C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 161–166

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Une approche non classique d'un problème d'assimilation de données

Jean-Pierre Puel

Laboratoire de mathématiques appliquées, Université de Versailles St Quentin, 45, avenue des États Unis, 78035 Versailles cedex, France

Reçu et accepté le 18 mars 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé Nous considérons des problèmes d'évolution comme des équations de diffusion convection ou des équations de Navier–Stokes linéarisées pour lesquelles nous souhaiterions donner une « prédiction » sur un intervalle de temps $(T_0, T_0 + T)$ mais les conditions initiales nous sont inconnues. En revanche, nous connaissons des « mesures » de la solution sur l'intervalle de temps $(0, T_0)$. L'approche classique dans l'assimilation de données est de rechercher la valeur initiale au temps 0 et ceci est connu pour être un problème mal posé. Ici nous proposons de rechercher la valeur de l'état au temps T_0 (le temps final des mesures) et nous montrons sur les exemples de base déja mentionnés que ceci est un problème bien posé. Nous donnons un résultat de reconstitution exacte de l'état à l'instant T_0 qui est basé sur l'obtention d'inégalités de Carleman globales puis nous donnons un algorithme d'approximation utilisant des problèmes auxiliaires de contrôle optimal. ***Pour citer cet article : J.-P. Puel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 161–166.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A nonstandard approach to a data assimilation problem

Abstract We consider evolution problems such as diffusion convection equations or linearized Navier–Stokes system that we would like to "predict" on a time interval $(T_0, T_0 + T)$ but for which the initial value of the state variable is unknown. However, "measures" of the solutions are known on a time interval $(0, T_0)$. The classical approach in data assimilation is to look for the initial value at time 0 and this is known to be an ill-posed problem. Here we propose to look for the value of the state variable at time T_0 (the final time of the "measures") and we prove on some basic examples that this is a well-posed problem. We give a result of exact reconstruction of the value at T_0 which is based on global Carleman inequalities and we give an approximation algorithm which uses classical optimal control auxiliary problems. ***To cite this article: J.-P. Puel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 161–166.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$ of class C^2 with boundary Γ and let us consider the following basic examples of diffusion convection equations

Adresse e-mail : jppuel@cmapx.polytechnique.fr (J.-P. Puel).

S1631-073X(02)02390-7/FLA

$$\frac{\partial y}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{N}b_i\frac{\partial y}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}(c_j y)=f\quad\text{in }\Omega\times(0,T_0),\tag{1}$$

$$y=0\quad\text{on }\Gamma\times(0,T_0),\tag{2}$$

where

$$f\in \mathrm{L}^2\big(0,T_0;\mathrm{L}^2(\Omega)\big),\quad a_{ij}\in \mathrm{C}^2\big(\overline{\Omega}\big),\quad b_i,c_j\in \mathrm{L}^\infty\big(\Omega\times(0,T_0)\big)$$

with an ellipticity condition on coefficients a_{ij}, or of linearized Navier–Stokes equations

$$\frac{\partial y}{\partial t}-\mu\Delta y+(\overline{y}\cdot\nabla)y+(y\cdot\nabla)\overline{y}+\nabla p=f\quad\text{in }\Omega\times(0,T_0),\tag{3}$$

$$\operatorname{div} y=0\quad\text{in }\Omega\times(0,T_0),\tag{4}$$

$$y=0\quad\text{on }\Gamma\times(0,T_0),\tag{5}$$

where $f\in \mathrm{L}^2(0,T_0;(\mathrm{L}^2(\Omega))^N)$, $\mu>0$ and $\overline{y}\in \mathrm{L}^\infty(0,T_0;\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)^N)$. Notice that we do not impose any initial condition on y. We suppose that we know

$$y|_{\omega\times(0,T_0)}=h,\tag{6}$$

where ω is a non-empty open subset of Ω and we want to reconstruct the value of the state at time T_0.

In order to state our results we need to introduce the adjoint problem for the two cases. For $\varphi_0\in \mathrm{L}^2(\Omega)$ and $v\in \mathrm{L}^2(0,T_0;\mathrm{L}^2(\omega))$ we denote by φ the solution of

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\varphi)-\sum_{j=1}^{N}c_j\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}=v\chi_\omega\quad\text{in }\Omega\times(0,T_0),\tag{7}$$

$$\varphi=0\quad\text{on }\Gamma\times(0,T_0),\tag{8}$$

$$\varphi(T_0)=\varphi_0.\tag{9}$$

For $\psi_0\in H=\{v\in(\mathrm{L}^2(\Omega))^N,\ \operatorname{div} v=0,\ v\cdot\nu=0\text{ on }\Gamma\}$ and $w\in \mathrm{L}^2(0,T_0;\mathrm{L}^2(\omega)^N)$, ψ will be solution of

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t}-\mu\Delta\psi-(\overline{y}\cdot\nabla)\psi+(\nabla\overline{y})\psi+\nabla\pi=w\cdot\chi_\omega\quad\text{in }\Omega\times(0,T_0),\tag{10}$$

$$\operatorname{div}\psi=0\quad\text{in }\Omega\times(0,T_0),\tag{11}$$

$$\psi=0\quad\text{on }\Gamma\times(0,T_0),\tag{12}$$

$$\psi(T_0)=\psi_0.\tag{13}$$

We show that for every $\varphi_0\in \mathrm{L}^2(\Omega)$ and every $\psi_0\in H$, there exist $v=v(\varphi_0)\in \mathrm{L}^2(0,T_0;\mathrm{L}^2(\omega))$ and $w=w(\varphi_0)\in \mathrm{L}^2(0,T_0;\mathrm{L}^2(\omega)^N)$ such that $\varphi(0)=0$ and $\psi(0)=0$. We then have

$$\forall\varphi_0\in \mathrm{L}^2(\Omega),\quad \int_\Omega y(T_0)\varphi_0\,\mathrm{d}x=\int_0^{T_0}\!\!\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^{T_0}\!\!\int_\omega y v(\varphi_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\tag{14}$$

and

$$\forall\psi_0\in H,\quad \big(y(T_0),\psi_0\big)_H=\int_0^{T_0}\!\!\int_\Omega f\cdot\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^{T_0}\!\!\int_\omega y\cdot w(\psi_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\tag{15}$$

Moreover, there exist constants $C_1>0$ and $C_2>0$ depending only on Ω, ω, T_0 and the coefficients a_{ij}, b_i, c_j such that in the first case

$$\big|y(T_0)\big|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\leqslant C_1\left(\int_0^{T_0}\!\!\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\!\!\int_\omega |y|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right),\tag{16}$$

and in the second case

$$\big|y(T_0)\big|_H^2\leqslant C_2\left(\int_0^{T_0}\!\!\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\!\!\int_\omega |y|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right).\tag{17}$$

Pour citer cet article : J.-P. Puel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 161–166

This “exact” reconstruction can be approximated by considering optimal control problems on the adjoint systems defined for $\alpha > 0$ by the minimization of the functionals

$$J_\alpha(v) = \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega \left|\varphi(0)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\omega |v|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

in the first case and

$$K_\alpha(w) = \frac{1}{2\alpha}\left|\psi(0)\right|_H^2 + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\omega |w|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

in the second case. The corresponding minimizers v_α and w_α can be used for approximations of (14) and (15) as we can show that when $\alpha \to 0$,

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega f\varphi_\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{T_0}\int_\omega y v_\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to \int_\Omega y(T_0)\varphi_0 \,\mathrm{d}x \tag{20}$$

and

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega f\cdot\psi_\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{T_0}\int_\omega y\cdot w_\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to \big(y(T_0),\psi_0\big)_H. \tag{21}$$

We can also give formally an analogous process for a general evolution system. This process becomes rigourous as soon as we can prove a stability inequality analogous to (16) or (17).

Les problèmes d’assimilation de données se posent lorsque manque une donnée, en général la donnée initiale dans un système d’évolution que l’on veut simuler sur un intervalle de temps $(T_0, T_0 + T)$ (par exemple entre aujourd’hui et demain). En revanche, un historique de mesures sur la solution est connu sur un intervalle de temps $(0, T_0)$ (entre hier et aujourd’hui). Il s’agit alors, à partir de ces mesures de définir la valeur de l’état (ou une approximation de cette valeur) à un instant choisi de telle sorte que l’on puisse résoudre notre système à partir de cet instant. Ces questions sont de grande importance dans des domaines comme la météorologie et le climat et ont fait l’objet de nombreuses études. On pourra consulter [9,10,2] ainsi qu’une intéressante description dans [1]. Dans l’approche classique, on cherche à déterminer la donnée initiale à l’instant 0 (hier), c’est à dire au début des mesures pour ensuite intégrer le système sur $(0, T_0 + T)$ (entre hier et demain). Ce problème est connu pour être mal posé et, par exemple, lorsqu’il est abordé dans ce qui s’appelle l’assimilation de données variationnelle, nécessite une régularisation (souvent de type Tychonoff). L’approche proposée ici est de chercher la valeur de l’état à l’instant T_0 (aujourd’hui), c’est à dire à la fin des mesures, ce qui est bien sûr compatible avec la recherche de la solution entre T_0 et $T_0 + T$. Nous pouvons montrer sur des exemples de base : équations de convection diffusion ou équations de Navier–Stokes linéarisées, que le problème est alors bien posé et nous donnons une méthode de reconstitution exacte de l’état avec une inégalité de stabilité puis une méthode d’approximation.

Nous expliciterons ici le résultat sur le cas des équations de diffusion convection et nous donnerons brievement le résultat concernant les équations de Navier–Stokes linéarisées. Enfin nous donnerons le principe (formel) de la méthode sur un système d’evolution général. Les détails seront donnés dans [12].

1. Cas des équations de diffusion convection

Considérons un système modélisé par les équations (1), (2). Remarquons que nous n’imposons aucune donnée initiale sur y. Nous supposons connaître sur l’état la mesure (6) avec $h \in \mathrm{L}^2(0, T_0; \mathrm{L}^2(\omega))$. Pour chaque $\varphi_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, nous considérons pour le système adjoint (7)–(9) le problème (rétrograde) de contrôlabilité à zéro, à savoir de trouver $v = v(\varphi_0) \in \mathrm{L}^2(0, T_0; \mathrm{L}^2(\omega))$ tel que $\varphi(0) = 0$. Nous obtenons alors le résultat suivant.

THÉORÈME 1. – *Sous les hypothèses précédentes, pour tout* $\omega \subset \Omega$*, pour tout* $T_0 > 0$ *et pour tout* $\varphi_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$*, il existe* $v = v(\varphi_0) \in \mathrm{L}^2(0, T_0; \mathrm{L}^2(\omega))$ *tel que la solution* φ *de* (7)–(9) *satisfait*

$$\varphi(0) = 0. \tag{22}$$

Nous avons alors

$$\forall \varphi_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \int_\Omega y(T_0)\varphi_0 \,\mathrm{d}x = \int_0^{T_0}\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{T_0}\int_\omega y v(\varphi_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

De plus il existe une constante $C > 0$ *dépendant seulement de* Ω*,* ω*,* T_0 *et des coefficients* a_{ij}*,* b_i*,* c_j *telle que*

$$\left|y(T_0)\right|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant C\left(\int_0^{T_0}\int_\omega |y|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^{T_0}\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right). \tag{24}$$

Commentaires. – Ce résultat donne une manière de reconstruire la valeur de la composante de $y(T_0)$ sur φ_0 à partir des mesures connues, ceci pour tout φ_0, donc en prenant tous les éléments d'une base Hilbertienne on peut obtenir une reconstruction complète de $y(T_0)$. La preuve du théorème s'obtient essentiellement à partir de l'inégalité de stabilité (24) qui provient elle-même d'une estimation de Carleman globale pour laquelle on peut se reporter à [4,8]. Le cas où l'opérateur de diffusion contient des coefficients discontinus mais réguliers par morceaux a été traité dans [3].

On peut aussi considérer le problème suivant qui est ici seulement décrit formellement pour raisons de simplicité. Soit y solution de (1), (2) et soit $w = y(T_0)$ (remarquons que la donnée de w ne définit pas y car nous avons alors un problème rétrograde mal posé). Si $h \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{L}^2(\omega))$ nous définissons la fonctionnelle

$$H(y, w) = \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\omega |y - h|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On peut montrer, en utilisant des arguments similaires, qu'il existe un couple (y, w) dans un espace fonctionnel convenable qui minimise la fonctionnelle H.

Nous allons maintenant donner une méthode plus simple permettant d'approcher la composante de $y(T_0)$ sur φ_0. Cette méthode utilise des problèmes de contrôle optimal qui sont plus classiques et plus faciles à résoudre que les problèmes de contrôlabilité à zéro.

Pour $\varphi_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ donné on considère la solution φ de (7)–(9) et, pour $\alpha > 0$, la fonctionnelle

$$J_\alpha(v) = \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega \left|\varphi(0)\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\omega |v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

On cherche alors $v_\alpha \in \mathrm{L}^2(0, T_0; \mathrm{L}^2(\omega))$ tel que

$$J_\alpha(v_\alpha) = \min_{v \in \mathrm{L}^2(0,T_0;\mathrm{L}^2(\omega))} J_\alpha(v). \tag{26}$$

On obtient alors le résultat

THÉORÈME 2. – (1) *Pour tout* $\alpha > 0$*, il existe une solution unique* $v_\alpha \in \mathrm{L}^2(0, T_0; \mathrm{L}^2(\omega))$ *au problème* (26) *et* v_α *est caractérisé par le système d'optimalité constitué par les équations* (7)–(9) *vérifiées par* $(\varphi_\alpha, v_\alpha)$*,* (1)*,* (2) *vérifiées par un état adjoint* p_α *avec*

$$p_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha}\varphi_\alpha(0),$$
$$p_\alpha + v_\alpha = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0, T_0).$$

(2) *Lorsque* α *tend vers zéro, nous avons*

$$v_\alpha \to \overline{v} \quad \text{dans } \mathrm{L}^2\big(0, T_0; \mathrm{L}^2(\omega)\big), \qquad \varphi_\alpha \to \overline{\varphi} \quad \text{dans } \mathrm{C}\big([0, T_0]; \mathrm{L}^2(\Omega)\big),$$

où $\overline{v}$ *et* $\overline{\varphi}$ *satisfont* (7)–(9) *et*

$$\overline{\varphi}(0) = 0. \tag{27}$$

De plus, $\overline{v}$ *est l'élément de norme minimale dans* $\mathrm{L}^2(0,T_0;\mathrm{L}^2(\omega))$ *tel que* (7)–(9) *et* (27) *aient lieu. Enfin nous avons*

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega f\varphi_\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^{T_0}\int_\omega y v_\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\to\int_\Omega y(T_0)\varphi_0\,\mathrm{d}x. \tag{28}$$

Commentaire. – Pour chaque φ_0 nous devons résoudre un problème de contrôle optimal pour le système adjoint (*cf.* [11] pour l'existence et l'unicité de ce problème). Nous devons noter que pour les différentes valeurs de φ_0, les problèmes à résoudre ne diffèrent que par les valeurs initiales. Ceci est important pour les approximations numériques car les différents systèmes linéaires à résoudre auront tous la même matrice.

2. Équations de Navier–Stokes linéarisées

Pour le système (3)–(5) nous obtenons des résultats tout à fait similaires à ceux décrits pour les équations de diffusion convection. Une inégalité de stabilité analogue à (24) s'obtient à l'aide d'une estimation de Carleman globale pour le système de Navier–Stokes linéarisé, à savoir

$$\left|y(T_0)\right|_H^2\leqslant C\left(\int_0^{T_0}\int_\Omega|f|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\int_\omega|y|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right), \tag{29}$$

où

$$H=\left\{v\in\left(\mathrm{L}^2(\Omega)\right)^N,\ \operatorname{div}v=0,\ v\cdot\nu=0\text{ on }\Gamma\right\}.$$

Cette estimation est bien plus complexe à obtenir que la précédente et elle a été obtenue dans diverses situations de régularité dans [5,6] et [7]. On peut alors obtenir un résultat de contrôlabilité à zéro pour le système adjoint (10)–(13) et ceci permet de trouver un contrôle $w(\psi_0)$ tel que

$$\psi(0)=0. \tag{30}$$

Utilisant ce contrôle nous obtenons alors le résultat de reconstruction « exacte » de $\psi(T_0)$,

$$\forall\psi_0\in H,\quad\left(y(T_0),\psi_0\right)_H=\int_0^{T_0}\int_\Omega f\cdot\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^{T_0}\int_\omega y\cdot w(\psi_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{31}$$

Ici encore nous pouvons considérer une approximation de cette formule à l'aide de problèmes de contrôle optimal. On définit pour $\alpha>0$ la fonctionnelle

$$K_\alpha(w)=\frac{1}{2\alpha}\left|\psi(0)\right|_H^2+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\omega|w|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{32}$$

et nous cherchons $w_\alpha\in\mathrm{L}^2(0,T_0;(\mathrm{L}^2(\omega))^N)$ tel que

$$K_\alpha(w_\alpha)=\min_{w\in\mathrm{L}^2(0,T_0;(\mathrm{L}^2(\omega))^N)}K_\alpha(w). \tag{33}$$

Nous pouvons montrer l'existence et l'unicité de w_α ainsi que sa carctérisation par un système d'optimalité analogue à celui obtenu au Théorème 2. De plus lorsque $\alpha\to0$, nous obtenons la convergence de w_α et ψ_α vers une solution de (10)–(13) et (30). On obtient alors lorsque $\alpha\to0$

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega f\cdot\psi_\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^{T_0}\int_\omega y\cdot w_\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\to\left(y(T_0),\psi_0\right)_H. \tag{34}$$

3. Cas d'un système d'évolution général

Nous considérons un système d'évolution linéaire de la forme

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+\mathcal{L}Y=\mathcal{F}\quad\text{sur }(0,T_0) \tag{35}$$

tel que si $Y_0\in\mathcal{H}$ est donnée (on prendra pour $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert), il existe une solution unique $Y\in\mathrm{C}([0,T_0];\mathcal{H})$ de (35) avec $Y(0)=Y_0$. Nous ne connaissons pas $Y(0)$ mais nous connaissons une mesure de la solution $\mathcal{B}Y \in L^2(0,T_0;\mathcal{G})$ par exemple. Pour $Z_0 \in \mathcal{H}$, nous considérons le problème adjoint

$$-\frac{\partial Z}{\partial t} + \mathcal{L}^* Z = \mathcal{B}^* v \quad \text{sur } (0,T_0), \tag{36}$$

$$Z(T_0) = Z_0. \tag{37}$$

On cherche alors s'il existe $v = v(Z_0) \in L^2(0,T_0;\mathcal{G}')$ tel que

$$Z(0) = 0. \tag{38}$$

Ceci pourra être montré si on peut obtenir une inégalité de stabilité analogue à (24) du type

$$\left\|Y(T_0)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C\left(\int_0^{T_0} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \|\mathcal{B}Y\|_{\mathcal{G}}^2\,\mathrm{d}t\right). \tag{39}$$

On aura alors

$$\forall Z_0 \in \mathcal{H}, \quad \big(Y(T_0), Z_0\big)_{\mathcal{H}} = \int_0^{T_0} (\mathcal{F}, Z)_{\mathcal{H}} + \int_0^{T_0} \big\langle \mathcal{B}Y, v(Z_0)\big\rangle_{\mathcal{G},\mathcal{G}'}. \tag{40}$$

Sans faire appel à la contrôlabilité à zéro, on peut considérer pour $Z_0 \in \mathcal{H}$ donné le problème de contrôle optimal défini pour tout $\alpha > 0$ par

$$\min_{v \in L^2(0,T_0;\mathcal{G}')} \left(\frac{1}{2\alpha}\big|Z(0)\big|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \|v\|_{\mathcal{G}'}^2\,\mathrm{d}t\right), \tag{41}$$

où Z est solution de (36), (37).

Si v_α désigne la solution de ce problème de contrôle optimal et Z_α la solution correspondante de (36), (37), nous pouvons considérer qu'une « bonne » approximation de $(Y(T_0), Z_0)_{\mathcal{H}}$ sera donnée par

$$\int_0^{T_0} (\mathcal{F}, Z_\alpha)_{\mathcal{H}} + \int_0^{T_0} \langle \mathcal{B}Y, v_\alpha\rangle_{\mathcal{G},\mathcal{G}'}. \tag{42}$$

Ceci pourra être prouvé sous réserve de l'obtention de l'inégalité de stabilité (39).

Références bibliographiques

[1] J. Blum, F.X. Le Dimet, Assimilation de données pour les fluides géophysiques, Matapli 67 (janvier 2002).
[2] Ph. Courtier, O. Talagrand, Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory, Q. J. R. Meteorol. Soc. 113 (1987) 1311–1328.
[3] A. Dubova, A. Osses, J.-P. Puel, Exact controllability on trajectories for a transmission parabolic problem, à paraître dans ESAIM: Control Optim. Calc. Var., volume dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.
[4] A. Fursikov, O. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes Series, Vol. 34, RIM-GARC, Seoul National University, 1996.
[5] O. Imanuvilov, On exact controllability for the Navier–Stokes equations, ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 3 (1998) 97–131, www.emath.fr/cocv/.
[6] O. Imanuvilov, Remarks on exact controllability for Navier–Stokes equations, ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 6 (2001) 39–72, www.emath.fr/cocv/.
[7] O. Imanuvilov, J.-P. Puel, Global Carleman estimates for linearized Navier–Stokes equations and applications, en préparation.
[8] O. Imanuvilov, M. Yamamoto, Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, UTMS 98-46.
[9] F.X. Le Dimet, Une étude générale d'analyse objective variationnelle des champs météorologiques, Rapport scientifique LAMP 28, Université de Clermont II, BP 45, 63170 Aubière, France, 1980.
[10] F. X Le Dimet, O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, Tellus 38A (1986) 97–110.
[11] J.-L. Lions, Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[12] J.-P. Puel, A nonstandard approach to a data assimilation problem, à paraître.