C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1051–1054

Théorie des groupes/*Group Theory*
(Analyse harmonique/*Harmonic Analysis*)

Sur les polynômes d'Hermite d'une variable matricielle

Allal. Bakali, Taib. Daâmache

Laboratoire d'analyse, Département de mathématiques et d'informatique, Université Ibn Tofail, Faculté des sciences, BP 133, Kénitra, Maroc

Reçu le 24 juillet 2001 ; accepté après révision le 8 avril 2002

Note présentée par Michèle Vergne.

Résumé Nous définissons les polynômes d'Hermite d'une variable matricielle. Nous utilisons les coefficients de la représentation essentielle du groupe « affine » matriciel, pour établir quelques propriétés importantes de ces polynômes et de leurs fonctions associées. ***Pour citer cet article : A. Bakali, T. Daâmache, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1051–1054.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the Hermite polynomial of a matrix argument

Abstract We define Hermite polynomials of a matrix argument. We use the coefficients of the "essential representation" of the affine group of transformation of $\mathbb{R}^m$, to prove some important properties of those polynomes and their associated functions. ***To cite this article: A. Bakali, T. Daâmache, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1051–1054.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Définition

Soit $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre m, où m est un entier naturel non nul fixé. Notons $b = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ l'élément générique de $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ et $D_b = \det(\partial/\partial b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.

Le polynôme d'Hermite d'ordre m^2 et d'indice n, noté H_n, est défini sur $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$, par

$$H_n(b) = (-1)^{nm} \exp\bigl(\mathrm{Tr}\, bb^t\bigr)\bigl((D_b)^n \exp\bigl(-\mathrm{Tr}\bigl(bb^t\bigr)\bigr)\bigr). \tag{1.1}$$

C'est un polynôme de degré nm.

La fonction,

$$h_n(b) = H_n(b) \exp\bigl(-\mathrm{Tr}\bigl(bb^t\bigr)\bigr). \tag{1.2}$$

est la fonction d'Hermite associée à H_n.

2. Lien avec le groupe $G = \mathbb{M}_m(\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$

Le groupe des éléments inversibles d'ordre m, noté $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, opère par multiplication à gauche sur $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$. Le groupe G est le produit semi-direct de $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ par $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ relativement à cette action. La loi

Adresse e-mail : daamache1@caramail.com (T. Daâmache).

S1631-073X(02)02383-X/FLA

sur G est donnée par,

$$(b,a)(b',a') = (b+ab', aa').$$

Le dual « essentiel » du groupe G se réduit à une seule classe de représentations unitaires irréductibles $(\pi,\mathcal{H})$ donnée par [2] :

$$\big(\pi(b,a)\zeta\big)(u) = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}(bu)}\zeta(ua), \quad \text{où } (b,a)\in G,\ \zeta\in\mathcal{H} = \mathrm{L}^2\left(\mathrm{GL}_m, \frac{\mathrm{d}u}{|\det u|^m}\right) \text{ et } u\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}).$$

C'est une représentation de carré intégrable [3]. L'idée directrice de ce travail est d'obtenir à une fonction multiplicative simple près les fonctions d'Hermite comme coefficients de la représentation π et lire les propriétés fondamentales de ces coefficients en termes de polynômes d'Hermite.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, considérons les fonctions suivantes :

$$\zeta_n(u) = (-2\pi\mathrm{i})^{mn}\sqrt{\pi}^{m^2}(\det u)^n|\det u|^{m/2}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\,\mathrm{Tr}(uu^t)} \quad \text{et} \quad \eta(u) = |\det u|^{m/2}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\,\mathrm{Tr}(uu^t)}.$$

La fonction ζ_n appartient à $\mathcal{H}$ pour $n\geqslant 0$. Notons φ_n le coefficient de π associé aux vecteurs ζ_n et η. Plus exactement ;

$$\begin{aligned}\varphi_n(b,a) &= C_{\zeta_n,\eta}(b,a) = \big\langle\zeta_n, \pi(b,a)\eta\big\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= (-2\pi\mathrm{i})^{mn}\sqrt{\pi}^{m^2}|\det a|^{m/2}\int_{\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}(ub)}(\det u)^n\,\mathrm{e}^{-\pi^2\,\mathrm{Tr}((1+a^ta)u^tu)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Posant le changement $u = v(1+a^ta)^{-1/2}\sqrt{\pi}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi_n(b,a) &= \frac{(-2\pi\mathrm{i})^{mn}\sqrt{\pi}^{m^2}}{\sqrt{\pi}^{mn}}\frac{(\det a)^m|\det a|^m}{\det(1+a^ta)^{(n+m)/2}}\int_{\mathbb{M}_m(\mathbb{R})}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}(\frac{v}{\sqrt{\pi}}b(1+a^ta)^{-1/2})}(\det v)^n\,\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{Tr}(vv^t)}\,\mathrm{d}v\\ &= (-1)^{nm}\frac{(\det a)^m|\det a|^m}{\det(1+a^ta)^{m/2}}(D_b)^n\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}((1+a^ta)^{-1}bb^t)}\big)\\ &= \frac{|\det a|^{m/2}}{\det(1+aa^t)^{(m+n)/2}}h_n\big(\big(1+a^ta\big)^{-1/2}b\big).\end{aligned}$$

Remarque. – Le cas classique correspondant à $m=1$ est étudié dans [1].

3. Propriétés

Pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, les polynômes d'Hermite d'ordre m^2 vérifient les formules intégrales suivantes :

$$H_n(b) = \frac{(-2\mathrm{i})^{nm}}{\sqrt{\pi}^{m^2}}\int_{M_m(\mathbb{R})}\det(u+\mathrm{i}b)^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}(uu^t)}\,\mathrm{d}u = H_n\big(b^t\big), \tag{3.1}$$

$$H_n(ab) = H_n(b), \quad \forall a\in\mathrm{SO}(m), \tag{3.2}$$

$$\det\left(2b_{ij} - \frac{\partial}{\partial b_{ij}}\right)H_n = H_{n+1} = \det\left(2b_{ij} - \frac{\partial}{\partial b_{ij}}\right)^{n+1}(\mathbf{1}) \tag{3.3}$$

avec,

$$\det\left(2b_{ij} - \frac{\partial}{\partial b_{ij}}\right) = \det(A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m},$$

où $A_{ij} = 2b_{ij} - \partial/\partial b_{ij}$.
Pour tout $i = 1,\dots,n$,

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial b_{ki}^2}-\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\frac{\partial}{\partial b_{ki}}+n\right)H_n=0, \tag{3.4}$$

$$\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial b_{ik}^2}+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\frac{\partial}{\partial b_{ik}}+(m+n)\right]h_n=0. \tag{3.5}$$

4. Relations fonctionnelles

Notons GL_m^+ l'ensemble des matrices à déterminant positif. Pour tout entier $n \geqslant m$ définissons la fonction f_n par : $f_n(z)=\int_{\mathrm{GL}_m^+}(\det u)^{n-m}\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Tr}(uu^t)+2\operatorname{Tr}(zu)}\,\mathrm{d}u$, et notons R_n la fonction définie sur $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ par : $R_n(x)=f_n(x)+(-1)^n f_n(xJ)$, où J est une matrice symétrique vérifiant $J^2=\mathbf{1}$ et $\det J=-1$. On a :

$$C_{\zeta_n,\,|\det u|^{-m}\eta}(b,a)=\frac{(-2\mathrm{i})^{mn}\pi^{m^2/2}}{|\det a|^{m/2}\det(1+aa^t)^{n/2}}R_n\big(\mathrm{i}\big(1+aa^t\big)^{-1/2}b\big). \tag{4.1}$$

Remarque. – Lorsque m est pair, $C_{\zeta_n,\,|\det u|^{-m}\eta}(b,a)$ est égale à $\frac{(-2\pi\mathrm{i})^{m^2}}{|\det a|^m}\varphi_{n-m}(b,a)$, ce qui donne, en utilisant la formule (4.1),

$$R_n(\mathrm{i}x)=\frac{\sqrt{\pi}^{m^2}}{(-2\mathrm{i})^{m(n-m)}}h_{n-m}(x). \tag{4.2}$$

LEMME. – *Soient $n \geqslant m$, $k \geqslant 0$, $g_1, g_2 \in G$. On a* :

$$\int_G \varphi_n\big(g_1g^{-1}g_2\big)\varphi_k(g)\,\mathrm{d}g=C_{\zeta_n,\,|\det u|^{-m}\eta}(g_1)\varphi_k(g_2), \tag{4.3}$$

$$\int_G \varphi_n\big(g_1g^{-1}g_2\big)C_{\zeta_k,\,|\det u|^{2m}\eta}(g)\,\mathrm{d}g=\varphi_n(g_1)\varphi_k(g_2). \tag{4.4}$$

Démonstration. – La fonction φ_n est un convoluteur de $\mathrm{L}^2(G)$ et vérifie : $\pi(\varphi_n)=E_{\zeta_n,\,|\det u|^{-m}\eta}$, où $E_{\zeta_n,\,|\det u|^{-m}\eta}$ est l'opérateur de rang un à domaine dense dans $\mathcal{H}$ défini par : $E_{\zeta_n,\,|\det u|^{-m}\eta}\ (\xi)=\langle\xi,\ |\det u|^{-m}\eta\rangle\zeta_n$ (*voir* [2] ou [4]). La preuve de (4.3) et (4.4) se base sur [3].

PROPOSITION 1. – *Pour $n \geqslant m$ et $k \geqslant 0$, les fonctions h_n et les polynômes H_n vérifient les formules suivantes* :

$$\int_{\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})}\frac{|\det a|^{-m}(\det a)^n}{\det(1+aa^t)^{(n+k+m)/2}}h_{n+k}\big(\big(1+a^ta\big)^{-1/2}(ax+y)\big)\,\mathrm{d}a=(-2\mathrm{i})^{mn}R_n(\mathrm{i}y)h_k(x), \tag{4.5}$$

$$\int_{\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})}\frac{|\det a|^{n}}{\det(1+aa^t)^{(n+k)/2+m}}R_{n+k+2m}\big(\mathrm{i}\big(1+a^ta\big)^{-1/2}(ax+y)\big)\,\mathrm{d}a =\frac{\pi^{m^2}}{(-2\mathrm{i})^{m(n+k)}}h_n(x)h_k(y). \tag{4.6}$$

Lorsque m est pair on a :

$$\int_{\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})}\frac{(\det a)^{n-m}}{\det(1+aa^t)^{(n+k+m)/2}}h_{n+k}\big(\big(1+a^ta\big)^{-1/2}(ax+y)\big)\,\mathrm{d}a=(-2\mathrm{i}\sqrt{\pi})^{m^2}h_{n-m}(y)h_k(x). \tag{4.7}$$

Démonstration. – Les formules (4.5) et (4.6) se déduisent du lemme précédent. La formule (4.7) s'obtient de (4.5) et de la formule (4.2) d'une façon évidente.

Remarque. – Lorsque m est pair, les formules (4.5) et (4.6) se confondent avec la formule (4.7).

5. Formule de multiplication

Pour tout $a \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ la fonction : $b \mapsto \varphi_n(b,a)$ est un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{M}_m(\mathbb{R}))$. Donc pour $k \in \mathbb{N}$ la convolution $\varphi_n(\cdot,a) * \varphi_k(\cdot,a')$ est bien définie.

PROPOSITION 2. – *Pour $n,k \in \mathbb{N}^*$ et $a,a' \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ on a* :

$$\left[\varphi_n(\cdot,a) * \varphi_k(\cdot,a')\right](\alpha) = \pi^{m^2/2} \frac{|\det a \det a'|^{m/2}}{\det(\sqrt{aa^t + a'a'^t + 1})^{m/2}} \varphi_{n+k}(\alpha, \sqrt{aa^t + a'a'^t + 1}). \tag{5.1}$$

Démonstration. – La preuve utilise la transformation de Fourier classique sur $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 3. – *Les fonctions h_n et les polynômes H_n vérifient la relation suivante* :

$$\int_{\mathbb{M}_m(\mathbb{R})} h_k\left(\alpha x - b\sqrt{x^2-1}\right) h_n(b)\,\mathrm{d}b = \pi^{m^2/2} \frac{\det(x^2-1)^{n/2}}{(\det x)^{k+m+n}} h_{n+k}(\alpha) \tag{5.2}$$

avec, $1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_m(\mathbb{R})}$ *et x une matrice symétrique* > 1.

$$\int_{\mathbb{M}_m(\mathbb{R})} H_k\left(\alpha\sqrt{1-z^2} - bz\right) H_n\left(\alpha z + b\sqrt{1-z^2}\right) \mathrm{e}^{-\operatorname{Tr}(bb^t)}\,\mathrm{d}b = \pi^{m/2} \det(1-z^2)^{k/2} \det z^n H_{n+k}(\alpha) \tag{5.3}$$

avec z une matrice symétrique telle que $0 < z < 1$.

Démonstration. – On utilise la formule (5.1) de la proposition précédente.

Remarque. – Lorsque $m = 1$ et en particulier pour $k = 0$, la formule (5.3) devient :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n\left(\alpha x + \sqrt{1-x^2}b\right) \mathrm{e}^{-b^2}\,\mathrm{d}b = \sqrt{\pi} x^n H_n(\alpha).$$

En faisant k intégrations par partie et en utilisant l'equation $H_n^{'} = 2nH_{n-1}$, nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}} H_{k+n}\left(\alpha x + \sqrt{1-x^2}t\right) H_k(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2^k\sqrt{\pi}\frac{(k+n)!}{n!}\sqrt{1-x^2}^k x^n H_n(\alpha).$$

Si $l = k+n$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} H_l\left(\alpha x + \sqrt{1-x^2}t\right) H_k(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2^k\sqrt{\pi}\frac{l!}{(l-k)!}\sqrt{1-x^2}^k x^{l-k} H_{l-k}(\alpha), & l \geqslant k, \\ 0 \text{ pour}, & l < k. \end{cases} \tag{5.4}$$

La formule (5.4) a été démontrée dans [5] (*voir* page 579, ...) en partant d'une formule de multiplication pour les polynômes de Gegenbauer. Notre formule se déduit directement de l'expression du coefficient φ_n. C'est « la formule de multiplication diminuant le degré ». La formule (5.3) n'a pas d'analogue dans [5]. C'est « la formule de multiplication augmentant le degré ».

Références bibliographiques

[1] M. Akkouchi, A. Bakali, T. Daâmache, Groupe affine et polynômes d'Hermite, Math. Rech. Appl. 3 (2000).
[2] A. Bakali, Analyse harmonique sur les groupes $ax + b$ matriciels, Thèse doctorat ès-sciences mathématiques, Université de Nancy I, 1984.
[3] M. Duflo, C.C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact groups, J. Funct. Anal. 21 (1976) 209–243.
[4] I. Khalil, Sur l'analyse harmonique du groupe affine de la droite, Stud. Math. 5 (1974) 139–167.
[5] N.Ja. Vilenkin, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris, 1969.