \dots \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $k \geq 1$ ,  $C_k^> = \{(\alpha, \beta) : \Phi_k^>(\alpha, \beta)(T_1) = T_2\}$  et  $C_k^< = \{(\alpha, \beta) : \Phi_k^<(\alpha, \beta)(T_1) = T_2\}$  (resp.  $C_k^> = \{(\alpha, \beta) : \Psi_k^>(\alpha, \beta) = \psi_2^m(\alpha)\}$  et  $C_k^< = \{(\alpha, \beta) : \Psi_k^<(\alpha, \beta) = \psi_2^n(\beta)\}$ ) dans le cas Dirichlet (resp. Neumann).

Tenant compte de ces formulations de  $C_k^>$  et  $C_k^<$ ,  $k \geq 1$ , par l'intermédiaire des deux fonctions-zéros  $\varphi$  et  $\psi$  et utilisant les propriétés de ces deux dernières (voir paragraphe 2), nous procédons comme il a été fait lorsque  $p = 2$  dans [2] pour le cas Neumann et dans [3] pour le cas Dirichlet (voir aussi [1]) avec des petites modifications. Ainsi, nous démontrons que le spectre  $\Sigma^*$  se réjouit des propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. – Soit  $k \geq 1$  tel que  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  soit non vide. Alors il existe  $\alpha_k^> \geq \lambda_1^m$ ,  $\beta_k^> \geq \lambda_1^n$  et une bijection  $f_k^>$  continue et strictement  $\searrow$  définie de  $]\alpha_k^>, +\infty[$  vers  $]\beta_k^>, +\infty[$  tels que  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) = \{(\alpha, f_k^>(\alpha)) : \alpha \in ]\alpha_k^>, +\infty[ \}$ . De même pour  $C_k^<$ .

Nous avons des résultats similaires pour les trois autres quadrants de  $\mathbb{R}^2$ .

PROPRIÉTÉ 2. – Soit  $k \geq 1$  et soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -\}$ . Alors les deux résultats suivants sont équivalents :

- (i)  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  et  $C_k^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  sont, toutes les deux, non vides,
- (ii)  $C_{k+1}^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  (ou  $C_{k+1}^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$ ) est non vide.

Par ailleurs, les courbes  $C_k^>$  et  $C_k^<$  sont strictement au dessus (resp. au dessous) de  $C_{k+1}^>$  (resp.  $C_{k+1}^<$ ) dans les deux quadrants  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$  (resp.  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ ).

PROPRIÉTÉ 3. – Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -\}$ . Supposons que  $m^{\varepsilon_1} \neq 0$  et  $n^{\varepsilon_2} \neq 0$ . Alors l'une au moins des deux intersections  $C_1^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  ou  $C_1^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  est non vide.

Conséquence. – Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -\}$ . Des deux dernières propriétés, on déduit que si  $m^{\varepsilon_1} \neq 0$  et  $n^{\varepsilon_2} \neq 0$ , alors : ou bien pour tout entier  $k$ , les intersections  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  et  $C_k^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  sont toutes les deux non vides, ou bien il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  pour lequel  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  et  $C_k^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  sont non vides pour tout  $k \leq k_0$ , l'une des deux intersections  $C_{k_0+1}^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  ou  $C_{k_0+1}^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  est non vide, l'autre étant vide, et  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  et  $C_k^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  sont vides pour tout  $k \geq k_0 + 2$ .

En particulier, nous concluons que si les deux fonctions-poids  $m$  et  $n$  changent de signe toutes les deux, alors le spectre  $\Sigma^*$  consiste dans chaque quadrant de  $\mathbb{R}^2$  en un nombre (non nul) infini ou impair de courbes non vides  $C_k^>$  et  $C_k^<$  ( $k \geq 1$ ). Notons, ici comme dans ce qui suit, que certaines courbes peuvent être doubles et sont alors comptées deux fois.

PROPRIÉTÉ 4. – Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -\}$ . Alors les deux résultats suivants sont équivalents :

- (i)  $m^{\varepsilon_1} n^{\varepsilon_2} \neq 0$  dans  $[T_1, T_2]$ ,
- (ii)  $C_k^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  et  $C_k^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  sont non vides pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Le résultat suivant montre que toutes les situations sont possibles concernant le nombre de courbes de type hyperbole contenues dans chaque quadrant de  $\mathbb{R}^2$ .

PROPRIÉTÉ 5. – Soient  $P, Q, R, S \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Alors il existe deux fonctions-poids  $m$  et  $n$  continues sur  $[T_1, T_2]$  telles que l'intersection du spectre  $\Sigma^*$  associé au problème (P) avec  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  (resp.  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ ,  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ ,  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ ) contienne, exactement,  $2P + 1$  (resp.  $2Q + 1$ ,  $2R + 1$ ,  $2S + 1$ ) courbes de type hyperbole.

Considérons maintenant le cas particulier où  $m \equiv n$ . Il résulte de ce qui précède que :

(i) si  $m$  garde un signe constant et si  $m \underset{\neq}{\geq} 0$  (resp.  $m \underset{\neq}{\leq} 0$ ) dans  $[T_1, T_2]$ , alors  $\Sigma^*$  est constitué par une infinité de courbes de type hyperbole dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  (resp.  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ ) passant par  $(\lambda_k^m, \lambda_k^m)$  (resp.  $(\lambda_{-k}^m, \lambda_{-k}^m)$ ),  $k \geq 2$  ;

(ii) si  $m$  change de signe dans  $[T_1, T_2]$ , alors  $\Sigma^*$  est constitué par une infinité de courbes dans chacun des deux quadrants  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$  et un nombre fini et non nul de courbes dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  et dans  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ . La propriété suivante montre que ce nombre dépend du nombre de changements de signe de  $m$  dans  $[T_1, T_2]$ .

**PROPRIÉTÉ 6.** – *Supposons que  $m \equiv n$  et que  $m$  change de signe dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  le nombre de changements de signe de  $m$ . Alors le spectre  $\Sigma^*$  contient exactement  $(2N - 1)$ -courbes de type hyperbole dans chacun des deux quadrants  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ .*

Le fait que le nombre  $N$  de changements de signe de  $m$  dans l'intervalle  $]T_1, T_2[$  est fini, signalons-le, est une conséquence directe de l'hypothèse (H) ci-dessus.

Pour passer à la dernière propriété de  $\Sigma^*$ , nous notons  $(C_1^>)_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} := C_1^> \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  et  $(C_1^<)_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} := C_1^< \cap (\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2})$  pour tout  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2 \in \{+, -\}$ . Rappelons que d'après ce qui précède, l'une au moins de ces deux courbes apparaît dans  $\mathbb{R}_{\varepsilon_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon_2}$  si (et seulement si)  $m^{\varepsilon_1} \neq 0$  et  $n^{\varepsilon_2} \neq 0$ . On a alors la

**PROPRIÉTÉ 7.** – *Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -\}$ . Supposons que  $m^{\varepsilon_1} \neq 0$  et  $n^{\varepsilon_2} \neq 0$ . Alors*

- *dans le cas Neumann : ni  $(C_1^>)_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$  ni  $(C_1^<)_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$  n'est asymptotique (de n'importe quel côté) aux droites triviales (horizontales et verticales) de  $\Sigma$  ;*
- *dans le cas Dirichlet : ce caractère non asymptotique de  $(C_1^>)_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$  et de  $(C_1^<)_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$  est vrai si et seulement si  $m^{\varepsilon_1}$  et  $n^{\varepsilon_2}$  ont chacune d'elles un support compact dans  $]T_1, T_2[$ .*

*En particulier : si  $m \equiv n$  et si, par exemple,  $m^+ \neq 0$ , alors*

- *dans le cas Neumann : il existe  $\eta > 0$  tel que  $\Sigma^* \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \subset ]\lambda_1^m + \eta, +\infty[ \times ]\lambda_1^m + \eta, +\infty[$  ;*
- *dans le cas Dirichlet : on n'a l'existence d'un tel  $\eta$  que si  $m^+$  est à support compact dans  $]T_1, T_2[$ .*

---

<sup>1</sup> Voir démonstration de l'existence, de l'unicité et de la continuité de  $u$  et  $v$  en annexe. (Conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue sur demande.)

### Références bibliographiques

- [1] M. Alif, Spectre de Fučik : problème avec poids en dimension un et quelques remarques en dimension supérieure, Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1999.
- [2] M. Alif, Fučik spectrum for the Neumann problem with indefinite weights, in: Partial Differential Equations, Marcel Dekker, New York, 2002, pp. 45–62.
- [3] M. Alif, J.-P. Gossez, On the Fučik spectrum with indefinite weights, Differential Integral Equations 12 (2001) 1511–1530.
- [4] W. Allegretto, Y.X. Huang, A Picone's identity for the  $p$ -Laplacian and applications, Nonlinear Anal. 7 (1998) 819–830.
- [5] A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, 1955.
- [6] W. Walter, Ordinary Differential Equations, Springer, 1998.