C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 967–972

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Détermination du potentiel dans l'équation de Schrödinger à partir de mesures sur une partie du bord

Lucie Baudouin, Jean-Pierre Puel

Laboratoire de mathématiques appliquées, Université de Versailles St Quentin, 45, avenue des États Unis, 78035 Versailles cedex, France

Reçu et accepté le 18 mars 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On étudie l'équation de Schrödinger $\mathrm{i}y' + \Delta y + qy = 0$ sur $\Omega \times (0,T)$ avec donnée de Dirichlet $y|_{\partial\Omega\times(0,T)}$ et condition initiale $y|_{\Omega\times\{0\}}$ et on s'interesse au problème inverse qui consiste à déterminer $q(x),\ x \in \Omega$ à partir de la donnée $\frac{\partial y}{\partial \nu}|_{\Gamma_0\times(0,T)}$, où Γ_0 est une partie ouverte de $\partial\Omega$ qui vérifie une condition géométrique appropriée. Les détails des démonstrations seront donnés dans [1]. ***Pour citer cet article : L. Baudouin, J.-P. Puel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 967–972.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Determination of potential in Schrödinger equation from measurements on a part of the boundary

Abstract We study the Schrödinger equation $\mathrm{i}y' + \Delta y + qy = 0$ on $\Omega \times (0,T)$ with Dirichlet boundary data $y|_{\partial\Omega\times(0,T)}$ and initial condition $y|_{\Omega\times\{0\}}$ and we consider the inverse problem of determining the potential $q(x)$, $x \in \Omega$ when $\frac{\partial y}{\partial \nu}|_{\Gamma_0\times(0,T)}$ is given, where Γ_0 is an open subset of $\partial\Omega$ satisfying an appropriate geometrical condition. The detailed proof will be given in [1]. ***To cite this article: L. Baudouin, J.-P. Puel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 967–972.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $N \in \mathbb{N}$, $T > 0$ and let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded domain with C^2-boundary $\partial\Omega$. Let Γ_0 be an open subset of $\partial\Omega$ such that there exist $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}/\,\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega;\ (x-x_0)\cdot\nu(x) \geqslant 0\}$. We consider the following Schrödinger equation

$$\begin{cases} \mathrm{i}y'(x,t) + \Delta y(x,t) + q(x)y(x,t) = 0, & x \in \Omega,\ t \in (0,T),\\ y(x,t) = h(x,t), & x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T),\\ y(x,0) = y_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Adresses e-mail : baudouin@math.uvsq.fr (L. Baudouin); jppuel@cmapx.polytechnique.fr (J.-P. Puel).

S1631-073X(02)02391-9/FLA

It is well known that if $y_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $h \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega \times (0,T))$ and $q \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, there exists a unique solution $y = y(q) \in \mathrm{C}([0,T], \mathrm{H}^{-1}(\Omega)) \cap \mathrm{H}^{-1}(0,T; \mathrm{L}^2(\Omega))$ of (1), defined by transposition. We give a local answer to our inverse problem with the following:

THEOREM 1. – *Let* $\mathcal{U}$ *be a bounded subset of* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *and* $q \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

We assume that $|y_0(x)| \geqslant r_0 > 0$ *and* $y(q) \in \mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$ *almost everywhere in* Ω. *Then there exists a constant* $C = C(\Omega, T, \Gamma_0, q, y_0, h, \mathcal{U}) > 0$ *such that for all* $p \in \mathcal{U}$ *verifying* $q - p \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$,

$$C^{-1}\|q-p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \left\| \frac{\partial y(q)}{\partial \nu} - \frac{\partial y(p)}{\partial \nu} \right\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|q-p\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}.$$

The right-hand side of this inequality gives the continuous dependance of the normal derivative of the solution with respect to the potential and comes from classical regularity properties concerning Schrödinger equations (Lemma 1). The left-hand side, which shows the stability of the non linear inverse problem and of course also gives its uniqueness, derives from a global Carleman estimate (Proposition 1) and an idea inspired by Imanuvilov and Yamamoto's work in [6]. The geometrical condition on the set Γ_0 is very usual and has been used for example in references [7] and [9] to obtain observability inequalities.

We first work on a linearized version of the problem and consider this new Schrödinger equation:

$$\begin{cases} \mathrm{i}u'(x,t) + \Delta u(x,t) + q(x)u(x,t) = f(x)R(x,t), & x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = 0,\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Eq. (2) corresponds to a linearization around a non stationnary solution of Eq. (1). For this linear case, we prove a similar two-sided inequality and for its proof, we use regularity properties and a Carleman estimate. Then, the proof of Theorem 1 is a straightforward application. Indeed, the key point is that in the linear case, all the constants depend on the L^∞ norm of the potential. Then, since $p \in \mathcal{U}$, where $\mathcal{U}$ is bounded in $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, we are in fact in a similar situation if we consider the equation solved by $z = y(p) - y(q)$ which is of the same type as (2).

Soient $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et $T > 0$. Soit Γ_0 un ouvert non vide de $\partial\Omega$ tel qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ vérifiant $\{x \in \partial\Omega;\ (x - x_0)\cdot\nu(x) \geqslant 0\} \subset \Gamma_0$. On considère l'équation de Schrödinger avec potentiel (1) :

$$\begin{cases} \mathrm{i}y'(x,t) + \Delta y(x,t) + q(x)y(x,t) = 0, & x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,t) = h(x,t), & x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Il est connu que si $y_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $h \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega \times (0,T))$ et $q \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, ilexiste une unique solution, définie par transposition $y = y(q) \in \mathrm{C}([0,T], \mathrm{H}^{-1}(\Omega)) \cap \mathrm{H}^{-1}(0,T; \mathrm{L}^2(\Omega))$.

THÉORÈME 1. – *Soit* $\mathcal{U}$ *un sous ensemble borné de* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *et soit* $q \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. *On suppose que* $|y_0(x)| \geqslant r_0 > 0$, *presque partout dans* Ω *et que* $y(q) \in \mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$.

Alors il existe une constante $C = C(\Omega, T, \Gamma_0, q, y_0, h, \mathcal{U}) > 0$ *telle que pour tout* $p \in \mathcal{U}$ *vérifiant* $q - p \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$,

$$C^{-1}\ \|q-p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \left\| \frac{\partial y(q)}{\partial \nu} - \frac{\partial y(p)}{\partial \nu} \right\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|q-p\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}.$$

L'inégalité de droite traduit la dépendance continue de la dérivée normale par rapport au potentiel et se démontre a l'aide d'un résultat de régularité classique (Lemme 1). L'inégalité de gauche traduit la stabilité et bien sûr l'unicité du problème inverse non linéaire que nous étudions. Ce dernier résultat découle d'une inégalité de Carleman globale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel (Proposition 1). Dans un premier temps, on démontre en fait de cette manière un théorème décrivant la situation dans le cadre d'un problème linéaire. L'idée principale est inspirée des travaux de Imanuvilov et Yamamoto [6]. Les outils utilisés sont les suivants :

1. Propriété de régularité

LEMME 1. – *On considère*

$$\begin{cases} \mathrm{i}y'(x,t)+\Delta y(x,t)+q(x)y(x,t)=g(x,t), \quad x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ y(x,t)=0, \quad x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T),\\ y(x,0)=y_0, \quad x\in\Omega \end{cases} \tag{3}$$

et on suppose que $q\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $y_0\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ *et* $g\in\mathrm{L}^1(0,T,\mathrm{H}^1_0(\Omega))$.

Cette équation admet une unique solution $y\in\mathrm{C}([0,T],\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ *vérifiant* $\partial y/\partial\nu\in\mathrm{L}^2(\Gamma\times(0,T))$ *et il existe une constante* $C=C(\Omega,T,\|q\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)})>0$ *telle que* :

$$\forall t\in(0,T),$$

$$\big\|y(t)\big\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\leqslant C\big(\|y_0\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}+\|g\|_{\mathrm{L}^1(0,T,\mathrm{H}^1_0(\Omega))}\big), \tag{4}$$

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial\nu}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma\times(0,T))}\leqslant C\big(\|y_0\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}+\|g\|_{\mathrm{L}^1(0,T,\mathrm{H}^1_0(\Omega))}\big). \tag{5}$$

La démonstration de (4), qu'on peut trouver dans [4], se fait formellement grâce à une classique utilisation du lemme de Gronwall alors que celle de (5) provient d'une identité des multiplicateurs.

2. Inégalité de Carleman globale

On pose $Lv=\mathrm{i}v'+\Delta v+qv$ et $\psi=\psi(x)=|x-x_0|^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. Pour $s>0$ et $\lambda>0$ on définit sur $\Omega\times(-T,T)$ les fonctions $\theta=\theta(x,t)$ et $\varphi=\varphi(x,t)$ par

$$\theta=\frac{\mathrm{e}^{\lambda\psi}}{(T-t)(T+t)} \quad \text{et} \quad \varphi=\frac{\alpha-\mathrm{e}^{\lambda\psi}}{(T-t)(T+t)},$$

où α est une constante strictement positive telle que $\varphi>0$ sur $\Omega\times(-T,T)$.

PROPOSITION 1. – *Soit* $q\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $\|q\|_{\mathrm{L}^\infty}\leqslant m$ *et soient* ψ, θ *et* φ *définis comme ci-dessus.*

Il existe $\Lambda_0>0$ *tel que pour tout* $\lambda>\Lambda_0$, *il existe* $s_0>0$ *et une constante* $M=M(\Omega,T,\Gamma_0,m,\Lambda_0,s_0)>0$ *tels que* :

$$\begin{aligned} &s\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega|\nabla v|^2\,\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+s^3\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega|v|^2\,\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega\big(\big|\widetilde{P}_1v\big|^2+\big|\widetilde{P}_2v\big|^2\big)\,\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad\leqslant M\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega|Lv|^2\,\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+Ms\int_{-T}^{T}\!\!\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

pour tout $s>s_0$ *et* v *vérifiant*

$$v\in\mathrm{L}^2\big(-T,T;\mathrm{H}^1_0(\Omega)\big),\quad Lv\in\mathrm{L}^2\big(\Omega\times(-T,T)\big)\quad \textit{et}\quad \frac{\partial v}{\partial\nu}\in\mathrm{L}^2\big(-T,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0)\big)$$

et où

$$\begin{cases} \widetilde{P}_1v=\mathrm{e}^{s\varphi}\big(\mathrm{i}\partial_t+\Delta+s^2|\nabla\varphi|^2\big)(\mathrm{e}^{-s\varphi}v),\\ \widetilde{P}_2v=\mathrm{e}^{s\varphi}(\mathrm{i}s\varphi'+2s\nabla\varphi\cdot\nabla+s\Delta\varphi)(\mathrm{e}^{-s\varphi}v). \end{cases}$$

Idée de la démonstration. – On peut se référer à [2] en ce qui concerne la méthode générale. Elle consiste à utiliser une technique de conjuguaison en posant $v=\mathrm{e}^{s\varphi}w$ et en calculant

$$Pw=\mathrm{e}^{-s\varphi}\,L\big(\mathrm{e}^{s\varphi}w\big)=\mathrm{i}w'+\mathrm{i}s\varphi'w+\Delta w+2s\nabla\varphi\cdot\nabla w+sw\Delta\varphi+s^2|\nabla\varphi|^2w+qw.$$

Remarquons que si v est régulier en t, alors $w(-T) = w(T) = 0$. On sépare les parties symétriques et antisymétriques de l'opérateur P en $P_1 w = \mathrm{i}w' + \Delta w + s^2|\nabla\varphi|^2 w = \mathrm{e}^{-s\varphi}\widetilde{P}_1 v$ et $P_2 w = \mathrm{i}s\varphi' w + 2s\nabla\varphi\cdot\nabla w + s\Delta\varphi w = \mathrm{e}^{-s\varphi}\widetilde{P}_2 v$. Par suite

$$\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega |Pw - qw|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega \left(|P_1 w|^2 + |P_2 w|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + 2\,\mathrm{Re}\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega P_1 w\,\overline{P_2 w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On travaille essentiellement sur le terme $\mathrm{Re}\int_{-T}^{T}\int_\Omega P_1 w\,\overline{P_2 w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ et on démontre, à l'aide des propriétés de w et d'intégrations par parties, que :

$$\begin{aligned} s\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^3\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega |w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega |P_1 w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega |P_2 w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \leqslant M\int_{-T}^{T}\!\!\int_\Omega |Pw|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Ms\int_{-T}^{T}\!\!\int_{\Gamma_0} \theta\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 \nabla\psi\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il faut préciser que les propriétés de ψ, qui sont liées à la géométrie de Γ_0 sont primordiales. Il suffit alors de traduire cette inégalité en fonction de v et la Proposition 1 est démontrée.

Remarque. – La plupart des résultats auxquels on peut faire référence pour le même type de problèmes inverses concernent l'équation des ondes. Certaines, [8] et [10] par exemple, étudient la détermination du potentiel à partir d'une donnée de Dirichlet et une mesure de Neumann, comme dans notre cas. D'autres, comme [5] et [6], s'intéressent à la situation où l'on a une donnée de Neumann et une mesure de Dirichlet. Tous ces articles sont basés sur des inégalités de Carleman, globales ou locales. Cependant, dans notre approche du problème, nous n'utilisons pas de raisonnement par unicité compacité comme c'est le cas dans [10]. En effet, dès lors que nous travaillons à partir d'une inégalité de Carleman globale, nous avons les moyens d'aboutir à un résultat de manière beaucoup plus directe (comme dans [6]). Une autre approche du problème de la détermination de potentiel, pour un problème stationnaire, est considérée dans [3] où l'on suppose connue l'application qui, à une donnée de Dirichlet, associe la valeur de la dérivée normale de la solution sur Γ_0. Les résultats ainsi obtenus présentent de grandes analogies avec les notres.

3. Cas linéaire

On va dans un premier temps travailler sur une version linéarisée du problème. On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{i}u'(x,t) + \Delta u(x,t) + q(x)u(x,t) = f(x)R(x,t), & x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ u(x,t) = 0, \quad x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T), \\ u(x,0) = 0, \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

Cette équation correspond à une linéarisation autour d'une solution non stationnaire de l'équation de Schrödinger initiale.

THÉORÈME 2. – *On suppose que* $q\in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $R\in \mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$ *et que pour presque tout* x *dans* Ω, $|R(x,0)|\geqslant r_0 > 0$.

Alors il existe une constante $\mathrm{C}(\Omega, T, \|q\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}, \|R\|_{\mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))}) > 0$ *telle que pour tout* $f\in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, *si* u *est la solution de l'équation* (2),

$$C^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}. \tag{6}$$

To cite this article: L. Baudouin, J.-P. Puel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 967–972

Démonstration. – Pour obtenir $\partial u/\partial\nu$ en norme dans $\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))$ on travaille sur l'équation vérifiée par $v=u'$:

$$\begin{cases} \mathrm{i}v'+\Delta v+qv=fR', & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ v=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ v(0)=-\mathrm{i}fR(0), & x\in\Omega. \end{cases}$$

D'après les hypothèses faites dans le Théorème 2, on sait que cette équation admet une solution $v\in \mathrm{C}([0,T];\mathrm{H}^1_0(\Omega))$. En effet, $fR'\in\mathrm{L}^1(0,T,\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ et $fR(0)\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Cela implique aussi $\partial v/\partial\nu\in \mathrm{L}^2((0,T)\times\Gamma)$ et d'après le Lemme 1, on peut écrire :

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right\|_{\mathrm{L}^2((0,T)\times\Gamma_0)}\leqslant\left\|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right\|_{\mathrm{L}^2((0,T)\times\partial\Omega)}\leqslant C\left(\left\|fR(0)\right\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}+\left\|fR'\right\|_{\mathrm{L}^1(0,T,\mathrm{H}^1_0(\Omega))}\right)\leqslant C\|f\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}.$$

Ce qui donne l'inégalité de droite dans (6) : $\|\partial u/\partial\nu\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))}\leqslant C\|f\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$.

C'est maintenant la Proposition 1 qui va nous permettre d'obtenir l'inégalité de gauche. On étend la fonction v de $\Omega\times(0,T)$ par la formule $v(x,t)=v(x,-t)$ pour tout $(x,t)\in\Omega\times(-T,0)$. Ainsi, $v\in\mathrm{C}([-T,T];\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ et $\partial v/\partial\nu\in\mathrm{L}^2((-T,T)\times\Gamma)$. On prolonge aussi R' comme une fonction paire en temps, on la note toujours R' et elle appartient à $\mathrm{L}^2(-T,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$. On pose $w=\mathrm{e}^{-s\varphi}v$, $P_1w=\mathrm{i}w'+\Delta w+s^2|\nabla\varphi|^2w$ et $\mathrm{e}^{-s\varphi}\widetilde{P}_1v=P_1w$ comme dans la démonstration de l'inégalité de Carleman.

Soit $I=\operatorname{Im}\int_{-T}^0\int_\Omega\widetilde{P}_1v\,\mathrm{e}^{-2s\varphi}\overline{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

D'une part,

$$I=\operatorname{Im}\int_{-T}^0\int_\Omega P_1w\overline{w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_\Omega\left|f(x)\right|^2\left|R(x,0)\right|^2\mathrm{e}^{-2s\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x.$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis celle de Carleman donnent :

$$\begin{aligned} I&\leqslant\left(\int_{-T}^T\int_\Omega\left|\widetilde{P}_1v\right|^2\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^T\int_\Omega|v|^2\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\ &\leqslant s^{-3/2}\left(M\int_0^T\int_\Omega\left|fR'\right|^2\mathrm{e}^{-2s\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+Ms\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\varphi(x,t)=(\alpha-\mathrm{e}^{\lambda\psi})/((T-t)(T+t))$ est telle que $\mathrm{e}^{-2s\varphi(x,t)}\leqslant\mathrm{e}^{-2s\varphi(x,0)}$, pour tout $(x,t)\in\Omega\times(-T,T)$. De plus, les hypothèses $R\in\mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$ et $|R(x,0)|\geqslant r_0>0$ p.p. dans $\overline{\Omega}$ impliquent qu'il existe $g_0\in\mathrm{L}^2(0,T)$ tel que :

$$\left|R'(x,t)\right|\leqslant g_0(t)\left|R(x,0)\right|,\quad\forall x\in\Omega,\ t\in(0,T)\quad\text{et}\quad\int_0^T\left|g_0(t)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant K<+\infty.$$

On a ainsi :

$$\left[\int_\Omega\left|f(x)\right|^2\left|R(x,0)\right|^2\mathrm{e}^{-2s\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x\right]\left(1-MKs^{-3/2}\right)\leqslant Ms^{-1/2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, si s est assez grand ($s>(MK)^{2/3}$), après prolongement de R' par parité sur $(-T,0)$ puis en appliquant la Proposition 1, on à montré qu'il existe une constante $C=C(M,s)>0$ telle que :

$$\int_\Omega\left|f(x)\right|^2\left|R(x,0)\right|^2\mathrm{e}^{-2s\varphi(x,0)}\,\mathrm{d}x\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, comme $|R(x,0)|\geqslant r_0>0$, p.p. dans $\overline{\Omega}$ et comme $\mathrm{e}^{-2s\varphi(x,0)}\geqslant\mathrm{e}^{-2s(\alpha-1)/T^2}>0$, $\forall x\in\Omega$, on trouve

$$\int_\Omega\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne :

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))}$$

et le Théorème 2 est démontré.

Démonstration du Théorème 1. – On définit $z = y(p) - y(q)$ qui verifie

$$\begin{cases} \mathrm{i}z' + \Delta z + pz = (q-p)y(q), & \Omega \times (0,T), \\ z = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ z(0) = 0, & \Omega. \end{cases} \tag{7}$$

La clé de notre démonstration est que dans le cas linéaire que nous venons de traiter, toutes les constantes qui apparaissent dépendent uniquement de la norme L^∞ du potentiel. Ainsi, dès que $p \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est borné dans L^∞, nous sommes en fait, avec l'équation (7) dans une situation similaire au cas linéaire. En effet, on a $y(q) \in \mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$ et $q - p \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. De plus, on sait que $\mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)) \subset \mathrm{C}([0,T],\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$ donc on a aussi $y(x,0) = y_0 \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)$. Par suite, l'hypothèse $|y_0(x)| \geqslant r_0 > 0$, p.p. dans Ω prend un sens. Il vient $(q-p)y(q) \in \mathrm{W}^{1,2}(0,T,\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ et il existe une unique solution $z \in \mathrm{C}([0,T],\mathrm{H}^1_0(\Omega))$ au problème (7). On peut alors appliquer le Théorème 2 et cela donne :

$$C^{-1}\|q-p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|q-p\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}.$$

La démonstration du Théorème 1 est ainsi terminée car il existe une constante $C = C(\Omega, T, \Gamma_0, q, y_0, h, \mathcal{U}) > 0$ telle que pour tout $p \in \mathcal{U}$ vérifiant $q - p \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$,

$$C^{-1}\|q-p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \left\|\frac{\partial y(q)}{\partial \nu} - \frac{\partial y(p)}{\partial \nu}\right\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|q-p\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}.$$

Remarque. – Il faut souligner combien il est important que l'inégalité de Carleman utilisée soit globale. On peut se référer a [10] pour comprendre ce qui peut se passer si on utilise une estimation locale. En effet, un raisonnement par unicité-compacité devient nécéssaire si on veut démonter une estimation de stabilité dans le cas non linéaire connaissant seulement la situation linéaire et une inégalité d'observabilité. On trouve également dans la référence [6] comment une inégalité de Carleman globale permet d'arriver très rapidement a une conclusion dans une situation non linéaire pour l'équation des ondes.

Références bibliographiques

[1] L. Baudouin, J.-P. Puel, Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation, to appear.

[2] A.L. Bukhgeim, Introduction to the Theory of Inverse Problems, Inverse and Ill-Posed Problem Series, VSP, Utrecht, 2000.

[3] A.L. Bukhgeim, G. Uhlmann, Recovering a potential from partial Cauchy data, to appear.

[4] R. Dautray, J.-L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 1 et 5, Springer, Berlin, 2000.

[5] O.Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto, Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations, Comm. Partial Differential Equations 26 (7–8) (2001) 1409–1425.

[6] O.Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto, Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations, Inverse Problems 17 (4) (2001) 717–728.

[7] E. Machtyngier, Exact controllability for the Schrödinger equation, SIAM J. Control Optimization 32 (1) (1994) 24–34.

[8] J.-P. Puel, M. Yamamoto, Smoothing property in multidimentional inverse hyperbolic problems: application to uniqueness and stability, J. Inverse and Ill-Posed Problems 4 (1996) 283–296.

[9] R. Triggiani, Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled non-conservative Schrödinger equations, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste XXVIII (1997) 453–504. Supplement, dedicated to the memory of Pierre Grisvard.

[10] M. Yamamoto, Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems, J. Math. Pures Appl. 78 (1999) 65–98.